تمرین‌های سری دومِ مکانیک آماری پیشرفته

تمرین‌های فصل اول از کتابِ Pathria شماره‌های: ۱،۳،۵،۷،۹،۱۲،۱۵،۱۶

۱- الف برای دو سیستم بزرگ که در تماسِ گرمایی با یکدیگرند، نشان دهید که تعداد $\Omega^{(0)}(E^{(0)}, E_1)$ که در بخشِ ۱.۲ ذکر شد، می‌تواند بر حسب متغیرِ E_1 به شکل گاوسی نوشته شود. انحراف از معیارِ E_1 از مقدارِ متوسط $\bar{E}_1$ را بر حسب دیگر کمیت‌های مربوط به مسأله بدست آورید.

۱-ب یک محاسبه مستقیم برای انحراف از معیارِ E_1 در حالتی که سیستم‌های A_1 و A_2 گازهای ایده‌آلِ کلاسیک باشند، انجام دهید.

۲ دو سیستمِ A و B از ذراتِ یکسان اجازه دارند با هم انرژی و ذره تبادل کنند در حالی‌که حجم‌هایشان، V_A و V_B ثابت می‌مانند. نشان دهید کم‌ترین مقدارِ کمیتِ (dE_A/dN_A) با این رابطه داده می‌شود:

$$\frac{\mu_A T_B - \mu_B T_A}{T_B - T_A}$$

۳ پیوستِ A را بخوانید و روابطِ (۱.۴.۱۵) و (۱.۴.۱۶) را اثبات نمایید. برایِ یک مولکولِ اکسیژن که در یک مکعب به طولِ یالِ $10cm$ محصور شده، اهمیتِ جمله‌ی خطی را در این روابط نسبت به جمله اصلیِ $(\pi/6)\epsilon^{*3/2}$ تخمین بزنید. فرض کنید: $\epsilon = 0/05eV$.

۴ مکانیکِ آماری را برای یک گازِ بی‌نهایت نسبیتی که با حالت‌های انرژیِ تک ذره زیر به جای معادله (۱.۴.۵) مشخص می‌شود مطالعه کنید.

$$\epsilon(n_x, n_y, n_z) = \frac{hc}{2L}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$$

نشان دهید نسبتِ C_P/C_V در این حالت به جایِ ۵/۳ هست ۴/۳.

۵ با استفاده از این واقعیت که انتروپی $S(N, V, E)$ برای یک سیستمِ ترمودینامیکی یک کمیتِ فزون‌فر[1] است، نشان دهید:

$$N(\frac{\partial S}{\partial N})_{V,E} + V(\frac{\partial S}{\partial V})_{N,E} + E(\frac{\partial S}{\partial E})_{N,V} = S$$

توجه داشته باشید که این نتیجه بدین معناست که : $(-N\mu + PV + E)/T = S$ به عبارت دیگر $N\mu = E + PV' - TS$.

۶ نشان دهید که عبارت‌های مختلف برای انتروپیِ مخلوط، که در بخشِ ۱.۵ بدست آمد، در روابطِ زیر صدق می‌کنند:

الف برای تمامیِ N_1, V_1, N_2 و V_2

$$(\Delta S)_{1\equiv 2} = (\Delta S) - (\Delta S)^* \geq 0$$

حالت تساوی تنها وقتی است که $N_1/V_1 = N_2/V_2$

ب برای یک مقدار داده شده از $N_1 + N_2$

$$(\Delta S)^* \leq (N_1 + N_2)kln2$$

حالت تساوی فقط برای $N_1 = N_2$ صادق است.

---

[1] Extensive

۷ ما قبلاً دیدیم که رابط $P-V$ در طی یک فرآیند بی درروی برگشت‌پذیر در یک گاز ایده‌آل با توانِ γ پوشش داده می‌شود، به طوری‌که:

$$PV^{\gamma} = const.$$

یک مخلوط از دو گاز ایده‌آل در نظر بگیرید، با نسبت‌های مولیِ $f_۱$ و $f_۲$ و توان‌هایِ $\gamma_۱$و $\gamma_۲$. نشان دهید که توانِ γ موثر برای مخلوط با این رابطه داده می‌شود

$$\frac{۱}{\gamma - ۱} = \frac{f_۱}{\gamma_۱ - ۱} + \frac{f_۲}{\gamma_۲ - ۱}$$

۸ رابطه زیر را به صورت ترمودینامیکی اثبات کنید:

$$V(\frac{\partial P}{\partial T})_{\mu} = S \quad and \quad V(\frac{\partial P}{\partial \mu})_{T} = N$$

فشار P یک گاز کامل را بر حسبِ متغیرهایِ μو T بیان کنید و صحت فرمول بالا را تحقیق نمایید.