سری‌های زمانی ایستا

(مدل اتورگرسیو)

موسوی ندوشنی

دانشگاه صنعت آب و برق

s_mousavi@pwut.ac.ir

۱ مقدمه

مقدمه

مدل‌های کلاسیک سری‌های زمانی به دو بخش زیر تقسیم می‌شوند.

- ایستا [1] این بخش خود به انواع زیر قابل قسمت است.
  - AR (autoregressive)
  - MA (moving average)
  - ARMA (autoregressive-moving average)
- غیرایستا [2]: در قسمت مدل ARIMA (autoregressive integrated moving average) عنوان می‌گردد.

تقسیم‌بندی مهم دیگری در سری زمانی وجود دارد که به شرح زیر است.

- فصلی [3]
- غیرفصلی [4]

البته تقسیم‌بندی‌ها منحصر به موارد بالا نیست، منتها فعلاً به همین موارد بسنده می‌شود.

[1] stationary

[2] Non-stationary

[3] seasonal

[4] Nonseasonal

۲ مدل اتورگرسیو

تعریف

از بین مدل‌های ایستا، ابتدا به شرح مدل اتورگرسیو پرداخته می‌شود که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t \qquad (۱)$$

که در آن ε_t نوفه سفید [۵] با میانگین صفر و واریانس σ_ε^2 و ϕ_i پارامترهای مدل هستند. در این صورت Y_t مدل اتورگرسیو با مرتبه [۶] p نامند و با AR(p) نشان داده می‌شود.

اگر معادله ۱ بر حسب عملگر انتقال پسرو بیان گردد، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\theta_p(B)Y_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p)Y_t = \varepsilon_t$$

اکنون به نکات زیر توجه کنید.

- گام‌زدن تصادفی حالت خاص AR(1) است که در آن $\phi_1 = 1$ می‌باشد.
- این مدل در واقع رگرسیون Y_t نسبت به Yها در زمان‌های گذشته است و به همین سبب به آن اتورگرسیو گویند.

[۵] white noise

[۶] order

مدل $\mathrm{AR}(1)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

نظر به این که Y_t و ε_t ناهمبسته هستند، آنگاه واریانس مدل به‌صورت زیر است.

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \phi^2 \,\mathrm{Var}(Y_{t-1}) + \sigma_t^2$$

اگر $\{Y_t\}$ ایستا باشد، آنگاه $\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{Var}(Y_{t-1}) = \sigma_Y^2$ و همچنین

$$\sigma_Y^2 = \phi^2 \sigma_Y^2 + \sigma_\varepsilon^2 \qquad (۲)$$

در نتیجه

$$\sigma_Y^2 > \phi^2 \sigma_Y^2 \Rightarrow 1 > \phi^2 \iff -1 < \phi < 1$$

اگر طرفین معادله ۱ را در Y_{t-k} ضرب و از آن امید ریاضی گرفته شود، آنگاه

$$E(Y_t Y_{t-k}) = \phi E(Y_{t-1} Y_{t-k}) + E(\varepsilon_t Y_{t-k})$$

در اینجا جمله دوم طرف راست رابطه بالا برابر صفر است، زیرا ε_t و Yها ناهمبسته هستند. بنابراین اتوکوواریانس در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کند.

$$\gamma(k) = \phi \gamma(k-1) \quad k = 1, 2, 3, \cdots$$

و این اولین مرتبه یک معادله تفاضلی خطی است.

$$\gamma(k) = \phi^n \gamma(0) \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

با جابجایی در معادله ۲ نتیجه می‌شود که $\gamma(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}$ و بالاخره

$$\gamma(k) = \frac{\phi^k \sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi^2} \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

با توجه به رابطه $\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$ تابع خودهمبستگی به‌صورت زیر است.

$$\rho(k) = \phi^k \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

بنابراین $\widehat{\phi} = r_1$ است. از روابط قبل می‌توان نشان داد که:

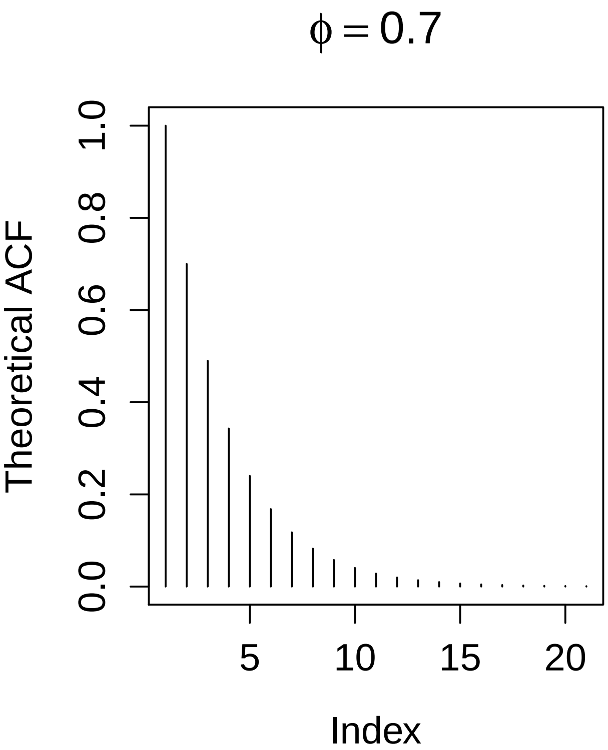
$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2 (1 - \widehat{r}_1^2)$$

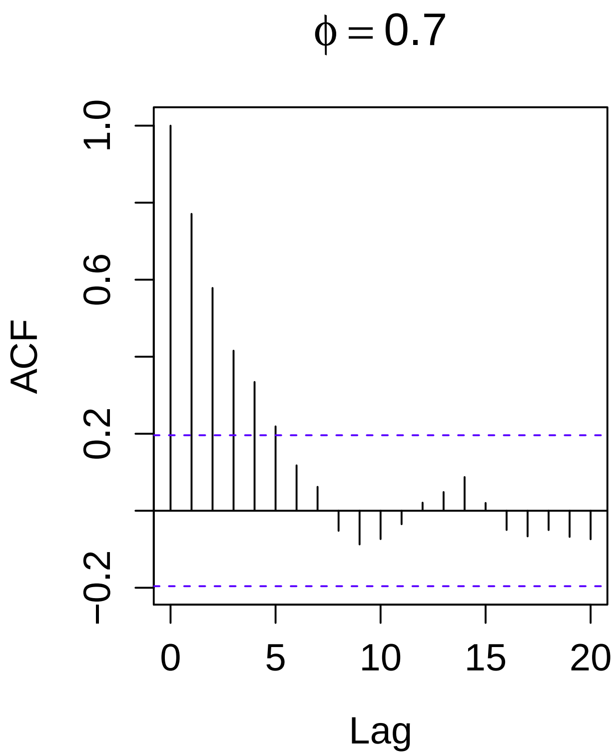
با توجه به رابطه اخیر می‌توان برآورد σ_ε^2 را به‌دست آورد.

$$\widehat{\sigma_\varepsilon^2} = \frac{n}{n-1} \widehat{\sigma^2} (1 - \widehat{r}_1^2)$$

که در آن n تعداد نمونه‌ها است.

نمودار همبستگی‌نگار $\mathbf{AR(1)}$





کد نمودار همبستگی‌نگار AR(1)

```
> # Simulation AR(1) with its definition.
> set.seed(10)
> x <- w <- rnorm(100)
> for (t in 2:100) x[t] <- 0.7 * x[t - 1] + w[t]
> par(mfrow=c(1,2),ps=15)
> # Creation a theoretical acf of AR(1) model
> plot(Acf <- ARMAacf(ar=0.7,lag.max=20),
+       type="h",ylab="Theoretical ACF")
> title(expression(phi==0.7))
> acf(x, main=expression(phi==0.7))
```

اتورگرسیو مرتبه دوم

مدل $\mathrm{AR}(2)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t \qquad (۳)$$

که به‌صورت عملگر آن به شرح زیر است.

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) Y_t = \varepsilon_t$$

برای بدست آوردن تابع خودهمبستگی سری $\mathrm{AR}(2)$ کافی است که طرفین معادله ۳ را در Y_{t-k} ضرب کنید و سپس از طرفین امید ریاضی بگیرید.

$$E(Y_t Y_{t-k}) = \phi_1 E(Y_{t-1} Y_{t-k}) + \phi_2 E(Y_{t-2} Y_{t-k}) + E(\varepsilon_t Y_{t-k})$$

با توجه به خاصیت بازگشتی نتیجه می‌شود.

$$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2)$$

با توجه به شرایط اولیه و خاصیت نوفه سفید، نتیجه می‌شود که

$$\gamma(0) = \phi_1\gamma(-1) + \phi_2\gamma(-2) + \sigma_\varepsilon^2 \quad (۴)$$

$$\gamma(1) = \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(-1) \quad (۵)$$

توجه داشته باشید که در این گونه محاسبات باید به جملات $E(\varepsilon_t Y_{t-k})$ توجه شود. اگر $k = 0$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t Y_t) &= E(\phi_1\varepsilon_t Y_{t-1} + \phi_2\varepsilon_t Y_{t-2} + \varepsilon_t^2) \\ &= \phi_1 E(\varepsilon_t Y_{t-1}) + \phi_2 E(\varepsilon_t Y_{t-2}) + E(\varepsilon_t^2) \\ &= \phi_1 0 + \phi_2 0 + \sigma_\varepsilon^2 \\ &= \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

با توجه به تساوی $\gamma(-k) = \gamma(k)$، روابط ۴ و ۵ به‌صورت نتیجه می‌شود.

$$\gamma(0) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma(1) = \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1)$$

۳ شرط پایداری

ایستایی و غیرایستایی در اتورگرسیو

معادله $\theta_p(B) = 0$ را معادله مشخصه نامند که می‌تواند دارای ریشه‌های حقیقی و یا مختلط باشد. اگر قدر مطلق تمام ریشه‌های چندجمله‌ای $\theta_p(B)$ بیشتر از واحد گردد، آنگاه فرآیند ایستا است. در فرآیند گام‌زدن تصادفی $\theta = 1 - B$ است. که B=1 می‌شود و فرآیند غیرایستا است. اکنون به مثال‌های زیر توجه کنید.

۱. مدل $\mathrm{AR}(1)$ به‌صورت $Y_t = \frac{1}{2}Y_{t-1} + \varepsilon_t$ ایستا است، زیرا ریشه معادله $1 - \frac{1}{2}B = 0$ برابر B=2 است که از واحد بزرگتر است.

۲. مدل $\mathrm{AR}(2)$ به‌صورت $Y_t = Y_{t-1} - \frac{1}{4}Y_{t-2} + \varepsilon_t$ ایستا است. زیرا با استفاده از عملگر انتقال پسرو $\frac{1}{4}(B^2 - 4B + 4)Y_t = \varepsilon_t$ یعنی $\frac{1}{4}(B-2)^2Y_t = \varepsilon_t$ نتیجه می‌شود. ریشه این چندجمله‌ای B=2 است و بزرگتر از واحد است.

۳. مدل $\mathrm{AR}(2)$ به‌صورت $Y_t = \frac{1}{2}Y_{t-1} + \frac{1}{2}Y_{t-2} + \varepsilon_t$ غیرایستا است. زیرا یکی از ریشه‌ها واحد است. با استفاده از عملگر انتقال پسرو $-\frac{1}{2}(B^2 + B - 2)Y_t = \varepsilon_t$ است و دارای ریشه های B=1,-2 می‌باشد. فقط مقدار ۱ سبب غیرایستایی می‌گردد، زیرا قدر مطلق B=-2 بزرگتر از واحد است.

۴. مدل $\mathrm{AR}(2)$ به صورت $Y_t = -\frac{1}{4}Y_{t-2} + \varepsilon_t$ ایستا است. زیرا ریشه‌های آن $1 + \frac{1}{4}B^2$ یعنی $B = \pm 2i$ هستند. که اعداد مختلط با $i = \sqrt{-1}$ می‌باشند. قدر مطلق هر یک از ریشه‌ها برابر ۲ می‌باشد که بزرگتر از واحد است.

کد محاسبه ریشه‌ها در R

برای محاسبه ریشه‌های چندجمله‌ای در R از تابع polyroot() استفاده می‌شود. برای مثال به موارد ۳ و ۴ از اسلاید قبلی توجه کنید.

- مثال سوم

```
> polyroot(c(-2,1,1))
[1]  1-0i -2+0i
```

قدر مطلق ریشه‌ها برابر است با:

```
> Mod(polyroot(c(-2,1,1)))
[1] 1 2
```

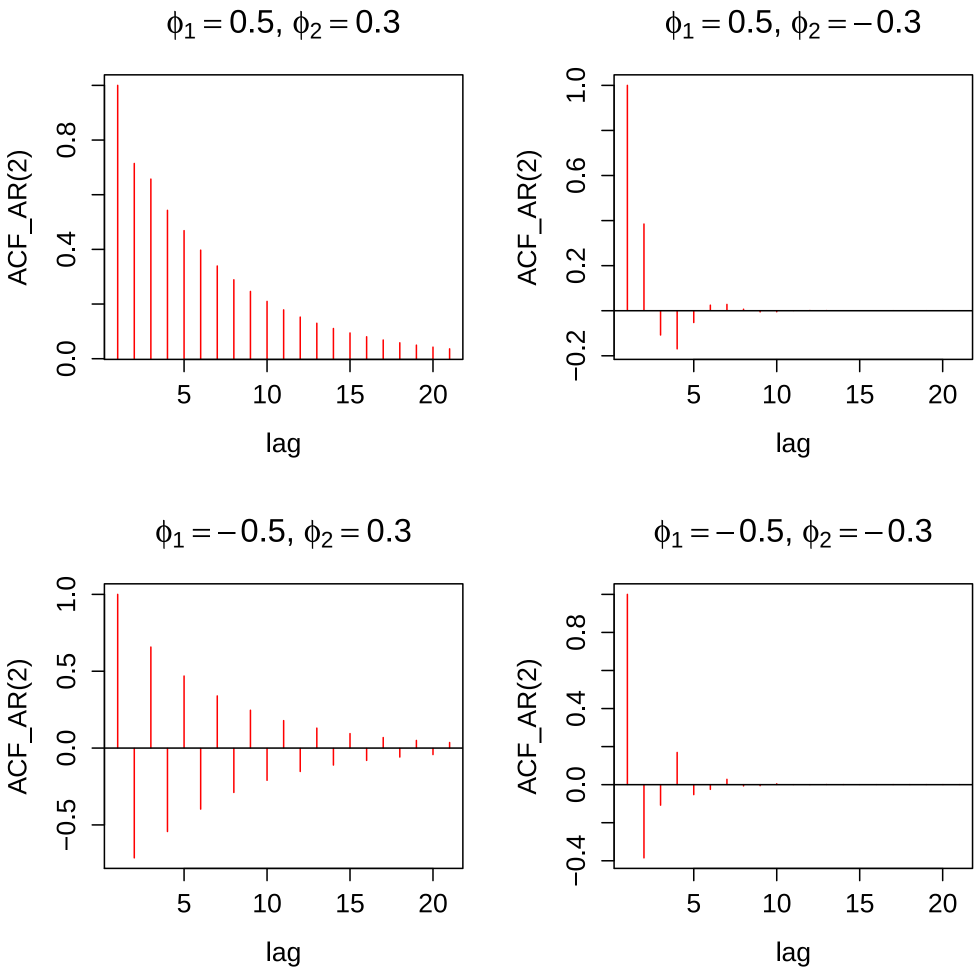
- مثال چهارم

```
> polyroot(c(1,0,1/4))
[1] 0+2i 0-2i
```

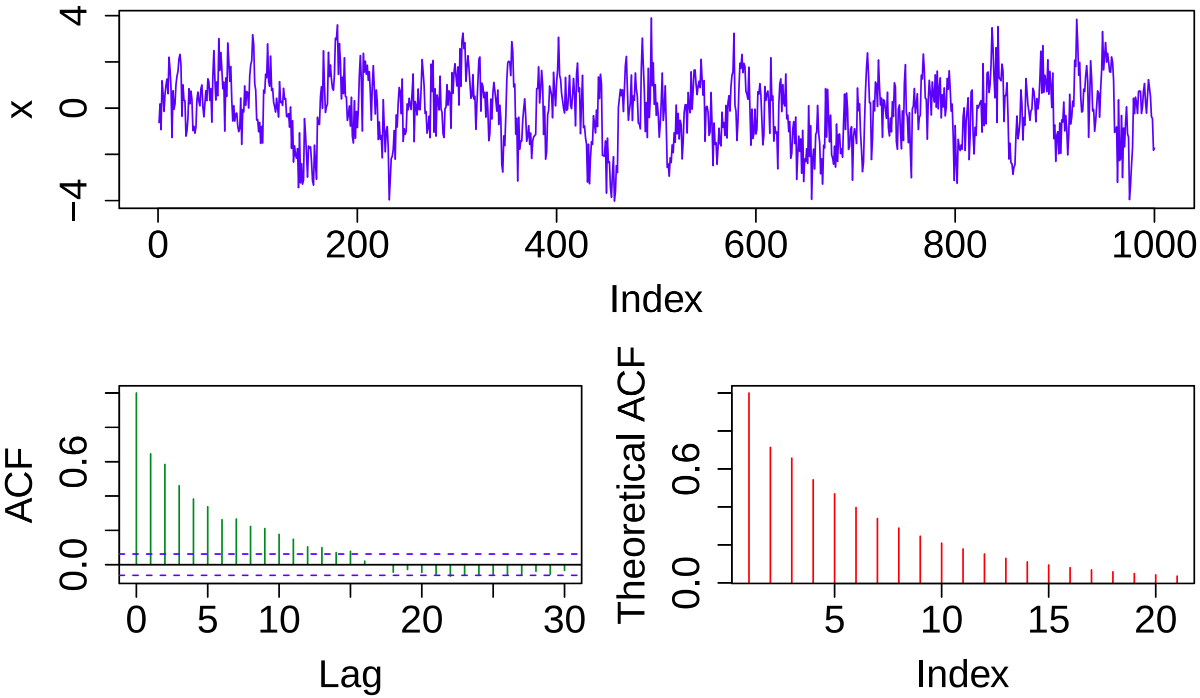
قدر مطلق ریشه‌ها برابر است با:

```
> Mod(polyroot(c(1,0,1/4)))
[1] 2 2
```

۴ رگرسیو مرتبه ۲



خودهمبستگی مرتبه ۲ (نظری و تجربی)



کد نمودارهای اسلاید قبل


```
> # Simulation AR(2) with its definition.
> set.seed(1)
> x <- w <- rnorm(1000)
> for (t in 3:1000) x[t] <- 0.5 * x[t - 1] + 0.3 * x[t-2] + w[t]
> layout(matrix(c(1,2,1,3),2,2))
> par(mar=c(4.5,4.5,2,1), ps=20)
> plot(x, type = "l", col="blue")
> acf(x, main="", col="forestgreen")
> # acf of theoritical AR(2)
> plot(Acf <- ARMAacf(ar=c(0.5,0.3),lag.max=20),
+       type="h",ylab="Theoretical ACF", col="red")
```