درآمدی بر سری‌های زمانی

موسوی ندوشنی

دانشگاه شهید بهشتی

sa_mousavi@sbu.ac.ir

www.pwut.ac.ir/fa/staff/s_mousavi

۶ مهر ۱۳۹۵

فهرست مطالب

۱ تعاریف

سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات x_t است که در زمان مشخص t ثبت شده باشد.

- سری زمانی $\{X_t, \, t \in \tau\}$ مشخص می‌شود که در آن τ مجموعه‌ی اندیس‌های زمان است.
- اگر τ پیوسته باشد، سری زمانی پیوسته است.
- اگر τ گسسته باشد، سری زمانی گسسته است و $\tau \in \mathbb{Z}$ می‌باشد. در این درس به سری‌های زمانی گسسته پرداخته می‌شود.

۱ تعاریف

سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات x_t است که در زمان مشخص t ثبت شده باشد.

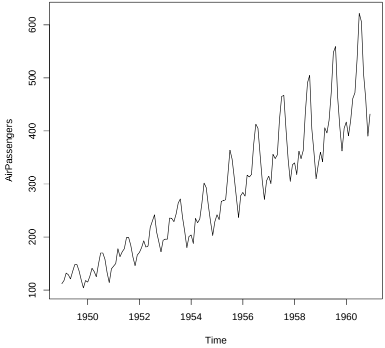
- سری زمانی $\{X_t,\, t \in \tau\}$ مشخص می‌شود که در آن τ مجموعه‌ی اندیس‌های زمان است.
- اگر τ پیوسته باشد، سری زمانی پیوسته است.
- اگر τ گسسته باشد، سری زمانی گسسته است و $\tau \in \mathbb{Z}$ می‌باشد. در این درس به سری‌های زمانی گسسته پرداخته می‌شود.
- برای سهولت بیشتر، مجموعه‌ی اندیس‌ها تکرار نمی‌گردد و فقط به $\{X_t\}$ بسنده می‌شود. مجموعه مقادیر محقق (مشاهده) شده با $\{x_t\}$ و یا $\{x_1, x_2, \dots\}$ نشان داده می‌شود.
- در عمل، از فاصله زمانی مثل روز، هفته، ماه و سال استفاده می‌شود.

۱.۱ مثال یک سری زمانی

```
> AirPassengers

     Jan Feb Mar Apr May Jun Jul Aug Sep Oct Nov Dec
1949 112 118 132 129 121 135 148 148 136 119 104 118
1950 115 126 141 135 125 149 170 170 158 133 114 140
1951 145 150 178 163 172 178 199 199 184 162 146 166

> plot(AirPassengers)
```



۲.۱ اجزاء کلاسیک یک سری زمانی

یک سری زمانی می‌تواند شامل مولفه‌های مختلفی باشد. مولفه‌ها به‌صورت زیر هستند.

$$X_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

۲.۱ اجزاء کلاسیک یک سری زمانی

یک سری زمانی می‌تواند شامل مولفه‌های مختلفی باشد. مولفه‌ها به‌صورت زیر هستند.

$$X_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

که در آن:
T_t: مولفه روند و یا تغییرات بلند میزان میانگین

۲.۱ اجزاء کلاسیک یک سری زمانی

یک سری زمانی می‌تواند شامل مولفه‌های مختلفی باشد. مولفه‌ها به‌صورت زیر هستند.

$$X_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

که در آن:

T_t: مولفه روند و یا تغییرات بلند میزان میانگین

S_t: مولفه تغییرات فصلی و یا تغییرات دوره‌ای تقویمی

۲.۱ اجزاء کلاسیک یک سری زمانی

یک سری زمانی می‌تواند شامل مولفه‌های مختلفی باشد. مولفه‌ها به‌صورت زیر هستند.

$$X_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

که در آن:
T_t: مولفه روند و یا تغییرات بلند میزان میانگین
S_t: مولفه تغییرات فصلی و یا تغییرات دوره‌ای تقویمی
C_t: مولفه تغییرات دوره‌ای در یک پریود بسیار طولانی

۲.۱ اجزاء کلاسیک یک سری زمانی

یک سری زمانی می‌تواند شامل مولفه‌های مختلفی باشد. مولفه‌ها به‌صورت زیر هستند.

$$X_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

که در آن:
T_t: مولفه روند و یا تغییرات بلند میزان میانگین
S_t: مولفه تغییرات فصلی و یا تغییرات دوره‌ای تقویمی
C_t: مولفه تغییرات دوره‌ای در یک پریود بسیار طولانی
E_t: مولفه باقیمانده تصادفی و یا تغییرات تبین نشده

۲.۱ اجزاء کلاسیک یک سری زمانی

یک سری زمانی می‌تواند شامل مولفه‌های مختلفی باشد. مولفه‌ها به‌صورت زیر هستند.

$$X_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

که در آن:

T_t: مولفه روند و یا تغییرات بلند میزان میانگین

S_t: مولفه تغییرات فصلی و یا تغییرات دوره‌ای تقویمی

C_t: مولفه تغییرات دوره‌ای در یک پریود بسیار طولانی

E_t: مولفه باقیمانده تصادفی و یا تغییرات تبین نشده

سری زمانی را رسم کنید تا بتوان موارد زیر را بررسی نمود.

۲.۱ اجزاء کلاسیک یک سری زمانی

یک سری زمانی می‌تواند شامل مولفه‌های مختلفی باشد. مولفه‌ها به‌صورت زیر هستند.

$$X_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

که در آن:
T_t: مولفه روند و یا تغییرات بلند میزان میانگین
S_t: مولفه تغییرات فصلی و یا تغییرات دوره‌ای تقویمی
C_t: مولفه تغییرات دوره‌ای در یک پریود بسیار طولانی
E_t: مولفه باقیمانده تصادفی و یا تغییرات تبین نشده
سری زمانی را رسم کنید تا بتوان موارد زیر را بررسی نمود.

- آیا گرایش وجود دارد؟ آیا تغییرات فصلی وجود دارد؟

۲.۱ اجزاء کلاسیک یک سری زمانی

یک سری زمانی می‌تواند شامل مولفه‌های مختلفی باشد. مولفه‌ها به‌صورت زیر هستند.

$$X_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

که در آن:
T_t: مولفه روند و یا تغییرات بلند میزان میانگین
S_t: مولفه تغییرات فصلی و یا تغییرات دوره‌ای تقویمی
C_t: مولفه تغییرات دوره‌ای در یک پریود بسیار طولانی
E_t: مولفه باقیمانده تصادفی و یا تغییرات تبین نشده
سری زمانی را رسم کنید تا بتوان موارد زیر را بررسی نمود.

- آیا گرایش وجود دارد؟ آیا تغییرات فصلی وجود دارد؟
- آیا تغییرات سری تابع زمان است؟

۲.۱ اجزاء کلاسیک یک سری زمانی

یک سری زمانی می‌تواند شامل مولفه‌های مختلفی باشد. مولفه‌ها به‌صورت زیر هستند.

$$X_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

که در آن:
T_t: مولفه روند و یا تغییرات بلند میزان میانگین
S_t: مولفه تغییرات فصلی و یا تغییرات دوره‌ای تقویمی
C_t: مولفه تغییرات دوره‌ای در یک پریود بسیار طولانی
E_t: مولفه باقیمانده تصادفی و یا تغییرات تبین نشده
سری زمانی را رسم کنید تا بتوان موارد زیر را بررسی نمود.

- آیا گرایش وجود دارد؟ آیا تغییرات فصلی وجود دارد؟
- آیا تغییرات سری تابع زمان است؟
- آیا تغییرات ناگهانی در سری ملاحظه می‌شود؟

۲.۱ اجزاء کلاسیک یک سری زمانی

یک سری زمانی می‌تواند شامل مولفه‌های مختلفی باشد. مولفه‌ها به‌صورت زیر هستند.

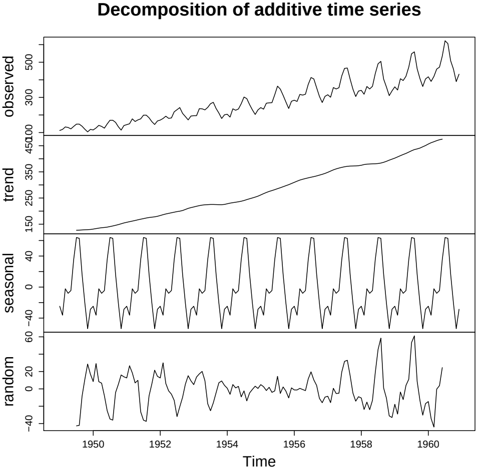
$$X_t = T_t + S_t + C_t + E_t$$

که در آن:
T_t: مولفه روند و یا تغییرات بلند میزان میانگین
S_t: مولفه تغییرات فصلی و یا تغییرات دوره‌ای تقویمی
C_t: مولفه تغییرات دوره‌ای در یک پریود بسیار طولانی
E_t: مولفه باقیمانده تصادفی و یا تغییرات تبین نشده
سری زمانی را رسم کنید تا بتوان موارد زیر را بررسی نمود.

- آیا گرایش وجود دارد؟ آیا تغییرات فصلی وجود دارد؟
- آیا تغییرات سری تابع زمان است؟
- آیا تغییرات ناگهانی در سری ملاحظه می‌شود؟
- آیا داده‌های پرت در سری مشاهده می‌شود؟

۳.۱ تجزیه سری زمانی به مولفه‌های آن

```
> data(AirPassengers)
> AP <- AirPassengers
> par(mar=c(3,4,1,1), ps=15)
> AP.decom <- decompose(AP)
> plot(AP.decom)
```



۴.۱ تبدیل داده‌ها به‌صورت سری زمانی ماهانه

```
> link <- "C:\\Said\\R_files\\data\\debit.txt"
> my.data <- scan(link)
> my.ts <- ts(my.data, start=c(1970, 1), frequency=12)
> plot(decompose(my.ts))
```

ملاحظاتی راجع به کُد بالا:

۴.۱ تبدیل داده‌ها به‌صورت سری زمانی ماهانه

```
> link <- "C:\\Said\\R_files\\data\\debit.txt"
> my.data <- scan(link)
> my.ts <- ts(my.data, start=c(1970, 1), frequency=12)
> plot(decompose(my.ts))
```

ملاحظاتی راجع به کُد بالا:

- فایل اولیه داده‌های ماهانه به‌صورت جدول است.

۴.۱ تبدیل داده‌ها به‌صورت سری زمانی ماهانه

```
> link <- "C:\\Said\\R_files\\data\\debit.txt"
> my.data <- scan(link)
> my.ts <- ts(my.data, start=c(1970, 1), frequency=12)
> plot(decompose(my.ts))
```

ملاحظاتی راجع به کُد بالا:

- فایل اولیه داده‌های ماهانه به‌صورت جدول است.
- آنها با دستور scan() خوانده می‌شود. در این حالت داده‌های ماهانه به‌صورت ستونی پشت سر هم قرار می‌گیرد.

۴.۱ تبدیل داده‌ها به‌صورت سری زمانی ماهانه

```
> link <- "C:\\Said\\R_files\\data\\debit.txt"
> my.data <- scan(link)
> my.ts <- ts(my.data, start=c(1970, 1), frequency=12)
> plot(decompose(my.ts))
```

ملاحظاتی راجع به کُد بالا:

- فایل اولیه داده‌های ماهانه به‌صورت جدول است.
- آنها با دستور scan() خوانده می‌شود. در این حالت داده‌های ماهانه به‌صورت ستونی پشت سر هم قرار می‌گیرد.
- با تابع ts() داده‌های خوانده شده با دوره تناوب ۱۲، به سری زمانی ماهانه تبدیل می‌شود.

۴.۱ تبدیل داده‌ها به‌صورت سری زمانی ماهانه

```
> link <- "C:\\Said\\R_files\\data\\debit.txt"
> my.data <- scan(link)
> my.ts <- ts(my.data, start=c(1970, 1), frequency=12)
> plot(decompose(my.ts))
```

ملاحظاتی راجع به کُد بالا:

- فایل اولیه داده‌های ماهانه به‌صورت جدول است.
- آنها با دستور scan() خوانده می‌شود. در این حالت داده‌های ماهانه به‌صورت ستونی پشت سر هم قرار می‌گیرد.
- با تابع ts() داده‌های خوانده شده با دوره تناوب ۱۲، به سری زمانی ماهانه تبدیل می‌شود.
- پس از طی مراحل بالا، می‌توان توابع سری زمانی از جمله تابع decompose() را برای داده‌ها، به‌کار بست.

۲ سری‌های زمانی تصادفی

مدل سری زمانی برای داده‌های مشاهده شده $\{x_t\}$ یک تابع چگالی احتمال توام است.
تابع $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بیان‌کننده آرایه $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ است. خواص مدل IID[۱] به شرح زیر است.

- روندی ندارد.

[۱] Identical Independent Distribution

۲ سری‌های زمانی تصادفی

مدل سری زمانی برای داده‌های مشاهده شده $\{x_t\}$ یک تابع چگالی احتمال توام است.
تابع $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بیان‌کننده آرایه $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ است. خواص مدل IID[۱] به شرح زیر است.

- روندی ندارد.
- عدم تغییرات فصلی

[۱] Identical Independent Distribution

۲ سری‌های زمانی تصادفی

مدل سری زمانی برای داده‌های مشاهده شده $\{x_t\}$ یک تابع چگالی احتمال توام است.
تابع $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بیان‌کننده آرایه $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ است. خواص مدل IID[۱] به شرح زیر است.

- روندی ندارد.
- عدم تغییرات فصلی
- مشاهدات مستقل و از یک توزیع یکسان پیروی می‌کنند.

[۱] Identical Independent Distribution

۲ سری‌های زمانی تصادفی

مدل سری زمانی برای داده‌های مشاهده شده $\{x_t\}$ یک تابع چگالی احتمال توام است.
تابع $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ بیان‌کننده آرایه $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ است. خواص مدل IID[1] به شرح زیر است.

- روندی ندارد.
- عدم تغییرات فصلی
- مشاهدات مستقل و از یک توزیع یکسان پیروی می‌کنند.
- توزیع احتمال توام به‌صورت زیر است.

[1] Identical Independent Distribution

۲ سری‌های زمانی تصادفی

مدل سری زمانی برای داده‌های مشاهده شده $\{x_t\}$ یک تابع چگالی احتمال توام است.
تابع $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ بیان‌کننده آرایه $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ است. خواص مدل IID[۱] به شرح زیر است.

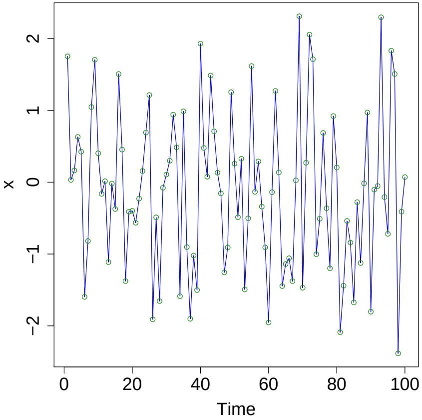
- روندی ندارد.
- عدم تغییرات فصلی
- مشاهدات مستقل و از یک توزیع یکسان پیروی می‌کنند.
- توزیع احتمال توام به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= F(x_1) \times F(x_2) \times \cdots \times F(x_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} F(x_i) \end{aligned}$$

[۱] Identical Independent Distribution

۱.۲ شکل یک سری مستقل با توزیع یکسان

```
> x <- rnorm(100) # iid N(0,1) random variables.
> par(mar=c(4,4,2,2), ps=20)
> plot.ts(x, col="blue")
> points(x, col="forestgreen")
```



۳ فرآیند گام‌زدن تصادفی

سری $\{X_t\}$ یک سری iid است. ذره‌ای به‌طور تصادفی روی یک خط، با احتمالات زیر به چپ و راست گام بر می‌دارد. روابط به‌صورت زیر است.

۳ فرآیند گام‌زدن تصادفی

سری $\{X_t\}$ یک سری iid است. ذره‌ای به‌طور تصادفی روی یک خط، با احتمالات زیر به چپ و راست گام بر می‌دارد. روابط به‌صورت زیر است.

$$\Pr[X = 1] = \frac{1}{2}, \quad \Pr[X_t = -1] = \frac{1}{2}$$

۳ فرآیند گام‌زدن تصادفی

سری $\{X_t\}$ یک سری iid است. ذره‌ای به‌طور تصادفی روی یک خط، با احتمالات زیر به چپ و راست گام بر می‌دارد. روابط به‌صورت زیر است.

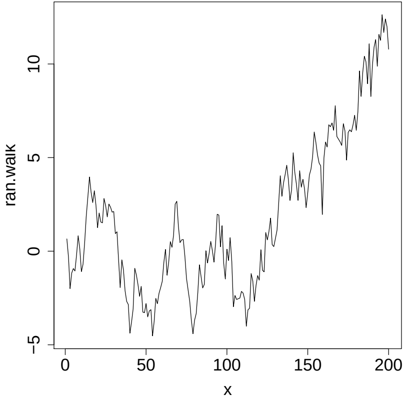
$$\Pr[X=1]=\frac{1}{2}, \quad \Pr[X_t=-1]=\frac{1}{2}$$

اکنون فرآیند گام‌زدن تصادفی به‌صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $\{S_t,\ t=0,1,2,\dots\}$ که در آن $S_0=0$ است و

$$S_t=X_1+X_2+\cdots+X_t \quad t=1,2,\dots$$

۱.۳ نمودار گام‌زدن تصادفی

```
> n <- 200
> x <- 1:n
> ran.walk <- cumsum(rnorm(n))
> par(mar=c(4,4,2,2), ps=20)
> plot(x,ran.walk, typ="l")
```



۴ برآورد تابع خودهمبستگی

در حالتی که متغیرهای X, Y موجود باشد، ضریب همبستگی بین آنها به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{[\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2]}}$$

۴ برآورد تابع خودهمبستگی

در حالتی که متغیرهای X, Y موجود باشد، ضریب همبستگی بین آنها به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{[\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2]}}$$

در بسیاری از سری‌های زمانی اندازه‌گیری‌های متوالی مستقل نیستند و وابسته می‌باشند. نظر به این که تنها یک متغیر داریم به آن خودهمبستگی گویند. تابع خودهمبستگی با تاخیر زمانی یک را به شرح زیر ملاحظه می‌کنید. ابتدا زوج‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$(X_1, X_2),\ (X_2, X_3),\ \ldots,\ (X_{n-1}, X_n)$$

آنگاه نتیجه می‌شود که

$$r_1 = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n-1} \left(x_t - \bar{x}_{(1)}\right)\left(x_{t+1} - \bar{x}_{(2)}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n-1} \left(x_t - \bar{x}_{(1)}\right)^2 \sum\limits_{t=1}^{n-1} \left(x_{t+1} - \bar{x}_{(2)}\right)^2}}$$

که در آن:

۴ برآورد تابع خودهمبستگی

در حالتی که متغیرهای X, Y موجود باشد، ضریب همبستگی بین آنها به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{[\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2]}}$$

در بسیاری از سری‌های زمانی اندازه‌گیری‌های متوالی مستقل نیستند و وابسته می‌باشند. نظر به این که تنها یک متغیر داریم به آن خودهمبستگی گویند. تابع خودهمبستگی با تاخیر زمانی یک را به شرح زیر ملاحظه می‌کنید. ابتدا زوج‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$(X_1, X_2),\ (X_2, X_3),\ \ldots,\ (X_{n-1}, X_n)$$

آنگاه نتیجه می‌شود که

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n-1}\left(x_t - \bar{x}_{(1)}\right)\left(x_{t+1} - \bar{x}_{(2)}\right)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n-1}\left(x_t - \bar{x}_{(1)}\right)^2 \sum_{t=1}^{n-1}\left(x_{t+1} - \bar{x}_{(2)}\right)^2}}$$

که در آن:

$$\bar{X}_{(1)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} X_t}{n-1} \quad \bar{X}_{(2)} \frac{\sum_{t=1}^{n-1} X_{t+1}}{n-1}$$

یعنی میانگین اولین و آخرین $n-1$ داده هستند.

دنباله برآورد تابع خودهمبستگی

همان‌طور که قبلا نیز مشاهده شد، می‌توان تابع خودهمبستگی را برای تاخیرهای متفاوت برآورد نمود. رابطه مشابه رابطه با تاخیر یک است.

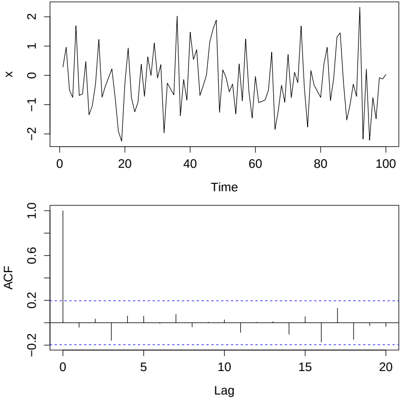
$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} \left(x_t - \bar{x}_{(1)}\right)\left(x_{t+k} - \bar{x}_{(2)}\right)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n-k} \left(x_t - \bar{x}_{(1)}\right)^2 \sum_{t=1}^{n-k} \left(x_{t+k} - \bar{x}_{(2)}\right)^2}}$$

- ضریب خودهمبستگی تابعی از تاخیرهاست، بنابراین به آن تابع خودهمبستگی گویند و آن را (acf)[۲] نشان می‌دهند.
- اگر ضرایب خودهمبستگی را بر حسب زمان تاخیر رسم کنید، شکل حاصل را همبستگی‌نگار (correlogram) نامند.

[۲] autocorrelation function

۱.۴ مثال اول از تابع خودهمبستگی

```
> par(mfrow=c(2,1))
> par(mar=c(4,4,1,1), ps=15)
> x <- rnorm(100) # iid
> plot.ts(x)
> acf(x)
```



دنباله مثال اول از تابع خودهمبستگی

- برای $k \neq 0$ تابع چگالی احتمال تابع خودهمبستگی به‌صورت زیر است.

$$r_k = \hat{\rho}(k) \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

- تغییرات $\hat{\rho}(k)$ بر حسب k رسم شده است.

دنباله مثال اول از تابع خودهمبستگی

- برای $k \neq 0$ تابع چگالی احتمال تابع خودهمبستگی به‌صورت زیر است.

$$r_k = \hat{\rho}(k) \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

- تغییرات $\hat{\rho}(k)$ بر حسب k رسم شده است.
- دو خط افقی در محل‌های $\pm\frac{1.96}{\sqrt{n}}$ رسم می‌شود که بازه اطمینان را در سطح معنی‌دار بودن ۵% نشان می‌دهد. که در پاره‌ای از نرم‌افزارها این فاصله به‌صورت خودکار رسم می‌شود.

دنباله مثال اول از تابع خودهمبستگی

- برای $k \neq 0$ تابع چگالی احتمال تابع خودهمبستگی به‌صورت زیر است.

$$r_k = \hat{\rho}(k) \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

- تغییرات $\hat{\rho}(k)$ بر حسب k رسم شده است.
- دو خط افقی در محل‌های $\pm\frac{1.96}{\sqrt{n}}$ رسم می‌شود که بازه اطمینان را در سطح معنی‌دار بودن ۵% نشان می‌دهد. که در پاره‌ای از نرم‌افزارها این فاصله به‌صورت خودکار رسم می‌شود.
- همان‌طور که در شکل acf مشاهده شد، با اطمینان ۹۵% مقادیر $\{\hat{\rho}(k) \; : \; k = 1, 2, \ldots\}$ داخل بازه اطمینان قرار می‌گیرند.

دنباله مثال اول از تابع خودهمبستگی

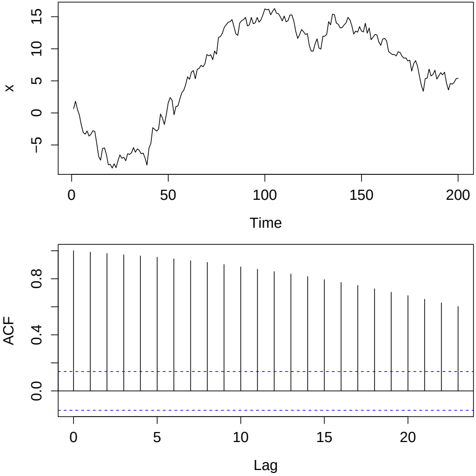
- برای $k \neq 0$ تابع چگالی احتمال تابع خودهمبستگی به‌صورت زیر است.

$$r_k = \hat{\rho}(k) \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$$

- تغییرات $\hat{\rho}(k)$ بر حسب k رسم شده است.
- دو خط افقی در محل‌های $\pm\frac{1.96}{\sqrt{n}}$ رسم می‌شود که بازه اطمینان را در سطح معنی‌دار بودن ۵% نشان می‌دهد. که در پاره‌ای از نرم‌افزارها این فاصله به‌صورت خودکار رسم می‌شود.
- همان‌طور که در شکل acf مشاهده شد، با اطمینان ۹۵% مقادیر $\{\hat{\rho}(k) : k = 1, 2, \ldots\}$ داخل بازه اطمینان قرار می‌گیرند.
- بند بالا نشان می‌دهد که بین عناصر سری زمانی همبستگی وجود ندارد وگرنه تعدادی از $\hat{\rho}(k)$ از بازه اطمینان (به نحو معنی‌داری) بیرون می‌آیند.

۲.۴ مثال دوم از تابع خودهمبستگی

```
> v <- rnorm(200) # iid
> x <- cumsum(v) # random walk
> par(mfrow=c(2,1))
> par(mar=c(4,4,1,1), ps=15)
> plot.ts(x)
> acf(x)
```



۵ خاصیت ایستایی

سری زمانی $\{X_t,\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ را ایستا گویند، اگر خواص آماری آن با سری شیفت یافته زمانی $\{X_{t+k},\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ به ازای هر k صحیحی یکسان باشد.

ایستایی قوی و یا اکیداً ایستا: اگر سری $\{X_t\}$ اکیداً ایستا باشد، دارای خواص زیر است:

- تابع چگالی احتمال توام یکسان

$$f\left(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n}\right) = f\left(x_{t_1+k}, x_{t_2+k}, \ldots, x_{t_n+k}\right)$$

- تابع میانگین $\{X_t\}$ برابر است.

$$\mu_X(t) = E(X_t)$$

- تابع واریانس $\{X_t\}$ برابر است.

$$\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X_t) = E\left[\left(X_t - \mu_X(t)\right)^2\right]$$

- تابع کوواریانس $\{X_t\}$ برابر است:

$$\begin{aligned}\gamma_X(t,s) &= \mathrm{Cov}(X_s, X_t)\\ &= E\left[\left(X_s - \mu_X(s)\right)\left(X_t - \mu_X(t)\right)\right]\end{aligned}$$

دنباله خاصیت ایستایی

نوع دیگری از خاصیت ایستایی، ایستایی ضعیف است. خواص این ایستایی به شرح زیر است.

دنباله خاصیت ایستایی

نوع دیگری از خاصیت ایستایی، ایستایی ضعیف است. خواص این ایستایی به شرح زیر است.

- $\mu_X(t)$ مستقل از زمان باشد، یعنی $\mu_X(t) = \mu_X$

دنباله خاصیت ایستایی

نوع دیگری از خاصیت ایستایی، ایستایی ضعیف است. خواص این ایستایی به شرح زیر است.

- $\mu_X(t)$ مستقل از زمان باشد، یعنی $\mu_X(t) = \mu_X$
- $\sigma_X^2(t)$ مستقل از زمان باشد، یعنی $\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2$

دنباله خاصیت ایستایی

نوع دیگری از خاصیت ایستایی، ایستایی ضعیف است. خواص این ایستایی به شرح زیر است.

- $\mu_X(t)$ مستقل از زمان باشد، یعنی $\mu_X(t) = \mu_X$
- $\sigma_X^2(t)$ مستقل از زمان باشد، یعنی $\sigma_X^2(t) = \sigma_X^2$
- $\gamma_X(t+k, t)$ به ازای هر k مستقل از زمان t باشد.

دنباله خاصیت ایستایی

نوع دیگری از خاصیت ایستایی، ایستایی ضعیف است. خواص این ایستایی به شرح زیر است.

- $\mu_X(t)$ مستقل از زمان باشد، یعنی $\mu_X(t) = \mu_X$
- $\sigma^2_X(t)$ مستقل از زمان باشد، یعنی $\sigma^2_X(t) = \sigma^2_X$
- $\gamma_X(t+k,t)$ به ازای هر k مستقل از زمان t باشد.

به زبان ساده‌تر، ایستایی یک سری زمانی عبارتند از:

- میانگین ثابت
- واریانس ثابت
- تابع کوواریانس به ازاء هر مقدار k مستقل از t است.

۱.۵ اتوکوواریانس و خودهمبستگی

سری زمانی ایستای $\{X_t\}$ با میانگین μ_X مفروض است. تابع اتوکوواریانس (ACVF) سری $\{X_t\}$ با تاخیر k عبارتست از:

۱.۵ اتوکوواریانس و خودهمبستگی

سری زمانی ایستای $\{X_t\}$ با میانگین μ_X مفروض است. تابع اتوکوواریانس (ACVF) سری $\{X_t\}$ با تاخیر k عبارتست از:

$$\begin{aligned}\gamma_X(k) &= \operatorname{Cov}\left(X_{t+k},\, X_t\right) \\ &= E\left[\left(X_{t+k} - \mu_X\right)\left(X_t - \mu_X\right)\right]\end{aligned}$$

۱.۵ اتوکوواریانس و خودهمبستگی

سری زمانی ایستای $\{X_t\}$ با میانگین μ_X مفروض است. تابع اتوکوواریانس (ACVF) سری $\{X_t\}$ با تاخیر k عبارتست از:

$$\begin{aligned}\gamma_X(k) &= \operatorname{Cov}\left(X_{t+k},\, X_t\right)\\ &= E\left[\left(X_{t+k}-\mu_X\right)\left(X_t-\mu_X\right)\right]\end{aligned}$$

تابع خودهمبستگی (ACF) سری $\{X_t\}$ با تاخیر k عبارتست از:

۱.۵ اتوکوواریانس و خودهمبستگی

سری زمانی ایستای $\{X_t\}$ با میانگین μ_X مفروض است. تابع اتوکوواریانس (ACVF) سری $\{X_t\}$ با تاخیر k عبارتست از:

$$\begin{aligned}\gamma_X(k) &= \mathrm{Cov}\left(X_{t+k},\, X_t\right)\\ &= E\left[\left(X_{t+k}-\mu_X\right)\left(X_t-\mu_X\right)\right]\end{aligned}$$

تابع خودهمبستگی (ACF) سری $\{X_t\}$ با تاخیر k عبارتست از:

$$\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = \mathtt{corr}\left(X_{t+k},\, X_t\right)$$

۱.۵ اتوکوواریانس و خودهمبستگی

سری زمانی ایستای $\{X_t\}$ با میانگین μ_X مفروض است. تابع اتوکوواریانس (ACVF) سری $\{X_t\}$ با تاخیر k عبارتست از:

$$\begin{aligned}\gamma_X(k) &= \mathrm{Cov}\left(X_{t+k},\, X_t\right) \\ &= E\left[\left(X_{t+k}-\mu_X\right)\left(X_t-\mu_X\right)\right]\end{aligned}$$

تابع خودهمبستگی (ACF) سری $\{X_t\}$ با تاخیر k عبارتست از:

$$\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = \mathtt{corr}\left(X_{t+k},\, X_t\right)$$

بعضی از خواص اتوکوواریانس

$$\gamma_X(k=0) = \mathrm{Var}(X_t)$$

$$\gamma_X(k) = \gamma_X(-k) \quad \forall k$$

۱.۱.۵ اتوکوواریانس و خودهمبستگی iid

اگر $\{X_t\}$ یک فرآیند iid باشد، می‌توان نوشت: $\{X_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$ همچنین نتیجه می‌شود.

$$\gamma_X(t+k, t) = \begin{cases} \sigma^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

دنباله متغیرهای $\{X_t\}$ دارای شرایط زیر است.

۱.۱.۵ اتوکوواریانس و خودهمبستگی iid

اگر $\{X_t\}$ یک فرآیند iid باشد، می‌توان نوشت: $\{X_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$ همچنین نتیجه می‌شود.

$$\gamma_X(t+k, t) = \begin{cases} \sigma^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

دنباله متغیرهای $\{X_t\}$ دارای شرایط زیر است.

- متغیرهای تصادفی غیرهمبسته‌اند، یعنی اگر $k \neq 0$ باشد، آنگاه $\gamma_X(k) = 0$ است.
- هر متغیر دارای میانگین صفر است، یعنی $E(X_t) = 0$ است.
- هر متغیر دارای واریانس متناهی است، یعنی $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$

۱.۱.۵ اتوکوواریانس و خودهمبستگی iid

اگر $\{X_t\}$ یک فرآیند iid باشد، می‌توان نوشت: $\{X_t\} \sim IID(0, \sigma^2)$ همچنین نتیجه می‌شود.

$$\gamma_X(t+k, t) = \begin{cases} \sigma^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

دنباله متغیرهای $\{X_t\}$ دارای شرایط زیر است.

- متغیرهای تصادفی غیرهمبسته‌اند، یعنی اگر $k \neq 0$ باشد، آنگاه $\gamma_X(k) = 0$ است.
- هر متغیر دارای میانگین صفر است، یعنی $E(X_t) = 0$ است.
- هر متغیر دارای واریانس متناهی است، یعنی $\mathrm{Var}(X_t) = \sigma^2 < \infty$

تابع خودهمبستگی با زمان تاخیر k، به شرح زیر است.

$$\rho_X(t+k, t) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

۲.۵ مثالی از فرآیند غیرایستا

گام‌زدن تصادفی یک سری زمانی غیر ایستا است. برای نشان دادن آن به رابطه زیر توجه کنید.

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

که در آن ε_t دارای میانگین μ و واریانس σ^2 است. اگر $t = 1$ باشد، آنگاه «شرط آغازین» $X_1 = \varepsilon_1$ است.

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1 + \varepsilon_2 \Rightarrow X_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ X_3 &= X_2 + \varepsilon_3 \Rightarrow X_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ &\vdots \\ X_t &= \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i \end{aligned}$$

چرا فرآیند بالا غیرایستا است؟ برای پاسخ به این پرسش، میانگین و واریانس آن را به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_t) = E(\varepsilon_1) + E(\varepsilon_2) + \cdots + E(\epsilon_t) \\ &= t\mu \end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که میانگین تابعی از زمان است.

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_t) &= \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{t} \epsilon_t) = \mathrm{Var}(\epsilon_1) + \cdots + \mathrm{Var}(\epsilon_t) \\ &= t\sigma^2\end{aligned}$$

بنابراین واریانس نیز تابع زمان می‌باشد. لذا فرآیند غیر ایستا است.

۳.۵ عملگر انتقال پسرو

عملگر انتقال پسرو B روی سری زمانی $\{X_t\}$ به‌صورت $B(X_t) = X_{t-1}$ است. یعنی زمان را یک واحد به عقب می‌برد تا سری جدیدی را تشکیل دهد. اگر این عملگر روی یک ترکیب خطی عمل کند، آنگاه

$$B(c_1X_{t_1} + c_2X_{t_2}) = c_1X_{t_1-1} + c_2X_{t_2-1}$$

۳.۵ عملگر انتقال پسرو

عملگر انتقال پسرو B روی سری زمانی $\{X_t\}$ به‌صورت $B(X_t) = X_{t-1}$ است. یعنی زمان را یک واحد به عقب می‌برد تا سری جدیدی را تشکیل دهد. اگر این عملگر روی یک ترکیب خطی عمل کند، آنگاه

$$B(c_1 X_{t_1} + c_2 X_{t_2}) = c_1 X_{t_1 - 1} + c_2 X_{t_2 - 1}$$

اکنون می‌توان مرتبه‌های بالاتر عملگر تأخیر را ملاحظه نمود.

$$\begin{aligned} B^2(X_t) &= BB(X_t) = B(X_{t-1}) = X_{t-2} \\ B^3(X_t) &= BB^2(X_t) = X_{t-3} \\ &\vdots \\ B^k(X_t) &= X_{t-k} \end{aligned}$$

۳.۵ عملگر انتقال پسرو

عملگر انتقال پسرو B روی سری زمانی $\{X_t\}$ به‌صورت $B(X_t) = X_{t-1}$ است. یعنی زمان را یک واحد به عقب می‌برد تا سری جدیدی را تشکیل دهد. اگر این عملگر روی یک ترکیب خطی عمل کند، آنگاه

$$B(c_1 X_{t_1} + c_2 X_{t_2}) = c_1 X_{t_1 - 1} + c_2 X_{t_2 - 1}$$

اکنون می‌توان مرتبه‌های بالاتر عملگر تأخیر را ملاحظه نمود.

$$\begin{aligned}
B^2(X_t) &= BB(X_t) = B(X_{t-1}) = X_{t-2} \\
B^3(X_t) &= BB^2(X_t) = X_{t-3} \\
&\vdots \\
B^k(X_t) &= X_{t-k}
\end{aligned}$$

می‌توان ترکیب خطی از مراتب بالاتر عملگر انتقال پسرو را داشت.

$$(\alpha B^k + \beta B^l) X_t = \alpha X_{t-k} + \beta X_{t-l}$$

از این عملگر، به مثابه متغیری ظاهری در یک معادله تفاضلی استفاده می‌شود.

۴.۵ عملگر تفاضل

عملگر دیگری را می‌توان بر حسب جملات عملگر انتقال پسرو تعریف نمود، که عملگر تفاضل است و به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\nabla X_t = (1 - B)X_t = X_t - X_{t-1}$$

۴.۵ عملگر تفاضل

عملگر دیگری را می‌توان بر حسب جملات عملگر انتقال پسرو تعریف نمود، که عملگر تفاضل است و به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\nabla X_t = (1 - B)X_t = X_t - X_{t-1}$$

این عملگر برای سری‌های زمانی غیرایستا اهمیت بسیار دارد. مرتبه‌های بالاتر آن به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\nabla^2 X_t &= \nabla(\nabla X_t)\\ &= \nabla(X_t - X_{t-1})\\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2})\\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}\end{aligned}$$

۱.۴.۵ استفاده از عملگر تفاضل برای ایستایی

همان‌طور که قبلاً مشاهده شد، گام‌زدن تصادفی یک سری غیرایستا است که رابطه آن به‌صورت زیر است.

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

اکنون با اعمال یک مرتبه تفاضل، سری مذکور ایستا خواهد شد.

$$X_t - X_{t-1} = \nabla X_t = \varepsilon_t$$

در رابطه اخیر ε_t (طرف راست تساوی) یک سری iid است، که ایستا می‌باشد. اکنون به کمک R این موضوع را به‌صورت کُد و سپس به شکل نمودار نشان داده می‌شود.

```
> set.seed(1)
> v <- rnorm(200)
> x <- cumsum(v)
> par(mfrow=c(2,2))
> par(mar=c(3,3,2,2),ps=15)
> plot.ts(x)
> acf(x, main="")
> plot.ts(diff(x))
> acf(diff(x), main="")
```