

⑪ Correlation Length Scale.

طول مترابط

ξ = Correlation Length , L : system size

L : in Thermodynamic limit

At Critical Point

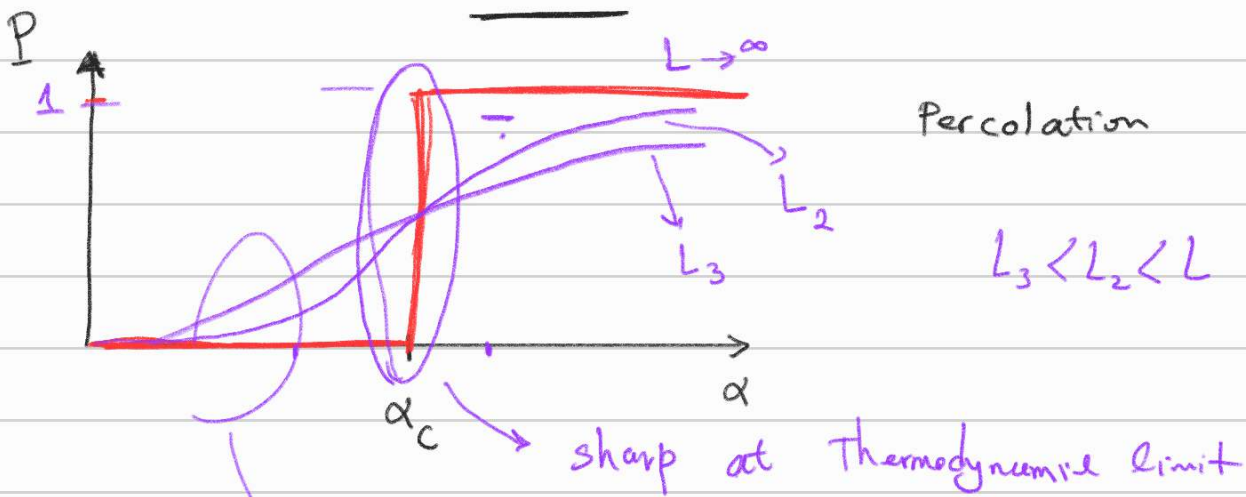
$\xi \rightarrow \infty$ Global behavior

تقارب عالمي \rightarrow طول مترابط

"Symmetry"

$[\xi, L]$ مقابله

$\xi \sim L$ finite size effect



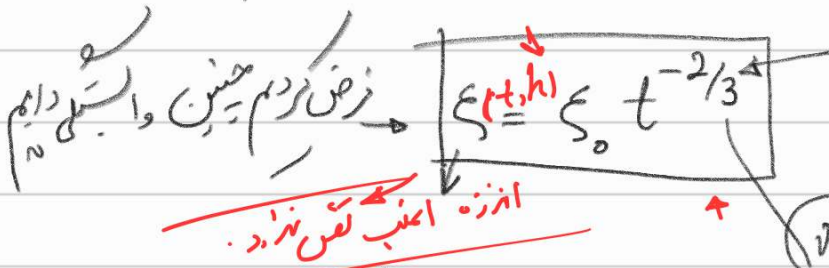
finite size.

$\xi(T_c) \rightarrow \infty$

$\xi \sim L$

Suppose that for a typical system

$$\delta S_i = S(r_i) - \langle S \rangle$$



$$= C(r_i, r_j) = \langle \delta S_i \delta S_j \rangle$$

$$t \equiv \frac{T - T_c}{T_c} \rightarrow |r_i - r_j| \sim R^\beta$$

$$\downarrow \quad C(R) \sim (R/\xi)^{-\beta}$$

Reduce Temperature

External Parameter

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_0 = 10 \text{ \AA} \quad \text{for } T \gg T_c \\ L = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m} \end{array} \right.$$

for $T \rightarrow T_c$ $t \rightarrow 0$

e.g. $t = 10^{-11}$ $T = 1.00000000001 T_c$

$$\xi(t = 10^{-11}) = \underbrace{(10 \times 10^{-10})}_{\xi_0} (10^{-11})^{-2/3}$$

$$= 10^{-9} \times 10^{22/3} \sim 10^{-1} > 10^{-2}$$

اگر اندازه محدود را نخواهیم دید

در سیستم سه بعدی معکوس $L \sim O(\xi_0)$ در $t = 10^{-11}$ همه اثرات

اندازه محدود وجود دارد

(12) Some Important critical Exponents

$$t = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad h = \frac{H - H_c}{H_c}$$

External magnetic field

$$C \sim |t|^{-\alpha}$$

$$\lim_{H \rightarrow 0^+} M = \langle S \rangle \propto (-t)^\beta$$

\uparrow \curvearrowright $t \rightarrow 0$

α
 β
 γ
 ν
 τ
 z

Critical Exponents

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_{H=0} \propto |t|^{-\gamma}$$

\curvearrowright $t \rightarrow 0$

$$\xi \propto |t|^{-\nu}$$

$$R = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

$$C(R) = G(R) = \langle \delta S(\vec{r}_i) \delta S(\vec{r}_i + \vec{R}) \rangle$$

$$= \frac{1}{R^{d-2+\eta}}$$

$d = \text{Dimension}$

$$\tau \propto \xi^z$$

نکته در محاسبه زمانهای بحرانی بسیار مهم است.

$$l. M \propto -t^\beta \quad \rightarrow \quad \log M = \beta \log(-t) + cts$$

$T \rightarrow T_c^+$

$$\log(-t) = -1, -2, -3, -4, -5, -6$$

$$\log(-t) = -1 \quad \rightarrow \quad T = 1.1 T_c$$

$$\log(-t) = -2 \quad \rightarrow \quad T = 1.01 T_c$$

$$\log(-t) = -6 \quad \rightarrow \quad T = 1.000001 T_c$$

Critical Slowing Down

وقتی به زمان بحرانی نزدیک می شویم، پهنای پیکر بسیار کم می شود.

$$C \propto t^{-\alpha}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^\alpha}$$



Phase Transition in Ising model

به طوری خداداد از فاز (از حالت منظم) به حالت منظم در مدل آیزنبرگ می‌کنیم

1-Dimensional Ising model.



$N = \text{number of spins}$

$$H = -J \sum_i s_i s_{i+1} - H \sum_i s_i$$

$H=0$ فرض

$T \rightarrow 0$ متعلق به مقدار J چه نظم بندید

وجود ندارد

for $T=0, H=0$

$S=0$

Order Phase

باز منظم



one-phase

$$F = U - TS$$

$$= \langle H \rangle_{\text{one-phase}}$$

one-phase

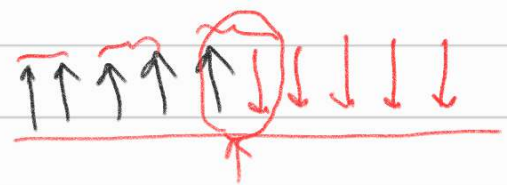
$$F = -JN$$

$T=0$

$H=0$

$$-JN \rightarrow -J(N-1) + J$$

$$F^{\text{Two-Phase}} = \langle \mathcal{H} \rangle - TS$$



$$= -J(N-1) + J - TK_B \ln N$$

Boundary Part

$$S = K_B \ln \Omega$$

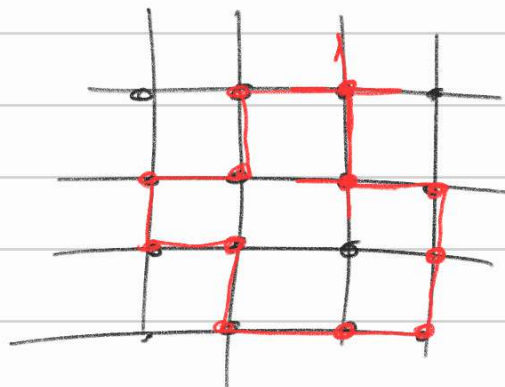
$$\Delta F = F^{\text{Two-Phase}} - F^{\text{one-phase}}$$

$$= -\cancel{JN} + 2J - K_B T \ln N - (-\cancel{JN})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta F = 2J - K_B T \ln N \rightarrow -\infty$$

در حد آنزیم بی‌نهایت، $T > 0$ فاز سیستم \rightarrow گذار فاز دیگر

2-Dimension



z, Coordinate No.

z, 4

$$\Delta F = \Delta U - TS$$

$$\Delta F = 2nJ - TK_B \ln (z-1)^n$$

تعداد اسپین در هر مرکز

$$\Delta F = 0 \rightarrow 2nJ - TK_B \ln (z-1)^n = 0$$

$$T_c = \frac{2nJ}{K_B \ln(z-1)}$$

$$T_c = \frac{2\sigma}{K_B \ln(z-1)}$$

$$T < T_c \rightarrow \Delta F > 0$$

$$T > T_c \rightarrow \Delta F < 0 \quad \text{—} \quad \text{مرز بزرگ}$$

