

تمرین‌های سری هشتم مکانیک آماری پیشرفته

تمرین‌های این سری، از فصل ششم کتاب Pathria شماره‌های: ۱، ۲، ۴، ۷، ۱۳ انتخاب شده‌اند.

۱. نشان دهید که انتروپی یک گاز کامل در تعادل گرمایی با در حالت بوزونی با این رابطه داده می‌شود:

$$S = k \sum_{\epsilon} [\langle n_{\epsilon} + 1 \rangle \ln \langle n_{\epsilon} + 1 \rangle - \langle n_{\epsilon} \rangle \ln \langle n_{\epsilon} \rangle]$$

و در حالت فرمیونی:

$$S = k \sum_{\epsilon} [-\langle 1 - n_{\epsilon} \rangle \ln \langle 1 - n_{\epsilon} \rangle - \langle n_{\epsilon} \rangle \ln \langle n_{\epsilon} \rangle]$$

نشان دهید که این نتایج با فرمول زیر سازگار هستند:

$$S = -k \sum_{\epsilon} \left\{ \sum_n p_{\epsilon}(n) \ln p_{\epsilon}(n) \right\}$$

که $p_{\epsilon}(n)$ احتمال این هست که دقیقاً n ذره در حالت انرژی ϵ قرار داشته باشند.

۲. برای هر سه آمار، عبارت‌های مربوط به کمیت $\langle n_{\epsilon}^2 \rangle - \langle n_{\epsilon} \rangle^2$ را از احتمال‌های مربوط به هر آمار $p_{\epsilon}(n)$ بدست آورید. به طور کلی نشان دهید:

$$\langle n_{\epsilon}^2 \rangle - \langle n_{\epsilon} \rangle^2 = kT \left(\frac{\partial \langle n_{\epsilon} \rangle}{\partial \mu} \right)_T$$

این را با نتیجه متناظر، (۴.۵.۳) برای یک سیستم که در آنسامبل کانونی بزرگ جاسازی شده مقایسه کنید.

۳. انرژی پتانسیل یک سیستم از ذرات باردار، که بار هر ذره e و چگالی تعداد $n(\mathbf{r})$ است، با رابطه زیر داده می‌شود

$$U = \frac{e^2}{2} \int \frac{n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}d\mathbf{r}' + e \int n(\mathbf{r})\phi_{ext}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$$

که $\phi_{ext}(\mathbf{r})$ پتانسیل یک میدان الکتریکی خارجی است. فرض کنید که انتروپی سیستم، به جز یک ثابت که جمع می‌شود، با رابطه زیر داده می‌شود:

$$S = -k \int n(\mathbf{r}) \ln n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

با استفاده از این عبارتها، معادلات تعادلی که با چگالی تعداد $n(\mathbf{r})$ و پتانسیل کل $\phi(\mathbf{r})$ ارضا شوند را بدست آورید. پتانسیل کل به این شکل است

$$\phi_{ext}(\mathbf{r}) + e \int \frac{n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'$$

۴. از طریق یک پنجره‌ی کوچک در دیواره یک کوره، که محتوی گازی با دمای خیلی زیاد T است، خطوطی طیفی منتشر شده توسط مولکول‌های گاز مشاهده می‌شود. به دلیل حرکت مولکول‌های گاز، هر خط طیفی بهین‌شدگی دوپلر از خود نشان می‌دهد. نشان دهید تغییر در شدت نسبی $I(\lambda)$ با طول موج λ در یک خط طیفی با این رابطه داده می‌شود

$$I(\lambda) \propto \exp\left\{-\frac{mc^2(\lambda - \lambda_0)^2}{2\lambda_0^2 kT}\right\}$$

که m جرم هر مولکول، c سرعت نور و λ_0 طول موج متوسط هر خط طیفی است.

۵. پخش مولکول‌های یک گاز ماکسولی از طریق یک دریچه به مساحت a در دیواره‌ی یک ظرف به حجم V را در نظر بگیرید.

الف نشان دهید که در حالی که مولکول‌های درون ظرف انرژی متوسط $\frac{3}{2}kT$ دارند، مولکول‌های پخش شده به بیرون انرژی متوسط $\frac{1}{2}kT$ دارند، T دمای تعادل شبه ایستای گاز است.

ب فرض کنید پخش آن قدر کند انجام می‌شود که گاز داخل محفظه همواره در یک حالت تعادل شبه ایستا است، رفتاری را معین کنید که چگالی، دما و فشار گاز با زمان تغییر می‌کند.