Chapter 11: Bessel function.

* 11.1 first kind of Bessel function, $J_\nu(x)$

تابع بسل به سادگی از مسائل فیزیکی ظاهر می‌شود. در Helmholtz یا معادله موج در سیستم مختصات استوانه‌ای منجر به بسل می‌شود. همچنین در تبدیلات انتگرالی نیز ظاهر می‌شود.

- Generating function

در این فصل و فصل بعد عموماً از ابتدا تابع مولد و سپس خواص همچون تعامد و غیره می‌پردازیم

$$g(x,t) = e^{(x/2)(t - 1/t)}$$

تابع مولد را در نظر بگیرید

از بسط Laurent برای t اگر که بنویسیم داریم

$$g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\, t^n$$

تابع بسل مرتبه صحیح

$$g(x,t) = e^{\frac{xt}{2}} \times e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^r \frac{t^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}$$ همچنین

برای یک عبارت، ما می‌خواهیم ضریب t^n را پیدا کنیم تا بتوانیم $J_n(x)$ را به دست آوریم. بدین منظور

برای یک s داده شده ضریب t^n که $r = n+s$ یا $n = r-s$ را برابر می‌گیریم

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{n+s} \frac{t^{n+s}}{(n+s)!} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^s \frac{t^{-s}}{s!}$$

پس ضریب t^n عبارت است از:

$$J_n(x) = \sum_{s=0} \frac{(-1)^s}{s!\,(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

و نهایتاً

$$g(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(x)\, t^n$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای مقادیر منفی n داریم ،

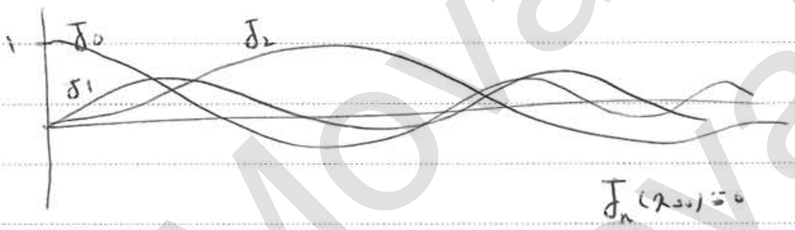
$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n}$$

به ازای تمام مقادیر $s=0,1,\dots,(n-1)$ مخرج عدد صحیح فاکتوریل منفی است پس بی نهایت است در هم سهمی در سری ندارند پس می‌توان نوشت ،

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=n} \frac{(-1)^s}{s!(s-n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-n}$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+n}}{(s+n)!\,s!}\left(\frac{x}{2}\right)^{\overbrace{2(s+n)-n}^{2s+n}} = (-1)^n J_n(x)$$

شکل زیر را ببینید



شرط $J_0(0)=1$ در بقیه $J_n(x=0)=0$

برای مقادیر نادرست n نیز می‌توان از عبارات فوق استفاده کرد

• Recurrence Relations

روابط بازگشتی :

مفهوم روابط بازگشتی یعنی ارتباط بین $J_n(x)$ با n های مختلف است. این کار را می‌توان از تابع مولد انجام داد

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x,t) = \frac{1}{2}x\left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^{\frac{x}{2}(t-1/t)}$$

$$= \sum_{n=} n J_n(x)\, t^{n-1} = \frac{1}{2}x\sum_n J_n(x)\,t^n + \frac{1}{2}x\sum J_n(x)\,t^{n-2}$$

$$\sum n J_n(x)\, t^{n-1} = \frac{1}{2}x\sum J_{n-1}\, t^{n-1} + \frac{1}{2}x\sum J_{n+1}\, t^{n-1}$$

با برابر قرار دادن ضرایب توان t^{n-1} داریم ،

$$n J_n(x) = \frac{1}{2}x J_{n-1} + \frac{1}{2}x J_{n+1}$$

$$\boxed{J_{n-1} + J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n(x)}$$

معادله بازگشتی دیگر نیز به صورت زیر است :

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) e^{\frac{x}{2}(t-1/t)} = \sum J_n'(x) t^n$$

$$\frac{1}{2}\sum J_n t^{n+1} - \frac{1}{2}\sum J_n t^{n-1} = \sum J_n'(x) t^n$$

$$\frac{1}{2} J_{n-1} - \frac{1}{2} J_{n+1} = J_n'(x) \longrightarrow \boxed{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)}$$

یک حالت خاص :

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

از دو معادله بازگشتی می‌توان نوشت :

معادله دیفرانسیل بسل

$$\boxed{J_{n-1} = \frac{n}{x} J_n + J_n'}$$

معادله بالا را در x^n ضرب کرده‌ایم .

$$x^n J_{n-1} = n x^{n-1} J_n + x^n J_n'$$

$$\boxed{x^n J_{n-1} = \frac{d}{dx}\left[x^{n} J_n\right]}$$

و یا

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left[x^{-n} J_n\right] = -x^{-n} J_{n+1}(x)}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

- Bessel's Differential Equation

فرض کنید تابع $Z_\nu(x)$ تابعی باشد که در روابط بازگشتی زیر صدق کند. خصوصاً

$$x Z'_\nu(x) = x Z_{\nu-1}(x) - \nu Z_\nu(x)$$

با مشتق گیری نسبت به x داریم:

$$x Z''_\nu(x) + (\nu+1) Z'_\nu - x Z'_{\nu-1} - Z_{\nu-1} = 0 \quad \} \times x$$

$$x Z'_\nu(x) = x Z_{\nu-1}(x) - \nu Z_\nu(x) \quad \} \times \nu$$

از هم کم کنیم

و البته از رابطه بازگشتی $x Z'_{\nu-1} = (\nu-1) Z_{\nu-1} - x Z_\nu$ استفاده کرده ایم.

$$\boxed{x^2 Z''_\nu + x Z'_\nu + (x^2 - \nu^2) Z_\nu = 0}$$

پس تا اینجا ثابت شد که $J_\nu(x)$ که شرط فقط معلوم است آن ها در تمام روابط بازگشتی صدق می کند در معادله دیفرانسیل بسل صدق می کند. به شکل کلی تر داریم

$$x \equiv k\rho$$

بدین صورت معادله دیفرانسیل بسل به صورت زیر در می آید:

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} Z_\nu(k\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} Z_\nu(k\rho) + (k^2\rho^2 - \nu^2) Z_\nu(k\rho) = 0$$

در جواب های شیفتی در سیستم مختصات استوانه ای به شکل بالا برخورد می کنیم. • $\nabla^2 \phi = 0$ در سیستم استوانه ای

در شکل دامنه فراهم برد

• صفر k ریشه mام J_ν را شماره است •

- Integral Representation

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$ تابع مولد

حال $t = e^{i\theta}$ قرار می‌دهیم

$$g(x, e^{i\theta}) = \exp\left\{ \left[e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right] \frac{x}{2} \right\}$$

$$= \exp\{ix\sin\theta\} = \sum J_n(x) \left(e^{i\theta}\right)^n$$

$$\cos(x\sin\theta) + i\sin(x\sin\theta) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\theta + 2J_4(x)\cos 4\theta + \dots$$

$$+ 2i\left\{ J_1(x)\sin\theta + J_3(x)\sin 3\theta + \dots \right\}$$

و همچنین از عبارات زیر استفاده کرده‌ایم

$$J_1(x)e^{i\theta} + J_{-1}(x)e^{-i\theta} = J_1(x)\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

$$= 2iJ_1(x)\sin\theta$$

$$J_2 e^{2i\theta} + J_{-2} e^{-2i\theta} = 2J_2(x)\cos 2\theta$$

پس

$$\cos(x\sin\theta) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\theta)$$

$$\sin(x\sin\theta) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}\sin\left((2n-1)\theta\right)$$

از خاصیت تعامد بهره می‌گیریم :

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}\delta_{nm}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

با ضرب $\cos(m\theta)$ و $\sin(m\theta)$ ، انتگرال گیری کرده داریم :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\cos n\theta \, d\theta = \begin{cases} J_n(x) & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\theta)\sin n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & n \text{ even} \\ J_n(x) & n \text{ odd} \end{cases}$$

عبارت‌های بالا را با هم جمع کنیم داریم:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\cos(x\sin\theta)\cos n\theta + \sin(x\sin\theta)\sin n\theta\right] d\theta$$

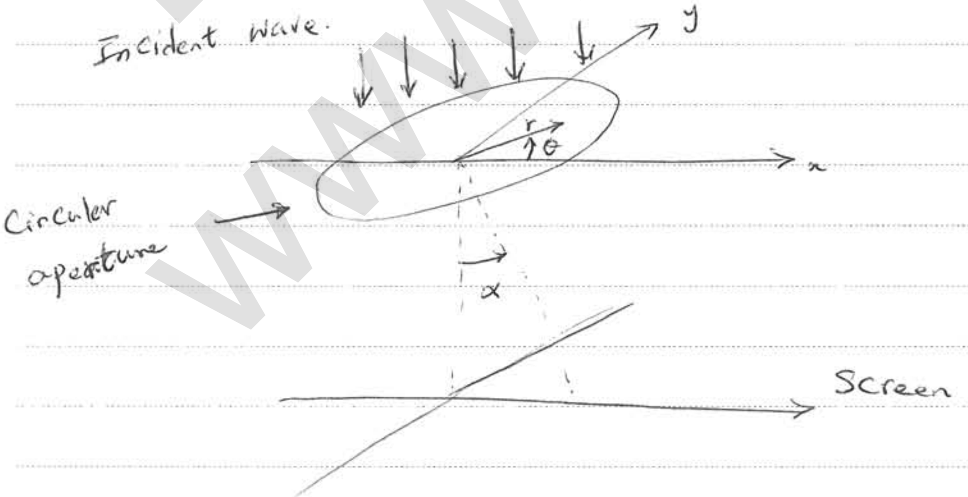
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Example. Fraunhofer Diffraction, Circular Aperture.

در تئوری پراش از یک سوراخ دایره‌ای، به انتگرال زیر خواهیم رسید.

دامنه موج

$$\Phi \sim \int_0^a r\,dr \int_0^{2\pi} e^{ibr\cos\theta}\, d\theta$$



and $b = \dfrac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha$

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\sin\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix\cos\theta}\, d\theta$$ با بهره‌گیری از تعریف

ث هندسی تحویه

$$\Phi \sim 2\pi \int_0^a J_0(br)\, r\, dr$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^n J_{n-1}(x)$$ با توجه به رابطه بازگشتی

for $n=1$ $$x J_0(x) = \frac{d}{dx}\left[x J_1\right]$$ پس

یعنی

$$\Phi \sim \frac{2\pi\, ab}{b^2} J_1(ab) \sim \frac{\lambda a}{\sin\alpha} J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\alpha\right)$$

Intensity $I \sim \Phi^2$

$$I \sim \left\{ \frac{J_1\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\alpha\right)}{\sin\alpha} \right\}^2$$

ریشه‌های I عبارتند از ریشه‌های $J_1(x)$ پس

① $\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\alpha = 3.8317$ first Zero

② $= 7.0156$ Second Zero

① $\rightarrow$ $\sin\alpha = \frac{3.8317\lambda}{2\pi a}$

for green light $\lambda = 5.5\times 10^{-5}$ Cm Hence for $a = 0.5$ Cm

$\alpha \simeq \sin\alpha = 14$ Arc Second

یعنی اولین حلقه تاریک در این زاویه مشاهده می‌شود که خیلی ناچیز است در λ بزرگ و قطر سوراخ لیا کوچک

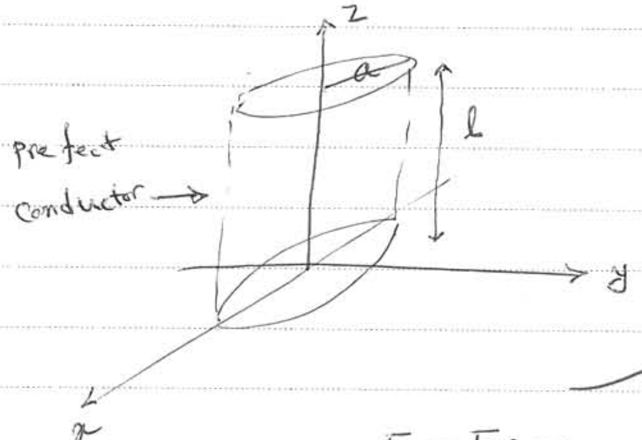
α می‌تواند بزرگ شود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

Ex 2. Cylindrical Resonant cavity

انتشار امواج الکترومغناطیسی در یک ناحیه از فضا در راستای ... از قطعات الکترونیکی می دهند
اگر انتهای این ناحیه مسدود باشد به آن کاواک گویند که در شتاب‌دهنده ذرات مورد استفاده قرار گیرد

شکل زیر را در نظر بگیرید:



چون دیواره کاواک رسانای خیلی خوبی است بنابراین مولفه های مماسی
بر سطح آن صفر است
یعنی E دقیقاً عمود است.

$$E_z = E_\varphi = 0 \quad \text{for} \quad \rho = a$$

$$E_\rho = E_\varphi = 0 \quad \text{for} \quad z = 0, l.$$

داخل کاواک خلاء وجود دارد پس $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ بخاطر عدم بار $\rho = 0$ با توجه به معادلات ماکسول $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$

$\nabla\times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$

$\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\nabla\cdot D = \rho$

$\nabla\cdot B = 0$

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \alpha^2\vec{E} \\ \vec{\nabla}\cdot E = 0 \end{cases} \qquad \alpha = \omega/c$$

رجوع شود به معادلات ماکسول - معادله

$$\nabla^2 E - \epsilon\mu\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - g\mu\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

پس

$$\nabla^2\vec{E} + \alpha^2\vec{E} = 0 \qquad \text{Helmholtz Eq.}$$

Z-component $\quad \nabla^2 E_z + \alpha^2 E_z = 0$

میدان در راستای z که برابر است با $E_z(z,\rho,\varphi)$

مولفه عمودی $\quad E_\perp = (E_\rho, E_\varphi)$

Using Separate method. $\quad E_z = v(\rho,\varphi)\,w(z)$

$$\frac{1}{w(z)}\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{1}{v}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \alpha^2\right)v(\rho,\varphi) = 0 \quad \text{پس}$$

$$\frac{-1}{w(z)}\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{v(\rho,\varphi)}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} + \alpha^2 v\right) = K^2$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

برای z حالت زیر را انتخاب می‌کنیم

$$w(z) = A\sin kz + B\cos kz$$

پس

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \gamma^2 v = 0$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 - k^2$$

برای ρ نیز $v = u(\rho)\Phi(\varphi)$ انتخاب می‌کنیم (چون جمله ترکیبی $\frac{\partial^2 v}{\partial \rho \partial \varphi}$ نداریم)

که

$$\frac{\rho^2}{u(\rho)}\left(\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho} + \gamma^2\right) = \underbrace{-\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}_{} = m^2$$

$$\left.\begin{aligned} &\Phi = e^{\pm im\varphi} \\ &\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \end{aligned}\right\}$$

یعنی

و

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{du}{d\rho} + \left(\gamma^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)u = 0$$

$$\rho \rightarrow r = \gamma\rho$$

پس

Bessel's ODE $\leftarrow$ $$\boxed{\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \left(1 - \frac{m^2}{r^2}\right)u = 0}$$

$$u \equiv J_m(r) = J_m(\gamma\rho)$$ پس

نهایتاً

$$E_z = J_m(\gamma\rho)\, e^{im\varphi}\,(A\sin kz + B\cos kz)$$

حال از شرایط مرزی استفاده می‌کنیم که $\rho = a \rightarrow E_z = 0$

پس

$$J_m(\gamma a) = 0$$

یعنی γa باید ریشه‌های J_m باشند یعنی

$\gamma = \gamma_{nm}$ ...

$$P = \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

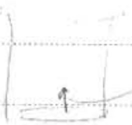
$$E_\perp = \nabla_\perp P$$

در مورد مولفه‌های عرضی یعنی (E_ρ, E_φ) نیز داریم،

$$E_\perp \sim \nabla_\perp \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad , \quad \nabla_\perp \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \rho} , \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$E_z \sim \cos kz$ and $A = 0$ در $z=0$ نباید صفر باشد.

از شرایط مرزی داریم که نهایتاً داریم



$$\left.\begin{array}{l} E_\perp \sim \sin kz \\ E_\perp(z=0, l) = 0 \end{array}\right\} \longrightarrow Kl = p\pi \quad , \; p = 0, 1, 2 \ldots$$

پس $K = \frac{p\pi}{l}$ پس

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - K^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{p^2\pi^2}{l^2}$$

$$\gamma = \gamma_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a} \longrightarrow$$ ریشه n ام J_m

$$E_z = \sum_{m,n,p} J_m(\gamma_{mn}\rho)\, e^{\pm im\varphi} B_{mnp} \cos\frac{p\pi z}{l}$$

$$\omega_{mnp} = c\sqrt{\frac{\alpha_{mn}^2}{a^2} + \frac{p^2\pi^2}{l^2}} \quad \left\{ \begin{array}{l} m = 0, 1, 2 \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \\ p = 0, 1, 2 \ldots \end{array} \right.$$

پس انتشار فقط امواجی میسر است که دارای ω گسسته باشند.

E۲ یک ذره درون یک استوانه به شعاع R و ارتفاع H که تابع موج در دیواره‌ها صفر است

انرژی‌های ذره کدام است؟

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi(\rho,\varphi,z) = E\psi(\rho,\varphi,z)$$

$$\psi = u(\rho)\,\Phi(\varphi)\,v(z)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{\rho\,\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]$$

$$\frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\frac{2EM}{\hbar^2} - \frac{1}{u\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho} - \frac{\partial^2 u}{u\,\partial\rho^2} - \frac{1}{\Phi u v}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} \overset{\text{ثابت}}{=} -m^2$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + m^2 v = 0 \longrightarrow v \sim e^{imz}$$

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = -k^2 \longrightarrow \Phi \sim e^{ik\varphi}$$

دیفرانسیل بسل

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} + \rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + (\underbrace{\gamma^2}_{\frac{2ME}{\hbar^2}-m^2}\rho^2 - k^2)u = 0$$

حل

$$\psi(\rho,z,\varphi) = \sum_{n,m} J_m(\gamma_{mn}\rho)\, e^{ik\varphi}\,(a_{mn}\sin mz + b_{mn}\cos mz)$$

شرایط مرزی ψ در دیواره‌ها صفر است

$$\psi\big|_{z=0} = 0 \qquad \psi\big|_{z=H} = 0 \longrightarrow \begin{cases} b_{mn} = 0 \\ a_{mn} = 1, \quad m = \dfrac{n\pi}{H} \end{cases}$$

$$\psi\big|_{\rho=a} = 0 \longrightarrow \gamma_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}$$

n امین ریشه J_m

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\frac{2ME}{\hbar^2} - m^2 = \gamma^2 \longrightarrow E = \frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right)^2 \right]$$

$$\begin{cases} E_{\mu,n} = \frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\left(\frac{\pi}{H}\right)^2 + \left(\frac{2.405}{a}\right)^2 \right] \\ \text{for } n=1, \ m=0 \end{cases}$$

PAPCO

Subject :
Year . Month . Date . ( )

11.2 Orthogonality.

معادله بسل را در نظر بگیرید:

$$x^2 Z_\nu'' + x Z_\nu' + (x^2-\nu^2) Z_\nu = 0$$

$$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} Z_\nu(k\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} Z_\nu(k\rho) + (k^2\rho^2-\nu^2) Z_\nu(k\rho) = 0$$

اگر بر ρ تقسیم کنیم پس self-adjoint می‌شود. با توجه به شرایط مرزی $[0,a]$ پس

$$Z_\nu \longrightarrow J_\nu\left(\alpha_{\nu m} \rho/a\right)$$

در صورتی که تابع در $\rho = a$ صفر شود

$\alpha_{\nu m}$ ریشه mام بسل $J_\nu(\alpha_{\nu m})$

$\nu = 1, 2, \dots$ که در آن J_0 ... $\rho = 0$ صفر باشد

با این تعاریف داریم:

$$(A)\quad \rho \frac{d^2}{d\rho^2} J_\nu\left(\alpha_{\nu n} \rho/a\right) + \frac{d}{d\rho} J_\nu\left(\alpha_{\nu n} \rho/a\right) + \left(\frac{\alpha_{\nu n}^2 \rho}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu n}\rho/a\right) = 0$$

$$(B)\quad \rho \frac{d^2}{d\rho^2} J_\nu\left(\alpha_{\nu m} \rho/a\right) + \frac{d}{d\rho} J_\nu\left(\alpha_{\nu m} \rho/a\right) + \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2 \rho}{a^2} - \frac{\nu^2}{\rho}\right) J_\nu\left(\alpha_{\nu m}\rho/a\right) = 0$$

Now

$$-(A) \times J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a) + (B) \times J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a) = 0$$

So

$$\int_0^a d\rho\, J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a) \frac{d}{d\rho}\left[\rho \frac{d}{d\rho} J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\right] - J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d}{d\rho} J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\right]$$

$$= \frac{\alpha_{\nu n}^2 - \alpha_{\nu m}^2}{a^2} \int_0^a \rho\, J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\, J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\, d\rho$$

Integrating By-Part of left hand side.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\rho J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\, J_\nu'(\alpha_{\nu m}\rho/a)\Big|_0^a - \rho J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\, J_\nu'(\alpha_{\nu n}\rho/a)\Big|_0^a$$

$= $ Right side

for $n \neq m$

$$\int_0^a \rho\, J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\, J_\nu(\alpha_{\nu n}\rho/a)\, d\rho = 0$$

Orthogonality

Normalization

Indeed we are going to find

for $m=n$

$$\int_0^a \rho\, J_\nu^2(\alpha_{\nu m}\rho/a)\, d\rho = ?$$

to This end

از معادله بسل داریم

$$\rho^2 J_\nu''\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}\rho\right) + \rho J_\nu'(\alpha_{\nu m}\rho/a) + \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2}\rho^2 - \nu^2\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}\rho\right) = 0$$

طرفین معادله را در $J_\nu'\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}\rho\right)$ ضرب کرده و انتگرال را اضافه می‌کنیم

$$\int_0^a d\rho \left\{ \rho J_\nu'^2\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}\rho\right) + \rho^2 J_\nu''\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}\rho\right) J_\nu'\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}\rho\right) + \rho J_\nu'^2(\alpha_{\nu m}\rho/a) + \left(\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2}\rho^2 - \nu^2\right) J_\nu\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}\rho\right) J_\nu'(\;) \right\}$$

$$= \int_0^a \frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{\rho^2}{2} J_\nu'^2\left(\frac{\alpha_{\nu m}}{a}\rho\right) + \frac{\rho^2}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\frac{\alpha_{\nu m}^2}{a^2}\rho^2}\right) J_\nu^2(\alpha_{\nu m}\rho/a) \right\}$$

$$= \frac{a^2}{2} J_\nu'^2(\alpha_{\nu m}) + \frac{a^2}{2}\left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha_{\nu m}^2}\right) J_\nu^2(\alpha_{\nu m})$$

چون $\alpha_{\nu m}$ ریشه ... بسل داریم

پس

$$\int_0^a \rho J_\nu^2(\alpha_{\nu m}\rho/a)\,d\rho = \frac{a^2}{2} J_\nu'^2(\alpha_{\nu m})$$

از رابطه بازگشتی

$$J_\nu'(x) = \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu+1}(x)$$

استفاده کرده ایم

$$\int_0^a \rho J_\nu^2(\alpha_{\nu m}\rho/a)\,d\rho = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu m})$$

Bessel Series.

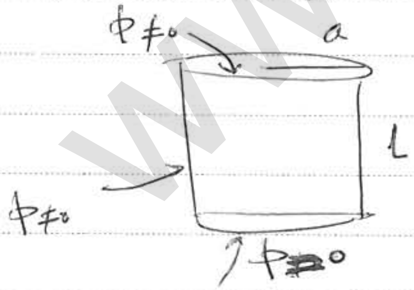
$J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)$ is a complete set

fixed ν

$$f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{\nu m} J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a) \qquad 0 \leq \rho \leq a$$

$$C_{\nu m} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(\alpha_{\nu m})}\int_0^a f(\rho) J_\nu(\alpha_{\nu m}\rho/a)\,\rho\,d\rho$$

Ex: Electrostatic Potential in a Hallow Cylinder



پتانسیل الکتروستاتیکی در استوانه توخالی

$$\psi_{km}(\rho,\varphi,z) = P_{km}(\rho)\Phi_m(\varphi)Z_k(z)$$

$$\psi(\rho,\varphi,z) = \sum_{k,m} \psi_{km}(\rho,\varphi,z)$$