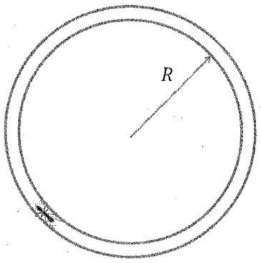
آزمون میان‌ترم اول مکانیک تحلیلی دو
دانشکدهٔ فیزیک دانشگاه شهید بهشتی، ۱۲خرداد ۹۹، ساعت ۹:۳۰ الی ۱۱:۰۰

لطفا پاسخ هر سوال را در صفحه‌ای **جداگانه** و با خطی خوانا بنویسید و نام و نشان خود را در بالای **همهٔ** صفحات درج فرمایید.

۱) می‌دانید که در بررسی دینامیک اجسام صلب، معادلات اویلر برای توصیف حرکت کفایت می‌کنند. به این معنی که اگر گشتاور وارد بر جسم و نیز هندسهٔ جسم (تانسور ممان اینرسی) مشخص باشند، قادریم با حل معادلات اویلر به توصیف کاملی از حرکت جسم دست پیدا کنیم. توضیح دهید که چرا با وجود این، علاقه‌مندیم که به سراغ زوایای اویلر برویم و از طریق آنها دینامیک اجسام صلب را بررسی کنیم؟ مزیت این کار چیست؟

۲) یک حلقهٔ نازک با چگالی طولی یکنواخت، به شعاع R و جرم M روی یک سطح بدون اصطکاک افقی قرار دارد. مورچه‌ای به جرم m با ابعاد ناچیز روی حلقه قرار دارد. مورچه ناگهان شروع به حرکت روی حلقه می‌کند و از دید ناظر روی حلقه یک دور کامل می‌زند. از نظر ناظر بیرونی، حلقه به اندازهٔ چه زاویه‌ای چرخیده است؟



۳) یک دیسک را با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ به چرخش درمی‌آوریم و آن را رها می‌کنیم تا آزادانه چرخش کند. در لحظهٔ رهاسازی، زاویهٔ بین $\boldsymbol{\omega}$ و $\boldsymbol{e_3}$ برابر با α است. با استفاده از معادلات اویلر نشان دهید که اندازهٔ بردار سرعت زاویه‌ای با گذر زمان ثابت باقی می‌ماند. معادلات اویلر:

$$\lambda_1\dot{\omega}_1 - (\lambda_2 - \lambda_3)\omega_2\omega_3 = \Gamma_1$$
$$\lambda_2\dot{\omega}_2 - (\lambda_3 - \lambda_1)\omega_1\omega_3 = \Gamma_2$$
$$\lambda_3\dot{\omega}_3 - (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1\omega_2 = \Gamma_3$$

۴) حلقه‌ای صلب و افقی به شعاع R در نظر بگیرید. سه مهره به جرم‌های $2m$، m و m می‌توانند بدون اصطکاک روی این حلقه حرکت کنند و بین این سه مهره، سه فنر یکسان با ثابت سختی k وجود دارد. بسامدهای نرمال این سیستم را پیدا کنید و مدهای نرمال متناظر با آنها را بیابید و توصیف کنید.

۵) در این سوال شما باید نظریهٔ پراکندگی دو بعدی را بنا کنید. این نظریه می‌تواند برای برخورد اجسامی که مقید به حرکت در یک صفحه هستند به کار رود. در این حالت، سطح مقطع σ همان عرض موثر[1] هدف است و سطح مقطع دیفرانسیلی $d\sigma/d\theta$ تعداد پرتابه‌هایی را مشخص می‌کند که بعد از پراکندگی درون بازهٔ زاویه‌ای $d\theta$ قرار گرفته‌اند.
الف) نشان دهید که رابطهٔ مشابه با رابطهٔ سه بعدیِ $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|$، در دو بعد به صورت $\frac{d\sigma}{d\theta} = \left|\frac{db}{d\theta}\right|$ است.
ب) حال پراکندگی یک پرتابهٔ کوچک را از یک دیسک سخت به شعاع R که در جای خود ثابت نگه داشته شده است در نظر بگیرید. برای این حالت سطح مقطع دیفرانسیلی را پیدا کنید.
ج) حال با انتگرال گیری از پاسخ‌تان در قسمت (ب) نشان دهید که کل سطح مقطع برابر با $2R$ است.

موفق باشید!

[1] Effective width