بسم الله الرحمن الرحیم

جلسه ۲۲ / ۸ / ۱۴۰۱

Landau - Ginzburg - Wilson theory

ابتدا به ساکن ab-initio — Effective

نظریه موثر (پدیده شناختی) برای مدل سازی سیستم که در نزدیکی نقطه بحرانی و خود نقطه بحرانی

$$\mathcal{H} \longrightarrow Z \longrightarrow F \longrightarrow$$ observable quantities and order Parameter

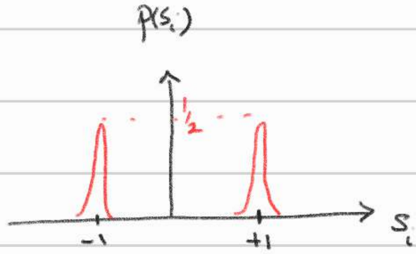
Ex1: §3.3 Cardy . Continuous Ising Model

$$\mathcal{H} = -J\sum_{ij} s_i s_j - H\sum s_i$$

$$Z = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta\mathcal{H}} = \sum_{\{S\}} e^{-\beta\mathcal{H}(\{S\})} = \sum_{S_1=\pm}\sum_{S_2=\pm1}\cdots\sum_{S_N=\pm1} e^{-\beta\mathcal{H}(\{S\})}$$

$$F = -K_B T \ln Z$$

$$P(s_i) = \frac{1}{2}\delta_D(s_i-1) + \frac{1}{2}\delta_D(s_i+1)$$



$$1 = \int ds_i\, P(s_i)$$ Normalization

$$\sum_{\{S\}} \longrightarrow \int DS \underbrace{\prod_{i=1}^{N} \delta_D(s_i^2-1)}$$

قیدی است که به ما نشان می‌دهد $s_i = \pm1$

$$Z = \sum_{\{S\}} e^{-\beta\mathcal{H}(\{S\})} = \int DS\; e^{+\beta\frac{J}{2}\sum_{ij} s_i s_j + \beta H\sum_i s_i} \underbrace{\prod_{i=1}^{N} \delta_D(s_i^2-1)}$$

$\longleftarrow s_i = \pm1$ مقادیر اسپین در دو نقطه

$\delta_D(S_i^2-1) \longrightarrow \lim_{\sigma \to 0}$ Gaussian function $= \delta_D$

$\boxed{\lambda \equiv \frac{1}{2\sigma^2}}$ constant

$$e^{-\frac{(S_i^2-1)^2}{2\sigma^2}} = \mathcal{N}(1,\sigma) = e^{-\lambda(S_i^2-1)^2}$$

$$\mathcal{H} \longrightarrow \bar{\mathcal{H}} = -\sum J(r-r')\,S(r)\,S(r') - H\sum S(r) + \overbrace{\frac{\lambda}{\beta}}^{\bar{\lambda}}\sum (S^2_{(r)}-1)^2$$

$$\bar{\mathcal{H}} = -\sum J(r-r')\,S(r)\,S(r') - \underbrace{H\sum S(r)} + \bar{\lambda}\sum (S^2_{(r)}-1)^2$$

"long wavelength mode" $\rightarrow \sum J(r-r')\,S(r)\,S(r')$

$$= \sum J(r-r')\,S(r)\left[S(r) + \underbrace{(\vec{r}-\vec{r}\,')}\cdot\vec{\nabla}S(r) + \frac{1}{2}(r-r')^2\,\nabla^2 S \dots\right]$$

↑↑↑↑↑↑↑↑

↑↑↓↓↑↑↓↓

λ

↑↑↑↑↓↓↑↑↑

$a \ll dx < \overset{=\xi}{\lambda} \sim L \rightarrow$ system size

a: unit cell

λ: Correlation Length scale

$$\bar{\mathcal{H}} = \int \frac{d^d r}{a^d}\left[\underbrace{\frac{1}{2}Ja^2(\nabla S)^2} - \underbrace{(2\bar{\lambda}+J)S^2} + \underbrace{\lambda S^4} - \underbrace{HS}\right]$$

Continuous Ising model with short Intraction

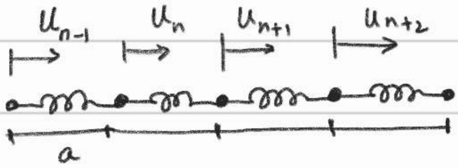
$$\rightarrow \underbrace{\nabla^2,\ \nabla^3,\ \nabla^4 \dots}_{\text{صرف نظر کنیم}}$$

$$\bar{\mathcal{H}} = \int d^d r\left[\widetilde{\frac{1}{2}(\nabla S)^2} + \tilde{t}a^{-2}S^2 + \tilde{u}a^{d-4}S^4 + h\,a^{-d/2-1}S\right]$$

$$t \equiv -\frac{(2\lambda+J)}{JR^2} \qquad u \equiv \frac{\lambda}{J^2R^4} \qquad h \equiv -\frac{H}{J^{1/2}R}$$

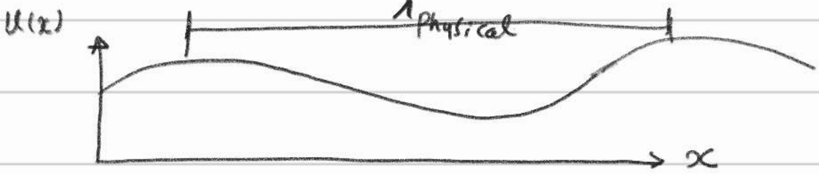
Coupling constan

Ex2: Elasticity



$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{N} \left[\frac{(m\dot{u}_n)^2}{2m} + \frac{1}{2} K \underbrace{\overbrace{(u_{n+1}-u_n)^2}^{\text{انرژی پتانسیل}}} \right]$$

$u(t) = Ae^{i\omega t}$ $\qquad$ $m\ddot{u} = F = -\nabla V$



$a \ll dx < \lambda_{physical}$

$$\sum_n \longrightarrow \int \frac{d^d x}{a^d}$$

$u_n \longrightarrow u(x)$ $\quad$ Field $\quad$ میدان

خوش تعریف در هر x

$$u_{n+1} - u_n = \partial_x u \Big|_{x=na}$$

$$V = \sum_n \frac{1}{2} K (u_{n+1} - u_n)^2 = \frac{1}{2} \int \frac{d^d x}{a^d} K \underbrace{(\partial_x u)^2}$$

$$V[u] = \int d^d x \underbrace{\mathcal{F}[u, \partial_x u, \ldots]}_{\text{Potential Energy Density}}$$

$$\boxed{\mathcal{H} = \int_{\gg a}^{\infty} \frac{d^d x}{a^d} \left[\frac{1}{2} m (\partial_t u)^2 + \frac{1}{2} K (\partial_x u)^2 \right]} \longleftrightarrow \boxed{a \ll dx < \lambda_{physical} \sim L}$$

$$* \quad \mathcal{H} = \int d^d x \left[\underbrace{T[u, \partial_t u, \ldots]}_{\text{چگالی انرژی جنبشی}} + \underbrace{\mathcal{F}[u, \partial_x u, \ldots]}_{\text{چگالی انرژی پتانسیل}} \right] \quad *$$

هدف ما در ادامه در نظر گرفتن یک رهیافت پدیده‌شناختی صرفاً مبتنی بر خواص سراسری

تقارن، ...
پایداری

این سیستم است

Reconstruction of Hamiltonian based on Phenomenological approach

$$J\sum s(r)s(r')$$

$$G = \langle s(r)\, s(r')\rangle \sim \frac{1}{R^{d-2+\eta}}$$

① locality

موضعیت

$$V[u] = \int \frac{d^d x}{a^d}\, \underbrace{\phi(u(x), \partial_x u, \ldots)}_{\text{حاکی از برهمکنش}}$$

اگر اثر برهمکنش‌ها موضعی و کوتاه‌برد موثر باشند لذا انتظار داریم مشتقات مراتب بالاتر کمتر سهم داشته باشند

② Translational Symmetry

تقارن انتقالی

$$\Phi[u(x)+c] = \phi[u(x)]$$ یک انتقال سراسری تغییری را ایجاد نمی‌کند

انتظار داریم در ساده‌ترین مدل ϕ تابع صریحی از u نباشد

③ Stability

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial u}}_{\text{صفر}}\ \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{\text{غیر صفر}} =$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \phi}{\partial u}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0$$

تابع خطی از $\partial_x u$ است

$$\phi[(\partial_x u)^2] \longrightarrow \frac{1}{2}K(\partial_x u)^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{\rho}{2}\int dx \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + v^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \qquad v = \sqrt{K/\rho}$$

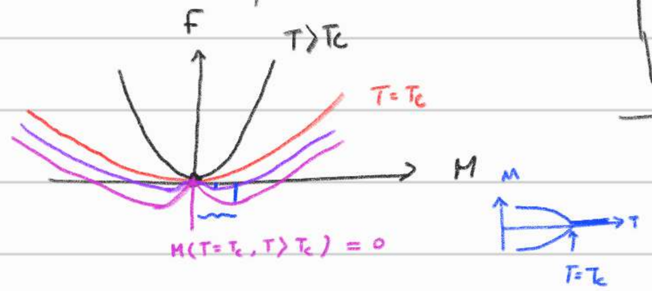
پس نتیجه

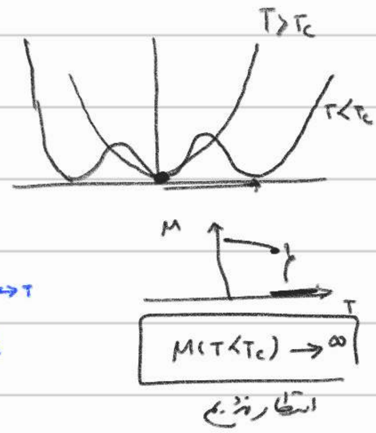
در رهیافت پدیده‌شناختی ضرایب ثابت محاسبه نمی‌شوند فقط شکل تابعیت قابل استخراج است

مفهوم پایداری در سیستم اسپینی ← در بستر وجود گذار فاز مرتبه اول

گذار فاز مرتبه دوم

را می‌بینیم





$S \longrightarrow u$

استفاده از رهیافت پدیده‌شناختی منجر به جواب یکتا نمی‌شود. اما از ساده‌ترین مدل نقطه شروع آن است و درصورتی که نتایج این مدل‌سازی، با نتایج حاصل از آزمایش سازگاری داشته باشد یعنی مدل موفق است. در غیر اینصورت لازم است جملات دیگری به مسئله اضافه شود.

$$L = \int d^dx \, \mathcal{L}$$

برای مثال در مسئله مغناطیس درصورتی که

$$\mathcal{L} \sim a_2 M^2 \leftarrow \text{Gaussian model}$$

در نظر گرفته شود نتایج در $t>0$ ($T>T_c$) سازگاری دارد اما در $t<0$ ($T<T_c$)

الزاماً به $M \neq 0$ منجر نمی‌شود پس لازم است اولین جمله‌ای که خواص عمومی را حفظ می‌کند

به $\mathcal{L}$ اضافه شود یعنی

$$\mathcal{L} = \underbrace{a_2 M^2 + a_4 M^4}_{\phi^4\text{-model}}$$

$$\mathcal{L} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[K] \, M^n$$

بسط لاگرانژی