تمرین‌های سری ششمِ مکانیک آماری پیشرفته

تمرین‌های این سری، از فصلِ چهارمِ کتاب Pathria شماره‌های: ۱، ۳، ۷، ۱۳ انتخاب شده‌اند.

۱. نشان دهید انتروپیِ یک سیستم در آنسامبل گراند کانونیک می‌تواند به این صورت نوشته شود

$$S = -k\Sigma_{r,s} P_{r,s} ln P_{r,s}$$

که $P_{r,s}$ با معادله ۴.۱.۹ داده می‌شود.

---

۲. یک لوله با حجمِ $V^{(0)}$ شاملِ $N^{(0)}$ مولکول در نظر بگیرید. فرض کنید که اصلاً هیچ همبستگی بینِ مکانِ مولکول‌های مختلف وجود ندارد، احتمال این‌که ناحیه‌ای با حجمِ V (در هر جایی از لوله می‌تواند باشد) دقیقاً شاملِ N مولکول باشد.

الف نشان دهید $\bar{N} = N^{(0)}p$ و $(\Delta N)_{r.m.s} = [N^{(0)}p(1-p)]^{1/2}$ که $p = V/V^{(0)}$ است.

ب نشان دهید اگر هر دوی $N^{(0)}p^{(0)}$ و $N(1-p)$ اعداد بزرگی باشند، تابع $p(N,V)$ گاوسی است.

ج به علاوه، اگر $p \ll 1$ و $N \gg N^{(0)}$ نشان دهید که تابعِ $p(N,V)$ شکل توزیعِ پواسون دارد:

$$p(N) = e^{-\bar{N}} \frac{(\bar{N})^N}{N!}$$

---

۳. یک سیستم کلاسیک از مولکول‌های دو اتمی، و بدون بر همکنش در نظر بگیرید که در یک جعبه با حجم V و دمای T محصور شده است. هامیلتونیِ یک مولکولِ مجزا به این صورت داده می‌شود

$$H(r_1, r_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}K|r_1 - r_2|^2$$

ترمودینامیکِ این سیستم را شاملِ وابستگیِ کمیتِ $\langle r_{12}^2 \rangle$ به T را مطالعه کنید.

---

۴. کمیتِ J به این صورت تعریف می‌شود

$$J = E - N\mu = TS - PV$$

نشان دهید برای یک سیستم در آنسامبل گراند کانونیک:

$$\overline{(\Delta J)^2} = kT^2 C_V + \{(\frac{\partial U}{\partial N})_{T,V} - \mu\}^2 \overline{(\Delta N)^2}$$