For $T=0$, $H=0$ $\quad \lambda_+ = \lambda_- \longrightarrow \xi = \infty$

نظم بلندبرد داریم ← فاز منظم داریم

For $T>0$ $\quad \lambda_+ > \lambda_- \longrightarrow \xi =$ محدود است

نظم کوتاه برد داریم ← فاز منظم نداریم

جلسه ۱۴۰۱/۸/۱۷

بسم الله الرحمن الرحیم

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle} S_i S_j - H\sum_i S_i$$

2-Dimensional Ising Model.

☆ Perturbative Method

- → low temperature $K_B T < J$
- → High temperature $K_B T > J$

1946 Lars Onsager $\quad H=0$

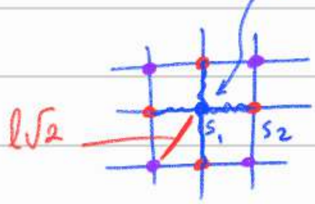
$$* \quad T_c = \frac{2J}{K_B \ln(\underbrace{Z}_{\text{coordinate No}}-1)}$$

Ex 1: High temperature $\quad K_B T > J$ $\quad \boxed{2\text{-D}}$

$H=0$

$$\mathcal{H} = -J\sum S_i S_j \longrightarrow Z = \sum_{\{S\}} \underbrace{e^{+\beta J \sum_{\langle ij\rangle} S_i S_j}}$$

$$Z = \sum_{\{S\}} \prod_{\substack{\text{link}\\ \langle ij\rangle}} e^{+\beta J S_i S_j}$$



$S_i = \pm 1$

Recall $e^{\beta J s_i s_j} = \cosh\beta J + s_i s_j \sinh\beta J$

$= \cosh\beta J\,[1 + s_i s_j \tau]$

$\boxed{\tau \equiv \tanh\beta J}$ ☆ $\lim_{\beta J \to 0} \tau \to 0$ ☆

$$Z(\beta J) = \sum_{\{s\}} \prod_{link} \widetilde{\cosh\beta J}\,(1 + s_i s_j \tau)$$

$(1+s_i s_j \tau)(1+s_\ell s_k \tau)(1+s_m s_n \tau)$

تعداد کل اسپین‌ها

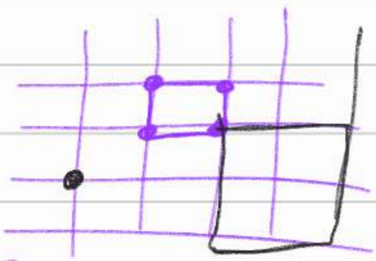
تعداد لینک‌ها، جمع‌های مد نظر

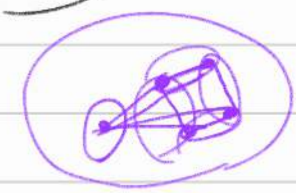
$$Z = (\cosh\beta J)^{N\frac{1}{2}q} \sum_{\{s\}} \prod_{link} (1 + s_i s_j \tau)$$

$$Z(\beta J) = (\cosh\beta J)^{\frac{1}{2}qN} \sum_{\{s\}} \underbrace{\left[1 + \tau^1 \sum_{link} s_i s_j + \tau^2 \sum_{link} s_i s_j s_k s_\ell + \dots\right]}_{loop}$$

loop

$\sum_{s=\pm 1} 1 = 2$, $\sum_{s=\pm 1} s = 0$, $\sum_{\{s\}} 1 = 2^N$, $\sum_{\{s\}} s_i = 0$





$\{s\} = \{s_1, s_2, \cdot \quad s_N\}$

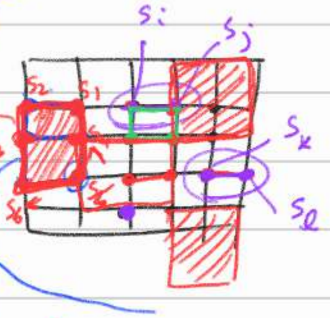
$= \{s_1 = \pm 1, s_2 = \pm 1 \quad \}$

نزدیک همسایه Link در نظر گرفتیم

$\cdot \quad \cdot$

Loop

حلقه بسته
از جمله جاهایی
که می‌توانم در آن
شکل بسازم



$\sum_{link} s_i s_j$ $+1$

$\sum s_i s_j s_k s_\ell = 0$

$\sum s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6$

$$Z(\beta J) = (\cosh \beta J)^{\frac{1}{2} q N} \, 2^N \sum_{l=0}^{\infty} N_l \tau^l$$

$$\frac{\text{تعداد حلقه‌های با محیط } l}{2^N}$$

$$\boxed{\begin{aligned} Z &= (\cosh \beta J)^{\frac{1}{2} q N} \, 2^N \, Q_N(\tau) \\ Q_N(\tau) &= \sum_{l=0}^{\infty} N_l \tau^l \end{aligned}}$$

Ex2: 1D open Boundary

$$\frac{1}{2} \overset{=2}{q} N = N - 1$$

$$\underline{Z = (\cosh \beta J)^{N-1} \, 2^N \, Q_N(\tau)} = \underbrace{2 (2 \cosh \beta J)^{N-1}}$$

به روش قبلی سازگار است

برای همه حالت‌ها صحیح است

$$Q_N(\tau) = \underset{\uparrow \atop 1}{N_0} \tau^0 + \cancel{N_1 \tau^1} + \cancel{\cdots} = 1$$

$\underline{K_B T > J}$ $\quad \underline{\beta J \ll 1}$

$\beta J \ll 1$ $\quad J \cdots$

Ex 3 Low Temperature $\quad \beta = 10 \cdot (0.0001) \ll$

$\boxed{2T + V = 0}$ Virial Theorem

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{3N} \frac{P_i^2}{2m} - J \sum S_i S_j - \frac{1}{2} \sum \underbrace{U(r_i - r_j)}_{g, E, B} + \frac{1}{2} K \sum (r_i - r_j)^2$$

Free part

$$+ \frac{1}{2} \sum I_i \omega_i^2 + \cdots - H \sum S_i$$

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n[K] \, m^n = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + a_3 m^3 + a_4 m^4 + \cdots$$

برای سیستم مغناطیسی $\quad F = a_0 - Hm + tm^2 + a_3 m^3 + a_4 m^4$

میدان مغناطیسی خارجی $\quad$ دما

$\underbrace{t, h, a_4, \ldots}$ نقش ثابت‌های جفت شدگی Coupling Constants را بازی می‌کند

پارامتر نظم Order Parameter

$$\left\{ \begin{array}{l} Z = \sum e^{-\beta \mathcal{H}} \longrightarrow P(\{\text{configuration}\}) = \dfrac{e^{-\beta \mathcal{H}}}{Z} \\ \end{array} \right.$$

احتمال پیدا شدن حالتی از سیستم که انرژی اش $\mathcal{H}$ باشد.

$$\mathcal{H} = -H \sum S_i - J \sum S_i S_j$$

$$e^{-\beta \mathcal{H}} = e^{+\beta H \sum S_i + \underbrace{\beta J \sum S_i S_j}_{\text{نقش ندارد}}} \qquad \beta J \to 0$$

Ex3: Low temperature $\quad K_B T < J \to \beta J > 1 \quad$ D-Dim

$$\mathcal{H} = -J \sum S_i S_j + J \sum_{ij} 1 - J \sum_{ij} 1$$

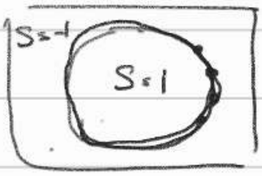
$$= J \sum (1 - S_i S_j) - \underbrace{J \sum_{ij} 1}_{-J \frac{1}{2} q N}$$

$$\boxed{\mathcal{H} = J \sum_{ij} (1 - S_i S_j) - \frac{1}{2} q N J}$$

$$Z = e^{\frac{\beta q N J}{2}} \sum_{\{s\}} e^{-\beta J \sum_{ij} (1 - S_i S_j)}$$

$1 = e^0 \leftarrow 0 \leftarrow S_i = S_j$ برای

$e^{-2\beta J} \leftarrow S_i = -S_j$



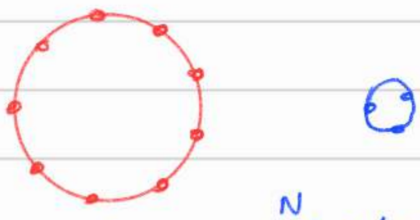
حلقه‌ای به محیط l

$$Z = e^{\beta q \frac{NJ}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} N_l \left(e^{-2\beta J}\right)^l \qquad Q_N \equiv \sum_{l=0}^{\infty} N_l \, \tau^l$$

$$\boxed{Z = e^{\beta q \frac{NJ}{2}} Q_N\left(e^{-2\beta J}\right)}$$

برای روشن شدن بیشتر موضوع مثال Ex6 را ببینید.

Ex 4 Periodic Boundary Condition 1D - Ising



High temperature

$$Z = 2^N (\cosh \beta J)^{N-1} \sum_{l=0}^{\infty} N_l \tau^l = 2^N (\cosh\beta J)^{N-1} \left[1 + 0\times\tau^1 + 0\,\tau^2 + \dots + 1\times\tau^N\right]$$

تعداد حلقه محیط N

$$\left\{\begin{array}{l} \text{خود شکل سیستم} \quad N_0 = 1 \\ \left\{\begin{array}{l} N_l = 1 \quad \text{یک حلقه بسته داریم} \\ l = N \end{array}\right. \\ \text{بقیه } N_l \text{ صفرند} \end{array}\right\}$$

$$Z = 2^N (\cosh\beta J)^{N-1} \left(\underset{l=0}{1} + \underset{l=1}{1\,(\tanh\beta J)^N}\right)$$

یک حلقه بسته (کل سیستم) با محیط N داریم.

$$Z = 2^N \left[\cosh^N \beta J + \sinh^N \beta J\right]$$

حل نتیجه مدل آیزینگ یک بعدی
با شرط مرزی تناوبی

Ex5: 1D Ising model for $H \neq 0$ and Periodic Boundary Condition using Transfer matrix.

$Z = ?$, $\langle S \rangle = ?$

$$Z = -J \sum_{i=1}^{N} S_i S_{i+1} - H \sum_{i=1}^{N} S_i = -J \sum S_i S_{i+1} - \frac{H}{2} \sum (S_i + S_{i+1})$$

$$\langle S_i | \hat{T} | S_{i+1} \rangle = e^{-\beta\left[-J S_i S_{i+1} - \frac{H}{2}(S_i + S_{i+1})\right]}$$

$$T = \begin{bmatrix} e^{\beta J + \beta H} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J - \beta H} \end{bmatrix}$$

$$U^{-1} T U = \hat{\tilde{T}} \qquad \tilde{T} = \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(-e^{\beta J + (J-H)\beta} + e^{\beta J + (H+J)\beta} - \sqrt{-4(-1+e^{4\beta J}) + (-e^{\beta J + (J-H)\beta} - e^{\beta J + (H+J)\beta})^2}\right) & 1 \\ \frac{1}{2}\left(-e^{\beta J + (J-H)\beta} + e^{\beta J + (J+H)\beta} + \sqrt{-4(-1+e^{4\beta J}) + (-e^{\beta J + (J-H)\beta} - e^{\beta J + (H+J)\beta})^2}\right) & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z = \mathrm{Tr}(\hat{T}^N) = \lambda_+^N + \lambda_-^N$$

$$\langle S \rangle = \mathrm{Tr}[\hat{S}\hat{T}^N] = \mathrm{Tr}[\hat{S}\underbrace{UU^{-1}}_{1}\hat{T}^N\underbrace{UU^{-1}}_{1}]$$

$$= \mathrm{Tr}[\hat{S}U\hat{\tilde{T}}^N U^{-1}]$$

$$\boxed{\langle S \rangle = \frac{\sinh \beta H}{\sinh^2(\beta H) + e^{-4\beta J}}}$$

$$\lim_{\substack{H \to 0 \\ \beta = \text{finite } (T \neq 0)}} \langle S \rangle = 0$$

که با نتایج قبلی سازگار است

بنابراین جمع بندی می‌کنیم که مدل آیزینگ یک بعدی وقتی $H=0$ باشد در $T \neq 0$ نظم بلند برد ندارد یعنی فاز نظم ندارد یعنی $\langle S \rangle = 0$. و در $T=0$ فقط نظم دارد که در واقع حالت بدیهی است.

☆ توضیح تکمیلی درخصوص Z در حالت $D=2$ و حلقه‌ای بسته ☆

Ex 6:

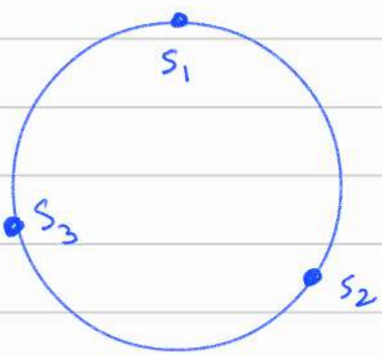
دیدیم که

$$Z = (\cosh \beta J)^{\frac{1}{2} q N} \sum_{\{S\}} \left[1 + \tau \sum_{ij} S_i S_j + \tau^2 \sum_{ijkl} S_i S_j S_k S_l + \cdots \right]$$

$$= (\cosh \beta J)^{\frac{1}{2} q N} \left[\sum_{\{S\}=\pm 1} 1 + \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \cdots \sum_{S_N=\pm 1} \tau \sum_{Link} S_i S_j + \cdots \right]$$

$$= (\cosh \beta J)^{\frac{1}{2} q N} \left[2^N + \cdots \cdots \right]$$

فرض کنید $D = 1$ و حالت تناوبی داشته باشیم. پس $q = 2$



به شکل اصلی تابع پارش توجه کنید

$$Z = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} e^{+\beta J [S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1]}$$

می دانیم که

$$\boxed{\begin{gathered} e^{\beta J S_i S_j} = \cosh \beta J [1 + S_i S_j \tau] \\ \tau \equiv \tanh \beta J \end{gathered}}$$

$$Z = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \{\cosh \beta J [1 + S_1 S_2 \tau]\} \{\cosh \beta J [1 + S_2 S_3 \tau]\}$$

$$\times \{\cosh \beta J [1 + S_3 S_1 \tau]\}$$

$$Z=(\cosh\beta J)^3\sum_{S_1}\sum_{S_2}\sum_{S_3}(1+\tau S_1S_2)(1+\tau S_2S_3)(1+\tau S_3S_1)$$

$$=(\cosh\beta J)^3\sum\sum\sum\Big\{1+\tau(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)+\tau^2(S_1S_2S_2S_3+S_2S_3S_3S_1$$

$$+S_1S_2S_3S_1)+\tau^3(S_1S_2S_2S_3S_3S_1)\Big\}$$

$$=(\cosh\beta J)^3\Big\{\underbrace{\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{S_3=\pm1}1}_{2^3}+\underbrace{\tau\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{S_3=\pm1}(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)}_{A}$$

$$+\underbrace{\tau^2\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{S_3=\pm1}(S_1\underbrace{S_2S_2}_{1}S_3+S_2\underbrace{S_3S_3}_{1}S_1+\underbrace{S_1S_2S_3S_1}_{=1})}_{B}$$

$$+\overbrace{\tau^3\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{S_3=\pm1}(S_1\underbrace{S_2S_2}_{1}\underbrace{S_3S_3}_{1}S_1)}^{C}\Big\}$$

$$Z=(\cosh\beta J)^3\Big\{2^3+A+B+C\Big\}$$

$$A=\tau\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{S_3=\pm1}(S_1S_2+S_2S_3+S_3S_1)$$

$$=\tau\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\Big[S_1S_2+\cancel{S_2}-\cancel{S_2}+\cancel{S_1}-\cancel{S_1}\Big]$$

$$=\tau\sum_{S_1=\pm1}\Big[\cancel{S_1}-\cancel{S_1}\Big]=0$$

$$B = \tau^2 \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \sum_{S_3=\pm1} [S_1 S_3 + S_2 S_1 + S_2 S_3] = 0$$

$$C = \tau^3 \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \sum_{S_3=\pm1} 1 = \tau^3 2^3 = 2^3 N_{l=3} \tau^3$$

$$= 2^3 (1) \tau^3$$

یک حلقه بسته داریم

پس

$$Z_3 = (\cosh \beta J)^3 \left[2^3 + 2^3 \tau^3 \right]$$

$$Z_3 = (\cosh^3 \beta J + \sinh^3 \beta J) 2^3$$

$$Z_N = 2^N (\cosh^N \beta J + \sinh^N \beta J) \longleftarrow$$

همان چیزی که قبلاً از طریق

روش Transfer matrix

بدست آورده بودیم.