



دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده فیزیک

رساله دوره دکتری فیزیک ماده چگال

عنوان

نقش تحولات گذشته سیستم‌های ناهمگن در فرآیند
پخش غیرعادی

نگارش

حدیثه صفدری

استاد راهنما

دکتر غلام‌رضا جعفری

شهریور ۹۴

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مشکر و قدردانی

سپاس خدا را که داشتن او جبران همه نداشته‌های من است . . .

چکیده

در انتشار ذرات در محیط‌های بی‌نظم، به علت وجود ناهمگنی یا عدم دسترسی یکسان به تمام فضا، الگوی مورد انتظار طبق فرآیند پخش عادی مشاهده نمی‌شود. این ناهنجاری‌ها نسبت به پخش متداول که با عنوان پخش غیرعادی شناخته می‌شوند، میانگین مربع جابجایی متناسب با توانی از زمان $\langle x^2(t) \rangle \sim t^\alpha$ دارند. شکست قضیه ارگودیک یکی از خواص حاکم بر این فرآیندهاست که منشا وجود این شکست از سوالات مهم این رساله به شمار می‌رود. مدل‌های فیزیکی مختلفی از جمله حرکت بروانی زمان پیوسته، حرکت بروانی کسری و حرکت بروانی بازمقیاس شده جهت توصیف فرآیندهای پخش غیرعادی ارائه شده‌اند. در این رساله با وارد کردن اثر حافظه تاریخی فرآیند در دینامیک آن، قضیه شکست ارگودیسیتی را برای حرکت بروانی بازمقیاس شده‌ی SBM آزاد و مقید مورد مطالعه قرار دادیم. نتایج نشان می‌دهند منشا و دلیل وجود این شکست عدم اطلاع دقیق از گذشته سیستم و همچنین عدم دسترسی به شرایط اولیه درست می‌باشد. نتیجه جالب توجه این بود که وقتی بازو مطالعه‌ی این نوع فرآیندها از بازه آماده سازی سیستم بسیار کوچک‌تر باشد، قضیه ارگودیسیتی برقرار می‌شود؛ به عبارتی، در مطالعه سیستم در بازه‌های بسیار کوچک، سیستم زمان کافی جهت اثرپذیری از اطلاعات اولیه را ندارد. حتی بازه‌ی آماده‌سازی کوچک نیز بر رفتار ارگودیک سیستم اثرگذار است. این رفتار در مورد حرکت بروانی زمان پیوسته زیرپخش و فرآیندهای پخش ناهمگن با وابستگی توانی ضریب پخش به مکان نیز مشاهده شده است. اما حالت مقید در حضور پتانسیل هارمونیک، با در نظر گرفتن نقش گذشته‌ی سیستم، فرآیندی است منحصر به فرد به گونه‌ای که میانگین هنگردی از حالت توانی با زمان به یک ناحیه‌ی تخت میل می‌کند؛ معکوس آن‌چه در حرکت بروانی زمان پیوسته رخ می‌دهد. در حالتی که آثار گذشته بسیار دور وارد شود، دوباره ارگودیسیتی را در سیستم مشاهده می‌کنیم. همچنین چگالی بازه زمانی اولین عبور در نیم‌فضا نیز به عنوان یکی از ویژگی‌های آماری مهم سیستم با وارد آوردن اثرات گذشته، برخلاف حرکت بروانی کسری یک رفتار دو مقیاسی براساس شدت این اثر نشان می‌دهد. پارامتر شکست ارگودیسیتی EB به عنوان معیاری از افت و خیز مسیرهای نمونه‌ی یک فرآیند تصادفی حول مقدار میانگین‌شان، برای SBM با / و بدون حضور اثر دینامیک گذشته و به ازای نماهای مختلف α به صورت تئوری و شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفته است. به عنوان نمونه‌ای کاربردی از فرآیند پخش غیرعادی در محیط بی‌نظم، شدت پخشی امواج پراکنده شده از یک سطح زیر با استفاده از ریاضیات کسری مورد مطالعه قرار گرفته است. طبق نتایج حاصل پراکندگی امواج تخت از سطح ناهمگن، معادل است با بازتاب امواج از یک سطح تخت در فضایی با بعد غیرصحیح. فضایی که در ازای حذف ناخالصی‌ها و ناهمگنی‌ها، معادلات دیفرانسیل حاکم بر دینامیک آن‌ها معادلاتی از مرتبه کسری هستند.

واژه‌های کلیدی: پخش غیرعادی، حرکت بروانی بازمقیاس شده، تحولات گذشته، محاسبات کسری

فهرست

۱	پیش‌گفتار	۱
۴	مدل‌سازی‌های تصادفی پدیده پخش	۱
۴	۱.۱ ول‌گشت	۴
۶	۲.۱ تئوری احتمال در فیزیک، فراتر از تخمین خطا	۶
۷	۳.۱ ملکول‌ها و گرما: احتمال وجود رابطه میان آن‌ها	۷
۱۰	۱.۳.۱ آلبرت اینشتین و معادله پخش	۱۰
۱۳	۲.۳.۱ رهیافت اسملوکوفسکی و ول‌گشت	۱۳
۱۹	۴.۱ فراهم‌سازی ابزار مدل‌های تصادفی	۱۹
۱۹	۱.۴.۱ فرآیند وینر	۱۹
۲۱	۲.۴.۱ معادله لانژوین	۲۱
۲۶	۳.۴.۱ معادله فوکر-پلانک	۲۶
۲۷	۵.۱ نوفه سفید گاوسی: رهیافتی جهان‌شمول برای مدل‌سازی افت و خیزها	۲۷
۲۸	۱.۵.۱ کاربردها	۲۸
۲۹	۲.۵.۱ متغیرهای سریع نسبت به متغیرهای کند	۲۹
۳۱	۳.۵.۱ موضوعات جالب توجه	۳۱
۳۶	۶.۱ پخش غیر عادی و نوفه: نه گاوسی و نه سفید	۳۶
۴۲	مدل‌های پخش غیر عادی	۲
۴۲	۱.۲ آمار پخش غیر عادی	۴۲
۴۲	۱.۱.۲ توزیع لوی	۴۲

۴۶	ارگودیسیتی	۲.۱.۲
۴۷	زمان اولین عبور	۳.۱.۲
۴۹	اثر تحولات گذشته	۴.۱.۲
۵۰	حرکت بروانی بازمقیاس شده	۲.۲
۶۴	ولگشت زمان پیوسته	۳.۲
۶۵	پرواز در زمان	۱.۳.۲
۶۶	معادله پخش برای ولگشت تصادفی زمان پیوسته	۴.۲
۶۸	استراحت‌های طولانی	۱.۴.۲
۶۸	قدم‌های بلند: پروازهای لوی	۲.۴.۲
۷۰	رقابت میان استراحت‌های طولانی و گام‌های بلند	۳.۴.۲
۷۲		ریاضیات کسری	۳
۷۳	منشاء محاسبات کسری	۱.۳
۷۶	معادلات کسری و غیرموضعیّت	۲.۳
۷۹	توابع خاص	۳.۳
۷۹	تابع گاما	۱.۳.۳
۸۰	تابع بتا	۲.۳.۳
۸۱	تبدیل لاپلاس و کانولوشن	۳.۳.۳
۸۲	تابع میتاگ- لفلر	۴.۳.۳
۸۳	توابع فوق هندسی	۵.۳.۳
۸۴	تعریف و استخراج عملگرهای کسری	۴.۳
۸۴	عملگر انتگرال کسری	۱.۴.۳
۸۷	مشتق‌های کسری	۲.۴.۳
۹۴	معادله‌های انتگرالی کسری	۳.۴.۳
۹۷	معادله‌های دیفرانسیلی کسری	۴.۴.۳
۹۹		حرکت بروانی بازمقیاس شده در حضور تحولات گذشته سیستم	۴
۹۹	اثر تحولات گذشته سیستم بر SBM نامقید	۱.۴

۹۹	خواص ارگودیسیتی	۱.۱.۴
۱۰۷	اثر گذشته بر SBM مقید	۲.۴
۱۰۷	خواص ارگودیسیتی	۱.۲.۴
۱۱۴	زمان اولین عبور با حضور نقش گذشته	۲.۲.۴
۱۱۷	۵ تئوری پراکندگی کیرشهف	
۱۱۷	پراکندگی از سطوح زیر	۱.۵
۱۲۰	مدل‌های تئوری پراکندگی	۲.۵
۱۲۳	پدیده پراکندگی از سطوح خودمتناسب	۳.۵
۱۲۵	پدیده پراکندگی در رهیافت ریاضیات کسری	۴.۵
۱۲۹	۶ نتیجه‌گیری و پیشنهادات	
۱۳۲	الف	
۱۳۲	الف.۱ توزیع لوی و نمایش دقیق آن بر حسب توابع فاکس	
۱۳۵	مراجع	

لیست تصاویر

- ۱.۱ مسیر حرکت بروانی برای یک آینه کوچک که از طریق یک رشته نخ کوارتز معلق مانده است. چرخش‌های نامنظم آینه با دنبال کردن پرتو بازتابیده از آن حاصل می‌شود. این اطلاعات بسیار دقیق، به کاپلر اجازه‌ی پیدا کردن عدد آووگادرو را داد. از آن‌جا که رشته نخ بر آینه گشتاور پیچشی وارد می‌کند، حرکت حاصل، حرکت بروانی هارمونیک محدود است. در این دو نمونه ارائه شده، تنها فشار متفاوت است. در هر دو مورد حرکت میرا است. ۹
- ۲.۱ آلبرت اینشتین، بنیان‌گذار تئوری حرکت بروانی. ۱۱
- ۳.۱ اسملوکوفسکی و کار بر روی جنبه میکروسکوپی حرکت بروانی. ۱۳
- ۴.۱ نمایی از ول‌گشت پایدار اسملوکوفسکی در سه بعد که از $X(0) = 0$ شروع به حرکت نموده و مسافت جابجایی‌ها برای همه n ها یکسان است، $\delta X(n) = l$. نخستین جهت حرکت تصادفی است. اما تغییر جهت‌های بعدی مقید به یک زاویه قطبی ثابت ϵ هستند. زاویه سمتی مقداری تصادفی دارد و در هر گام مستقل از گام قبلی است. این تصویر از مرجع [۲۹] گرفته شده است. ۱۷
- ۵.۱ مطالعات پیرین بر روی حرکت بروانی [۲۷]. سمت چپ: مسیرهای یک ذره بروانی در یک صفحه، که در بازه‌های زمانی ۳۰ ثانیه‌ای اندازه‌گیری شده است. راست: تمامی جابجایی‌های تمام مسیرها به مبدا منتقل شده‌اند. این تصویر گاوسی بودن توزیع طول مسیرها را نشان می‌دهد که توسط اینشتین پیش‌بینی شده بود. ۱۸
- ۶.۱ نوربرت وینر ریاضیدان آمریکایی که سهم عمده‌ای در شکل‌گیری فرآیندهای تصادفی داشت. ۲۰

- ۷.۱ مسیره‌های نمونه $X(t)$ برای فرآیند وینر که در واقع مدل ریاضی برای حرکت بروانی است. مسیره‌ها از شبیه‌سازی عددی حاصل شده‌اند. مسیره‌های نمونه بسیار نامنظم هستند اما پیوسته؛ و در هیچ زمانی نمی‌توان یک مسیر ارجح تعیین کرد. به صورت موضعی مسیره‌های تولید شده با حرکت بروانی واقعی مشاهده شده توسط کاپلر (۱.۱) سازگار هستند. ۲۱
- ۸.۱ پاول لانژوین (۱۹۴۶-۱۸۷۲) ۲۲
- ۹.۱ سمت چپ: آدرین فوکر (۱۹۷۲-۱۸۸۷)، راست: ماکس پلانک (۱۹۴۷-۱۸۵۸) ۲۶
- ۱۰.۱ تصویر چپ: حلقه دوار. تصویر میانی: گرداب‌های تشکیل شده درون حلقه دوار که توسط دوربین ضبط شده است. تصویر راست: مدارهای نوعی نشان دهنده‌ی مسیر ذرات درون حلقه دوار [۶۵، ۶۴]. ۳۷
- ۱۱.۱ تصویر چپ: مسیر حرکت سلول بر روی زیرلایه‌اش. سلول در طول مسیر خود بارها شکل و جهت حرکتش را تغییر می‌دهد. تصویر درونی تصاویر فاز کنتراست در ابتدا و انتهای مسیرش را نشان می‌دهد. تصویر راست: نمودار تمام لگاریتمی میانگین مربع جابجایی نسبت به زمان برای مسیر حرکت دو نوع سلول متفاوت است [۶۶]. ۳۸
- ۱۲.۱ جریان نوری $I(t)$ اندازه‌گیری شده در لایه‌های نازک آمورف که هسته اصلی دستگاه کپی را تشکیل می‌دهد. خط آبی گسسته نشان‌دهنده رفتار مورد انتظار بر اساس پیش‌بینی‌های انجام شده برای ذره بروانی است. یعنی تبعیت از معادله پخش (۴.۱) که شر و مونترال را برانگیخت تا فرآیند را با استفاده از یک توزیع با انتهای پهن برای زمان توجیه کنند [۶۷]. هر دو محور لگاریتمی هستند. ۳۹
- ۱.۲ مسیر نمونه برای فرآیند وینر که در زمان $t = \tau$ برای اولین بار به مقدار a می‌رسد. همچنین مسیر دیگری نیز نشان داده شده است که تا وقتی به a می‌رسد دقیقاً مانند مسیر اول است، و در ادامه بازتاب مسیر اولی نسبت به محور افق در نقطه a است. ۴۸
- ۲.۲ مسیر حرکت بروانی باز مقیاس شده برای دو نمای $H = 0.75$ و $H = 0.25$ [۹۱]. ۵۲
- ۳.۲ تخمین نمای α توزیع زمان اولین عبور $f(t) \sim t^{-\alpha}$ ، که برای حرکت بروانی باز مقیاس شده داریم $\alpha = H + 1$ [۹۱]. ۵۳
- ۴.۲ مقایسه میانگین زمانی و هنگردی MSD برای $\alpha = 1/2$ (چپ) و $\alpha = 3/2$ (راست) حاصل از شبیه‌سازی و نتیجه تحلیلی [۹۴]. MSD برای چندین مسیر مختلف نیز رسم شده است. ۵۵

- ۵.۲ توزیع $\phi(\xi)$ برای $\frac{\overline{\delta^2(\Delta)}}{\overline{\delta^4(\Delta)}}$ برای نماهای مختلف. می‌توان مشاهده نمود که برای Δ های بزرگ‌تر توزیع پهن‌تر شده و تقارن این توزیع از بین می‌رود. برای α های بزرگ پهنای توزیع کاهش می‌یابد اما همچنان عدم تقارن توزیع مشاهده می‌شود. زمان مشاهده در این شکل $t = 10^4$ و تعداد نمونه‌های بکار رفته برای میانگین‌گیری $N = 10^3$ است [۹۵]. ۵۶
- ۶.۲ (چپ) پارامتر شکست ارگودیستی برای SBM بر حسب α . نتایج حاصل از شبیه‌سازی توسط نقاط نشان داده شده است. خطوط کامل رنگی نتیجه تحلیلی حاصل از معادلات (۴۹.۲) و (۵۱.۲) هستند. رنگ‌های مختلف برای نمایش Δ های مختلف بکار رفته‌اند $10^2, 10^1, 10^0$. $\Delta = 10^0$. حالت $\alpha = 0$ و $\alpha = 1/2$ با دوایر سیاه رنگ بزرگ‌تر نشان داده شده‌اند. بازه زمانی مشاهده $t = 10^4$ و تعداد مسیرهای نمونه‌ی بکار رفته برای هر نما $N = 10^3$ است. راست) نتایج تحلیلی دقیق و حدی EB . منحنی‌های قرمز، سبز و آبی رنگ نشان دهنده‌ی حل دقیق رابطه (۴۹.۲) هستند. خط‌چین در ناحیه $\alpha < 1/2$ معادل است با نتیجه (۵۶.۲) و منحنی خط‌چین در ناحیه $1/2 < \alpha < 1$ نتایج حاصل از مرجع ([۹۳]) هستند. خطوط بنفش رنگ در بازه $1/2 < \alpha < 1$ طبق رابطه (۵۴.۲) برای زمان تاخیری ثابت رسم شده‌اند. نقاط مشکی بزرگ، از محاسبه انتگرال رابطه (۴۹.۲) با استفاده از متمتیکا، حاصل شده است [۹۵]. ۶۰
- ۷.۲ پارامتر EB برای SBM بر حسب زمان مشاهده t . خطوط کامل نتایج تحلیلی معادله‌ی (۴۹.۲) و نقاط نتایج شبیه‌سازی را نمایش می‌دهند. پارامترها: $\Delta = 10$ و $N = 10^3$ [۹۵]. ۶۲
- ۸.۲ میانگین زمانی و هنگردی MSD برای $\alpha = 1/2$ (چپ) و $\alpha = 3/2$ (راست) حاصل شبیه‌سازی و نتیجه تحلیلی برای SBM مقید تحت پتانسیل هارمونیک برای دو شدت مختلف از ثابت k [۹۴]. ۶۳
- ۹.۲ مسیر حرکت ذرات در ول‌گشت زمان پیوسته $CTRW$. حرکت پیوسته در فضای مکان، برای دوره‌هایی از زمان که از توزیع بی‌مقیاس پیروی می‌کنند، متوقف می‌شود. این شرایط، حرکت را نسبت به حالت ذره براونی آهسته‌تر می‌کند. زمان‌های انتظار با توزیعی که انتهای پهن دارند، بنابراین در همه مقیاس‌های زمانی ظاهر می‌شوند؛ اما دوبه‌دو مستقل هستند. ۶۶
- ۱۰.۲ مقایسه مسیر در حرکت براونی (چپ) و گشت لوی با شاخص $\mu = 1/5$. در حالی که هر دو مسیر از نظر آماری خود متشابه هستند، مسیر گشت لوی دارای بعد فراکتالی است، خوشه‌های شکل گرفته با گام‌های کوتاه را توسط قدم‌های بلند به یکدیگر متصل می‌کند. ۶۹
- ۱.۳ جوزف لیوویل، ریاضیدان فرانسوی (۱۸۰۹-۱۸۸۲). ۷۳
- ۲.۳ جرج برنارد ریمان، فیزیکدان و ریاضیدان آلمانی (۱۸۲۶-۱۸۶۶). ۷۴

- ۳.۳ ۷۷ نمای حرکت خودروها در جاده از دید ماکروسکوپی و میکروسکوپی.
- ۴.۳ ۸۰ تابع گاما
- ۵.۳ ۸۲ تابع میتاگ- لفلر تک متغیره، به ازای مقادیر مختلف α .
- ۶.۳ ۸۷ نمایی شماتیک از مشتق مرتبه $\alpha = 2/3$ با به کارگیری روش ریمان- لیوویل. در مرحله اول، انتگرالی از مرتبه $\nu = 3 - 2/3 = 7/3 = 2.33$ انجام می‌شود، سپس مشتق صحیحی از مرتبه ۳ محاسبه می‌شود.
- ۷.۳ ۸۷ نمایی شماتیک از مشتق مرتبه $\alpha = 2/3$ با به کارگیری روش کاپوتو. در مرحله اول، مشتق صحیحی از مرتبه ۳ محاسبه، سپس انتگرالی از مرتبه $\nu = 3 - 2/3 = 7/3 = 2.33$ انجام می‌شود.
- ۱.۴ ۸۹ میانگین هنگردی و میانگین زمانی MSD برای نمای $\alpha = 1/2$. خط‌های خاکستری رنگ، MSD برای ۲۰ نمونه به دست آمده از شبیه‌سازی حاصل از معادله لانژوین (۲۸.۲)، برای زمان مشاهده $t = 10^5$ را نشان می‌دهد. دایره‌ها نشان دهنده میانگین بر روی این ۲۰ نمونه هستند. خط سیاه: نتیجه تئوری (۷.۴) برای میانگین زمانی MSD . خط سبز: نتیجه تحلیلی برای میانگین هنگردی (۳.۴) است. نتایج برای سه حالت: الف) بدون در نظر گرفتن نقش گذشته سیستم ($t_a = 0$ ، ب) اثر ضعیف گذشته ($t_a = 10^3$ و ج) اثر بسیار شدید گذشته ($t_a = 10^6$ ارائه شده‌اند. در همه محاسبات این بخش ضریب ثابت $K_\alpha^* = 1/2$ در نظر گرفته شده است [۱۰۱]. ۱۰۲
- ۲.۴ ۱۰۳ میانگین هنگردی و میانگین زمانی MSD برای نمای $\alpha = 3/2$ در حد t_a بسیار قوی $t_a = 10^6$ با زمان مشاهده $t = 10^5$ [۱۰۱].
- ۳.۴ ۱۰۳ میانگین زمانی MSD برای SBM برحسب Δ برای t_a ها و نماهای مختلف $2 \geq \alpha \geq 0$. زمان مشاهده $t = 10^4$ و $10^5, 10^2, 10^6$ در نظر گرفته شده‌اند [۱۰۱]. ۱۰۴
- ۴.۴ ۱۰۴ پارامتر شکست ارگودیسیتی برای SBM برحسب نمای α برای t_a های مختلف. رنگ‌ها برای نشان دادن مقادیر مختلف t_a بکار رفته‌اند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی با نقاط و نتایج تحلیلی با خطوط کامل نمایش داده شده‌اند. در این شکل پارامترهای مورد استفاده به این صورت هستند $\Delta = 10$ ، $t = 10^4$ و $N = 10^3$ [۹۵]. ۱۰۶
- ۵.۴ ۱۰۶ پارامتر EB برای SBM برحسب t_a برای نماهای مختلف α . خطوط کامل برای نمایش نتایج تحلیلی و نقاط برای نتایج شبیه‌سازی بکار رفته‌اند. در t_a های بلند ناپایداری در نتایج شبیه‌سازی مشاهده می‌شود. پارامترها: $\Delta = 10$ ، $t = 10^4$ و $N = 10^3$ [۹۵]. ۱۰۷

- ۶.۴ میانگین هنگردی MSD برای SBM مقید با نمای $\alpha = 0.5$ برای دو ثابت نیروی $k = 0.1$ (خطوط کامل) و $k = 0.01$ (خطچین) و برای مقادیر مختلف t_a : الف) $(t_a = 0)$ خطوط خاکستری، ب) مقدار ضعیف $(t_a = 0.1)$ خطوط آبی و ج) بسیار قوی $(t_a = 10^6)$ خطوط نارنجی. خط سبز نشان دهنده $\langle x^2(t) \rangle^4$ برای $t_a = 10^6$ و $k = 0.1$ است که گذرا میان دو ناحیه تخت را بهتر نشان می‌دهد [۱۰۱]. ۱۰۹
- ۷.۴ میانگین هنگردی MSD برای SBM مقید با نمای $\alpha = 1/5$ برای دو ثابت نیروی $k = 0.1$ (خطوط کامل) و $k = 0.01$ (خطچین) و برای مقادیر مختلف t_a : الف) $(t_a = 0)$ خطوط خاکستری، ب) مقدار ضعیف $(t_a = 0.1)$ خطوط آبی و ج) بسیار قوی $(t_a = 10^6)$ خطوط نارنجی. در تمام موارد در نهایت رابطه مقیاسی $t^{\alpha-1} \simeq$ مشاهده می‌شود [۱۰۱]. ۱۰۹
- ۸.۴ میانگین هنگردی و زمانی MSD برای SBM مقید با نمای $\alpha = 1/2$ برای سه حالت مختلف t_a : الف) $(t_a = 0)$ ، ب) مقدار ضعیف $(t_a = 10^{-1})$ و ج) مقدار بسیار بزرگ $(t_a = 10^6)$. زمان مشاهده $t = 5 \times 10^4$ در نظر گرفته شده است [۱۰۱]. ۱۱۳
- ۹.۴ میانگین هنگردی و زمانی MSD برای SBM مقید با نمای $\alpha = 3/2$ و $t_a = 10^6$. زمان مشاهده $t = 5 \times 10^4$ در نظر گرفته شده است [۱۰۱]. ۱۱۴
- ۱۰.۴ همگرایی میانگین زمانی و میانگین هنگردی MSD برای SBM مقید در حد $t \rightarrow \Delta$ برای دو نمای $\alpha = 1/2$ (چپ) و $\alpha = 3/2$ (راست) برای شدت‌های مختلف میدان و $t_a = 10^6$ [۱۰۱]. ۱۱۵
- ۱۱.۴ چگالی زمان اولین عبور $\varphi(t)$ برای نمای $\alpha = 1/2$ با مقادیر ثابت $x_0 = 1$ و $t_a = 10^6$. خطچین نشان دهنده تغییر شیب از $-1/2$ به $-5/4$ است [۱۰۱]. ۱۱۶
- ۱.۵ سهم هر یک از مولفه‌های پراکندگی برای سطوح با درجات مختلف زبری ۱۱۸
- ۲.۵ این نمودار نشان‌دهنده اختلاف فاز میان دو پرتو موج موازی پراکنده شده از نقاط متفاوت از یک سطح زبر است. ۱۱۹
- ۳.۵ شکل شماتیک نشان دهنده هندسه بکار رفته در بررسی مساله پراکندگی موج تخت از سطح زبر. ۱۲۳
- ۴.۵ تغییرات شدت کل میدان پراکنده شده، I_{tot} ، برحسب زاویه پراکندگی، θ_2 ، به ازای مقادیر مختلف نمای هارست. زاویه فرودی عمودی در نظر گرفته شده و طول موج $\lambda = 50^\circ nm$ است [۱۵۶]. ۱۲۶
- ۵.۵ مقایسه شدت پخشی میدان پراکنده شده از سطح زبر با نمای هارست $H = 0.9$ ، حاصل از رهیافت انتگرال کسری [۱۵۶] و نتیجه حل انتگرال کیرشهف در مرجع [۱۵۵]. ۱۲۷

۶.۵ بستگی شدت میدان پخششی به زاویه پراکندگی، θ_2 ، برای نمای هارست $H = 0.7$ ، $\theta_3 = 0$ و سه طول موج مختلف، $\lambda = 500, 1000, 1500$ nm [۱۵۶]. ۱۲۸

الف. ۱. مقایسه توزیع نرمال گاوسی $pdf \pi^{-1/2} e^{-x^2}$ (خط چین) و توزیع کوشی $pdf \pi^{-1} (1+x^2)^{-1}$ ، یا لوی پایدار با شاخص لوی $\mu = 1$. هر دو به یک بهنجار شده‌اند. تراکم پیرامون صفر برای توزیع گاوسی بیشتر و مشهودتر است. نمودار داخلی، نمایش لگاریتمی دو تابع است که خاموشیِ نمایی آرام‌تر برای توزیع کوشی را نشان می‌دهد. ۱۳۴

الف. ۲. یک ذره بروانی P که در امتداد یک خط حرکت کرده و نور اتساع می‌کند. این ذره هر مرتبه که از مقابل حفره عبور می‌نماید، با نور خود یک لک بر روی فیلم متحرک F باقی می‌گذارد. بازه زمانی هر کدام از این لک‌ها بر روی فیلم از توزیع $f_{1/2, -1/2}(\tau)$ پیروی می‌کند. ۱۳۴

پیش‌گفتار

استفاده از روش‌های احتمالاتی سابقه طولانی در علم فیزیک دارد. بر این اساس، دینامیک سیستم را نه با معادلات حرکت پیچیده و تعینی، که با استفاده از مدل‌های ساده آماری می‌توان توصیف نمود. همچنین با استفاده از تئوری فرآیندهای تصادفی، رفتار اجزای منفرد یک سیستم که تحت اثر نیروی‌های تعینی هستند اما با دینامیک محیط متلاطم پیرامون نیز جفت شده‌اند، بررسی می‌شود. بنابراین، جنبه‌های تصادفی وارد تئوری‌های کلاسیک و پیوسته ترابرد و پخش می‌شوند. به این ترتیب، نقش نمادین گاز ایده‌آل در مکانیک آماری را، حرکت براونی در معادلات پخش ایفا می‌نماید. تئوری حرکت براونی در طی قرن گذشته به شکلی پیوسته مورد مطالعه قرار گرفته و گسترش یافته است. این تئوری قادر است رهیافتی برای مدل‌سازی انواع سیستم‌های با افت و خیز ارائه دهد. امروزه، کاربردهای آن در تمام علوم به چشم می‌خورد، از زیست‌شناسی، شیمی، زمین‌شناسی و مهندسی گرفته تا اقتصاد، کامپیوتر و علوم اجتماعی.

هر چند در طی سال‌های اخیر، مشخص شده است که مدل‌های استاندارد پخش در توصیف پدیده‌های مشاهده شده در محیط‌های بسیار نامنظمی چون نیم‌رساناهای آمورف، سیال‌های متلاطم، سلول‌های زیستی، شیشه‌ها، سطوح متخلخل و بازار سهام با شکست مواجه شده است. مدل‌های مختلفی که برای توصیف این‌گونه سیستم‌ها، جایگزین حرکت براونی استاندارد شده‌اند تحت عنوان کلی فرآیندهای پخش غیرعادی شناخته می‌شوند. تحقیقات انجام شده زیادی حضور پخش غیرعادی را نشان می‌دهند که برای آن میانگین مربع جابجایی نسبت به یک فرآیند گاوسی تندتر یا کندتر رشد می‌کند. می‌توان گفت که منشا پخش غیر گاوسی بازمی‌گردد به حضور همبستگی‌های بلند برد در دینامیک سیستم یا حضور جابجایی‌های بطور غیرعادی بزرگ ذره که توسط توزیع احتمال‌های پهن توصیف می‌شود. درست همانند پخش عادی که با معادله پخش فیک و معادله لانژوین توصیف می‌شود، می‌توان پخش غیرعادی را نیز توسط صورت کسری این معادلات فرمول‌بندی کرد. فرآیندهای تصادفی مربوط به پخش غیرعادی شامل حرکت براونی کسری و حرکت لوی هستند.

به عنوان مثال برای آشکار شدن بیشتر مساله می‌توان به استخراج از منابع زیرزمینی نظیر منابع نفتی و آبی، انتقال و آبیاری زمین‌های کشاورزی، خشک‌سازی چوب در صنعت به عنوان مواردی که در بسترهای متخلخل و از طریق فرآیندهای پخشی صورت می‌گیرند، اشاره کرد. بسته به نوع و میزان تخلخل این محیط‌ها مکانیزم پخش حاکم متفاوت خواهد بود. در بسیاری از موارد گزارش شده در این گونه محیط‌ها، نوع پخش مشاهده شده مطابق با الگوی حاصل از حل معادلات پخش متداول نیست. در واقع بسته به ناهمگنی‌های موجود در محیط، فرآیندهای زیرپخش یا فراپخش می‌تواند رخ دهد.

شناخت مکانیزمی که رفتار پخش غیرعادی را به درستی توصیف کند، می‌تواند در زمینه بهره‌برداری بهینه از منابع زیرزمینی یا رسیدن به کیفیت بیشینه تولیدات در صنعت نقش بسزایی داشته باشد.

ساختار رساله پیش رو به این شرح می‌باشد. فصل اول به صورت مختصر به پیشرفت تاریخی تئوری فرآیندهای تصادفی می‌پردازد. چند روش و مفهوم استاندارد مانند حرکت تصادفی، معادلات لانژوین و فوکر-پلانک و قضیه حد مرکزی معرفی می‌شوند. فصل دوم به مطالعه‌ی مدل‌هایی می‌پردازد که منجر به فرآیندهای پخش غیرعادی می‌شوند. مفاهیم مهم و پرکاربرد این حیطه نظیر توزیع لوی، ارگودیسیتی، زمان اولین عبور و اثر تحولات گذشته سیستم معرفی شده و در این مدل‌ها بررسی می‌شوند. مشتقات کسری ابزاری رایج در بررسی شاخه‌های مختلف علمی بوده است. به عنوان مثال برای توصیف سیستم‌های مکانیکی، فرآیندهای پخشی در فیزیک، شیمی و زیست‌شناختی، در بازاریابی مالی و همچنین در سیستم‌های آشوبناک بکار رفته‌اند. در فرآیندهای پخشی، مشتقات کسری برای بدست آوردن انواع معادلات پخش کسری مورد استفاده قرار می‌گیرند. آن‌ها قادرند فرآیندهای زیرپخش و فراپخش را توضیح دهند. در فصل سوم آشنایی مختصری با دانش ریاضیات کسری و برخی از علگرهای پرکاربرد آن ارائه می‌شود. عملگرهای مشتق و انتگرال با مرتبه غیر صحیح مانند عملگر ریمان-لیوویل، کاپوتو و گرواند-لتنیکوف. اثر رخدادهای گذشته‌ی سیستم نقش مهمی در دینامیک فرآیند مورد مطالعه دارد. به‌طور خاص آثار این رخدادهای بر روی خواص آماری حرکت بروانی بازمقیاس شده‌ی نامقید، همچنین حالت مقید آن در حضور پتانسیل هارمونیک در فصل چهارم مورد مطالعه قرار می‌گیرد. خواصی همچون ارگودیسیتی و زمان اولین عبور بررسی می‌شوند پدیده انتشار امواج الکترومغناطیسی از سطوح زبر به عنوان نمونه‌ای کاربردی از فرآیندهای پخش غیرعادی، از دیدگاه فضای کسری با بکارگیری ابزار ریاضیات کسری در فصل پنجم مورد بررسی قرار می‌گیرد. نشان داده می‌شود که این پراکندگی در یک محیط بی‌نظم در واقع بازتابی ساده در فضایی با بعد غیر صحیح است.

فصل اول

مدل‌سازی‌های تصادفی پدیده پخش

۱.۱ ول‌گشت

در سال ۱۹۰۵، نامه‌ای از ریاضیدان انگلیسی پیرسون^۱ در نیچر^۲ چاپ شد که در آن مساله "ول‌گشت" را برای مخاطبان مطرح نمود [۱]: "شخصی از نقطه O شروع به حرکت نموده و مسیر مستقیمی به طول l را می‌پیماید؛ سپس، به اندازه‌ای دلخواه چرخیده و دوباره مسافت l بر خط مستقیم را طی می‌کند. و این کار را n مرتبه تکرار می‌کند. حال به دنبال این احتمال هستیم که این فرد بعد از n گام، در فاصله بین r و $r + dr$ از مکان اولیه‌اش باشد.

این مساله بسیار جالبی است که من فقط توانستم جواب بسته‌ی آن را برای مورد دو قدم پیدا کنم و فکر می‌کنم که تنها بتوان جوابی برای آن به صورت سری توانی بر حسب $1/n$ یافت، که در آن n بسیار بزرگ است."

بنابراین، مساله ول‌گشت اولین بار توسط پیرسون و در قالب یک آزمایش ذهنی به جامعه فیزیک معرفی شد. نخستین کاربردی که به ذهن او رسید، مساله مهاجرت کاتوره‌ای بود. در پی همکاری با ولدون^۳ جانورشناس، او به بررسی مساله هجوم حشرات در جنگل علاقه‌مند شد [۲].

اما مفهوم تئوریک مساله کاربردهای فراوانی پیدا کرد و برای مدل‌سازی پدیده‌های بسیاری در شاخه‌های علمی مختلف

^۱ Karl Pearson

^۲ Nature

^۳ Walter F. R. Weldon

به کار گرفته شد. پاسخ مورد علاقه برای حد n های بزرگ توسط رایلی^۱ به دست آمد. او تشابه این مساله را با موضوعی از یک حوزه به ظاهر متفاوت به دست آورد. در مطالعاتش در زمینه آکوستیک، برهم نهی امواج صوتی $x_j(t)$ با فرکانس ω و دامنه مشترک a اما فاز متفاوت ϕ_j ، را در نظر گرفت [۳]. فرض می کنیم که $x_j(t) = \text{Re}[z_j e^{i\omega t}]$ نشان دهنده تحول زمانی یک موج باشد که در آن عدد مختلط $z_j(t) = a e^{i\phi_j}$ در بردارنده دامنه و انتقال فاز است. جمع بستن n موج مستقل یک سیگنال تولید می کند $X_n(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) = \text{Re}[Z_n e^{i\omega t}]$ با $Z_n = \sum_{j=1}^n z_j = A_n e^{i\phi_n}$. اگر ϕ_j ها توزیع کاتوره ای یکنواخت داشته و مستقل باشند، آن گاه Z_n دقیقاً همان ول گشت پیرسون است در صفحه مختلط z . دامنه تک موج a معادل است با طول گام l ، فازهای کاتوره ای نشان دهنده زوایای کاتوره ای حرکت هستند و دامنه موج حاصل A_n فاصله r از مبدا، بعد از n حرکت است. رایلی قادر بود تا نتایج حدی را به دست آورد و یک هفته بعد از مطرح شدن مساله از سوی پیرسون چنین پاسخ داد: "اگر n بسیار بزرگ باشد، این احتمال باید به این شکل باشد،

$$\frac{2}{n} \exp\left(-\frac{r^2}{n}\right) r dr. \quad (1.1)$$

در ادامه، ایده های مشابهی در تحلیل امواج با منشا فیزیکی متفاوت، از جمله سیگنال های الکتریکی نوسانی [۴]، پرتو لیزر همدوس [۵-۸] و پراکندگی امواج رادارها از سطوح زبر هواپیماها [۹]، وارد شد. همچنین در مواردی تصحیحات لازم بر این مدل انجام شد مانند جایگزین کردن طول ثابت گامها l با مقداری کاتوره ای برای توضیح دادن تابش میکروموجها از سطح دریا [۱۰]. همچنین، برای افزایش دقت رابطه (۱.۱) بر حسب سری توانی در n های بزرگ تلاش هایی صورت گرفت [۱۱].

در زیست شناسی نیز کاربردهای فراوانی وجود داشت. به عنوان مثال، برخی از باکتریها از تاژک^۲ برای حرکت میان محیط سیال استفاده می کنند. مشاهده شد که حرکت آنها به صورت تکه ای بر خط مستقیم است [۱۲] و می توان آنرا به عنوان ول گشت سه بعدی یا پروازهای کاتوره ای با طول پرش کاتوره ای مطالعه کرد. وقتی که گرادیان دمایی یا شیمیایی بر فرآیند حاکم باشد، زوایای چرخش نیز ثابت نخواهند بود. همچنین تصحیحات و تعمیم هایی بر مدل صورت گرفت تا بتواند استراتژی جستجوی غذای پرندگان را توضیح دهد [۱۳-۱۶].

اما فاصله r از مبدا همواره کمیت مورد علاقه نیست. زنجیره ایده آل^۳ ساده ترین مدل توصیف پلیمرهای طبیعی و مصنوعی

^۱ John William Strutt, Lord Rayleigh

^۲ Flagella

^۳ Ideal Chain

است [۱۷، ۱۸]. پلیمر رشته ملکولی بلندی است که از تعداد زیادی اجزای همانند و هم‌خط به نام مونومر^۱ تشکیل شده است. مدل زنجیره ایده‌آل فرض می‌کند که مونومرها اجسام صلب خطی شکلی هستند. اتصال بین اجزا به گونه‌ای است که اجازه چرخش آزاد را می‌دهد. بنابراین، تشکیل یک زنجیره از n مونومر معادل است با یک تک پرواز کاتوره‌ای حاصل از n پرواز به طول l . وقتی پلیمر در یک محلول قرار می‌گیرد، فاصله دو انتها، r ، دارای اهمیت نمی‌باشد. بلکه کمیت مهم شعاع ژیراسیون^۲ یا همان ریشه میانگین مربع^۳ فاصله هر اتصال از مرکز جرم است. نشان داده شد که ول‌گشت مدل بسیار مناسبی برای توضیح شکل‌گیری پلیمرهاست [۱۹].

۲.۱ تئوری احتمال در فیزیک، فراتر از تخمین خطا

از لحاظ ریاضی، ایده ول‌گشت دقیقاً توسط پیرسون خلق نشد. به‌دور از هرگونه کاربرد در جهان واقعی، جمع بردارهای کاتوره‌ای دو بعدی با توزیع یکسان و مستقل قبل از او توسط شولز^۴ مورد مطالعه قرار گرفت [۲۰]. بردارهای کاتوره‌ای را می‌توان طول گام‌های جهت‌دار قلمداد کرد. حداقل، حالت یک بعدی اش، به‌صورت گسترده در تئوری احتمال، که به بازی‌های شانس^۵ مربوط است، بررسی شده و می‌شود [۲۱]. گام‌های کاتوره‌ای که در یک بعد به عقب و جلو می‌روند، معادلند با برد و باخت در طی بازی. این تشابهات از دیدگاه امروزی واضح به نظر می‌رسد؛ اما در آغاز قرن بیستم، شاخه کاربردی تئوری احتمال خیلی گسترده نبود. در آن دوران افراد در رشته‌های مختلف جامعه‌ی علمی خیلی همکاری نزدیک نداشتند و این طبیعی بود که دانشمندان بی‌اطلاع از هم و به‌صورت موازی روی موضوعات یکسان کار کنند. به‌طوری که حتی نمی‌توان انتظار داشت پیرسون از اطلاعات مربوط به این زمینه در رساله دکتری در رشته اقتصاد مطلع بوده باشد؛ کار ریاضیدان فرانسوی، بچلیر^۶ در ۱۹۰۰. همین‌طور هم‌دوره‌ای هایش اینشتین^۷، رایلی و اسملوکوفسکی^۸ وضعیت مشابهی داشتند. چندین نکته مطرح شده در این رساله می‌توانست برای همه آن‌ها جالب توجه باشد. او در این کار، نوسان‌های بازار سهام فرانسه را با استفاده از شکل ساده (یک بعدی) ول‌گشت (بدون به‌کار بردن این نام) مدل‌سازی کرد. او حتی

^۱ Monomer

^۲ Radius of Gyration

^۳ Root Mean Squared

^۴ Ch.M. Schols

^۵ Games of Chance

^۶ Bachelier

^۷ Einstein

^۸ Marian Smoluchowski

استدلال‌های احتمالاتی را بیان کرد تا نشان دهد که آمار این فرآیند در زمان‌های بلند، با استفاده از معادله پخش^۱ (که پنج سال بعد توسط اینشتین و اسملوکوفسکی به دست آمد) توصیف می‌شود و پاسخ گاوسی را ارائه کرد.

در حیطه‌ی تئوری ول گشت، باید اعتبار معرفی مدل احتمالات به جامعه فیزیک را به پیرسون داد، جامعه‌ای که چندان رغبتی نیز به این مدل نداشت. پیرسون و رایلی سهم بسزایی در پیشبرد روش‌های احتمالاتی جهت توصیف پدیده‌های ذاتا تعینی داشتند. بنیان آنچه امروز به عنوان فیزیک آماری می‌شناسیم، بازمی‌گردد به فعالیت افرادی چون ماکسول^۲، بولتزمن^۳، گیس^۴ و دیگر افراد تا ۱۸۶۰. اما تئوری فیزیکی که آن‌ها دنبالش بودند، تئوری جنبشی گرما، هنوز راه زیادی تا تکامل نهایی داشت و مورد بحث بود. انتقادهای وارد بر آن تنها ریشه فیزیکی نداشت، بلکه گاه ایرادهای فلسفی بر آن وارد می‌شد. از یک جهت، برخی دیدگاه‌های اثبات‌گرایانه^۵ سعی داشتند تا در درجه اول پیشنهاد وجود ملکول و اتم را رد کنند. در زمانی که تئوری موفق ترمودینامیک بر پایه یک سری فرض‌های بدیهی استوار بود، تلاش برای اثبات چیزی که حتی دیده نمی‌شود و ویژگی‌های آن قابل اندازه‌گیری نیستند، لزومی نداشت. از سویی دیگر، بعضی با دیدگاه آماری برای مسایل قطعی و تعینی فیزیک مشکل داشتند. از دیدگاه فیزیکدان‌ها جایگاه تئوری احتمالات در فیزیک، تنها تخمین خطا بود که ماکسول از آن برای ساختن معادلات اولیه‌اش استفاده کرد.

کشفیات شروع قرن ۱۹م، دیدگاه علمی و فلسفی فیزیکدان‌ها را تغییر داد. نیازها برای پیدا کردن ابزارهای پیشرفته آماری و بنیان‌های ریاضی با ظهور مکانیک کوانتومی، اقتصاد محاسباتی و نیز شکل‌گیری تئوری اتمی و جنبشی گرمایی، گسترش یافت.

۳.۱ ملکول‌ها و گرما: احتمال وجود رابطه میان آن‌ها

فرض اولیه تئوری جنبشی گرمایی این است که ماده پیوسته نیست، بلکه تشکیل شده است از ذرات بسیار ریزی که مدام در حال حرکت تهییجی^۶ هستند. ویژگی‌های ماکروسکوپیک ماده به عنوان اثر جمعی دینامیک میکروسکوپیک این ذرات شناخته می‌شود: فشار وارد بر دیواره‌ی احاطه کننده، ناشی از بمباران دیوار توسط ذرات است و هرگونه انتقال گرمایی در

^۱ Diffusion Equation

^۲ Maxwell

^۳ Boltzmann

^۴ Josiah Gibbs

^۵ Positivistic Attitude

^۶ Agitated Motion

واقع انتقال انرژی جنبشی است؛ که به علت برخورد یا ترکیب ذرات آزاد می‌شود. به این ترتیب، تئوری جنبشی با رهیافت‌های دیگر در این زمینه در رقابت است. رهیافت‌هایی نظیر تئوری کالوریک گرما^۱ که پیشنهاد می‌کند، گرما با استفاده از سیالی شناور از جسم گرم به جسم سرد منتقل می‌شود. و البته در این زمان، هنوز تئوری اتر در انتقال امواج الکترومغناطیسی^۲ کاملاً کنار گذاشته نشده بود. با شروع قرن ۱۹م، وجود اتم‌ها و ملکول‌ها نشان داده شد. مطالعات زیادی در فیزیک و شیمی از جمله کارهای بویل^۳، لوساک^۴، دالتون^۵ و آوگادرو^۶ نشان دادند که هر ماده تشکیل شده است از تعداد صحیحی از ملکول‌ها و این تعداد تعریف کننده‌ی ویژگی اصلی هر ماده است. این ملکول‌ها خود از اتم‌های غیرمرئی تشکیل شده‌اند و هر نوع گذار شیمیایی میان مواد، نیازمند تجزیه یا ترکیب اتم‌ها برای تشکیل ملکول‌های جدید است.

اما این که انرژی دقیقاً به شکلی ذخیره و میان ملکول‌ها توزیع شده است، و چگونه با یکدیگر برهمکنش دارند و حتی این که اندازه و جرم آنها چقدر است، مشخص نبود. تا حدی، تئوری اتمی با ایده کالوریک سازگار بود، یعنی پر کردن فضای بین ملکول‌ها به عنوان ابزاری برای انتقال انرژی، و بنابراین گرما میان آنها. تئوری جنبشی برای گاز ایده‌آل که توسط ماکسول و بولتزمن شکل گرفت و گسترش یافت^۷، فرض‌های دقیقی درباره ذات و دینامیک ملکول‌ها در نظر گرفت: اول این که اندازه آنها در مقایسه با فاصله بینشان بسیار کوچک است؛ برهمکنش میان خود ملکول‌ها و برهمکنش میان ملکول‌ها و دیواره‌ی احاطه کننده آنهاست؛ برخوردها کشسان هستند؛ به غیر از لحظه برخورد، برهمکنش میان ملکول‌ها قابل چشم‌پوشی است. به علت حضور تعداد بسیار زیادی از ملکول‌ها در یک حجم میکروسکوپی از گاز، می‌توان دینامیک آنها را به صورت آماری بررسی کرد (که تعبیر آماری تعادل ترمودینامیکی^۸، قضیه همپاری^۹ و قانون دوم ترمودینامیک^{۱۰} را ایجاب می‌کند). قطعاً بدون نتایج آزمایشگاهی دقیق، توجیه این فرض‌های ریز دشوار خواهد بود.

مشاهدات نزدیک در این زمینه در کار گیاه‌شناس اسکاتلندی، بروان^{۱۱} در سال ۱۸۲۸ [۲۲] انجام شد. وی گرده‌های گل معلق در آب را با استفاده از میکروسکوپ مطالعه می‌کرد. در این مطالعات، ذرات کم تعدادی را مشاهده نمود که با خارج

^۱ Caloric Theory of Heat

^۲ Aether Transmitting Electromagnetic Waves

^۳ Robert Boyle

^۴ Joseph Gay-Lussac

^۵ John Dalton

^۶ Amedeo Avogadro

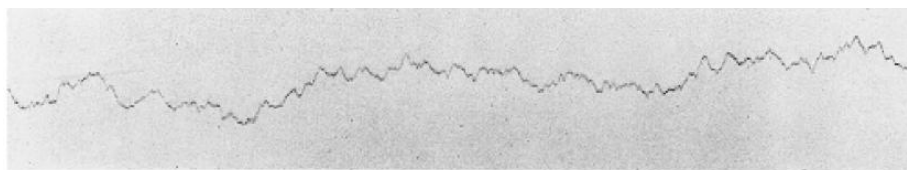
^۷ Maxwell and Boltzmann's Idea of a Kinetic Theory

^۸ Thermodynamic Equilibrium

^۹ Equipartition Theorem

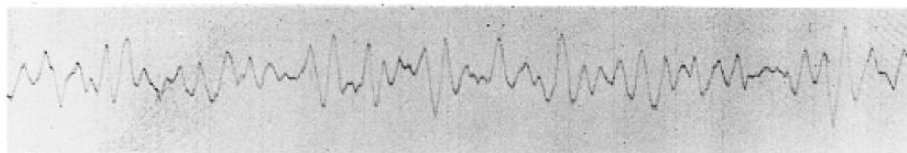
^{۱۰} Second Law of Thermodynamics

^{۱۱} Robert Brown



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).
 Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $1 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $dx = 1$ mm. a) Atmosphärendruck. Temperatur 13° C

Fig. 5 a



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).
 Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-9}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $1 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $dx = 1$ mm. b) $1 \cdot 10^{-3}$ mm Hg. Temperatur 13° C

Fig. 5 b

شکل ۱.۱: مسیر حرکت بروانی برای یک آینه کوچک که از طریق یک رشته نخ کوارتز معلق مانده است. چرخش‌های نامنظم آینه با دنبال کردن پرتو بازتابیده از آن حاصل می‌شود. این اطلاعات بسیار دقیق، به کاپلر اجازه‌ی پیدا کردن عدد آوگادرو را داد. از آن‌جا که رشته نخ بر آینه گشتاور پیش‌پیشی وارد می‌کند، حرکت حاصل، حرکت بروانی هارمونیک محدود است. در این دو نمونه ارائه شده، تنها فشار متفاوت است. در هر دو مورد حرکت میرا است.

شدن از داخل گرده‌ها شروع به حرکتی اعوجاجی می‌کردند. رفتار مشابهی در ۱۷۸۵ توسط فیزیکدان هلندی، ایگنهاووز^۱ برای ذرات ذغال‌سنگ بر سطح الکل گزارش شده بود. او نشان داد که چنین رفتاری منحصر به گیاهان نیست. مقدار کمی از ماده غیر ارگانیک در این مایع نیز همان نوع حرکت را داشت. بدین ترتیب، جاندار بودن عامل حرکت منتفی شد. در ادامه آزمایش‌های مختلف همچنان انجام شد، و افراد زیادی در این حیطه فعالیت نمودند، از جمله وینر^۲ ۱۸۳۶ [۲۳] و گوی^۳ ۱۸۸۸. صرف‌نظر از مدت مشاهده، دمای مایع، شدت نور تابیده، طول موج و میزان عایق‌بندی جهت جلوگیری از نوفه، این نوع حرکت نامنظم دیده می‌شد. نمونه‌ای از حرکت بروانی که حدود صد سال پس از کشف اولیه‌ی بروان در آزمایشگاه توسط کاپلر^۴ مشاهده شد [۲۴] را می‌توان در شکل (۱.۱) دید.

^۵ این کشفیات پیش‌زمینه‌ی بررسی و مطالعه‌ی حرکت بروانی (نامی که بعداً توسط اینشتین به این رفتار اطلاق شد) در قالب تئوری جنبشی را فراهم آورد. ملکول‌های آب بسیار کوچک‌تر از آن هستند که بتوان آن‌ها را به‌صورت جداگانه ردیابی کرد؛

^۱ Jan Ingenhousz

^۲ Christian Wiener

^۳ Louis Georges Gouy

^۴ Eugen Kappler

^۵ از لحاظ تاریخی این‌که این پدیده حرکت بروانی نامیده شد را می‌توان حاصل شانس بروان دانست. اینشتین که این تئوری را بنا نهاد، در دفتر خود به‌دور از دیگران به فعالیت می‌پرداخت و اطلاعی از کار ایگنهاووز نداشت و نام بروان را انتخاب نمود. هرچند که حتی به کارهای اصلی بروان نیز دسترسی نداشت.

بنابراین در میکروسکوپ، به شکل سیالی پیوسته ظاهر می‌شوند. اما ذره‌ی وارد شده در آب از مرتبه‌ی میکرون، به اندازه کافی بزرگ است که قابل تشخیص باشد و در عین حال آن‌قدر کوچک است که برخوردهای آن با ذرات سیال پیرامونش مشاهده شود. چنین توضیحاتی اگرچه قانع کننده و دقیق به نظر می‌رسند، اما تلاش‌های اولیه انجام شده بر این اساس، در پیش‌بینی مشاهدات موجود در آزمایشگاه شکست خورد. که به دلیل توجیحات نامناسب تحلیلی بود. برای نمونه، در این زمینه نگلی^۱ سلول‌شناس سوئیسی چنین استدلال کرد که جرم ذرات معلق در مقایسه با ملکول‌های آب چندین مرتبه بزرگ‌تر است، بنابراین هرجابجایی بعد از یک تک برخورد به اندازه‌ای کوچک است که قابل مشاهده نمی‌باشد [۲۵، ۲۶]. اما توجیه آماری کاملاً متفاوت برای این رفتار دسته جمعی، توسط کاربونل^۲ به این نحو ارائه شد [۲۷]: ” در مورد یک سطح با مساحتی معین و مناسب، برخوردهای ملکولی مایع که منجر به وارد آمدن فشار می‌شوند، باعث اختلال در حرکت ذرات معلق نمی‌شوند؛ چراکه این ملکول‌ها نیرویی یکسان و در تمام جهات بر ذره وارد می‌کنند. اما اگر سطح دارای مساحتی کمتر از میزان لازم برای جبران سهم بی‌نظمی‌ها باشد، دیگر دلیلی برای تعریف فشار میانگین وجود ندارد. از این رو، باید فشار نابرابری را که پیوسته از مکانی به مکان دیگر تغییر می‌کند یافت. در این حالت دیگر، قانون تعداد زیاد^۳ ذرات منجر به فشار یکسان نمی‌شود. و هر چه اندازه ذرات کوچک‌تر باشد، نتیجه واضح‌تر خواهد بود و نوسان‌ها شدیدتر می‌شوند.”

بحث در این مورد بسیار زیاد و جالب است. تمرکز فیزیکی‌دان‌ها به صورت کلاسیک بر کمیت‌های میکروسکوپی میانگین، مانند جابجایی میانگین در هر برخورد بود. سوال مطرح این بود که اگر قرار باشد انحراف‌ها از مقدار میانگین در نظر گرفته شود، چگونه می‌توان به درستی یک تصویر ماکروسکوپیک ساخت. به ویژه، مکانیزم تحلیلی دقیق برای قانون تعداد زیاد ذرات و ارتباط آن با قضیه حد مرکزی^۴ (در ادامه توضیح داده می‌شود) هنوز در آن زمان جزو دانش عمومی نبود. سرانجام، تلاش‌های اینشتین [۲۸] و اسملوکوفسکی [۲۹] نتایج کمی و احتمالاتی برای تئوری حرکت بروانی را به بار آورد.

۱.۳.۱ آلبرت اینشتین و معادله پخش

اینشتین دو مفهوم موازی در درک پخش را ادغام کرد. نخست، یک مجموعه بزرگ از ذرات ریزی که در یک سیال شناورند برحسب گرادیان غلظت $f(x, t)$ توصیف می‌شوند. بر این اساس $f(x, t)dx$ تعداد ذرات محصور در حجم بسیار کوچک اطراف نقطه x در زمان t را می‌دهد. با در نظر گرفتن اصول نظریه جنبشی، اینشتین قانون فشار اسموتیک^۱ را برای ذرات

^۱ Karl von Nageli

^۲ Ignace Carbonelle

^۳ Law of Large Numbers

^۴ Central Limit Theorem

^۱ Osmotic Pressure



شکل ۲.۱: آلبرت اینشتین، بنیان‌گذار تئوری حرکت بروانی.

معلق به کار برد، این قانون نظیر قانون گاز ایده‌آل است. بنابراین وی همانند فیک^۲ به این نتیجه رسید که $f(x, t)$ باید از قوانین کلاسیک پخش پیروی کند. به‌ویژه در حالت تعادل دینامیکی، هرگونه جریان ایجاد شده توسط نیروهای خارجی سراسری، نظیر نیروی الکتریکی یا گرانش، توسط یک جریان پخش $-D(\frac{\partial f}{\partial x})$ جبران می‌شود؛ این جریان ناشی از تمایل ذرات برای پر کردن نواحی با غلظت کمتر است. ثابت پخش D دارای ابعاد m^2/sec است و نشان دهنده‌ی شدت جریان پخش است. همچنین اینشتین فرض کرد که ذرات به صورت کره‌هایی تحت اصطکاک استوکس^۳ هستند و با استفاده از قانون فشار اسموتیک به رابطه زیر برای ثابت پخش رسید،

$$D = \frac{R\theta}{6\pi\eta r N}, \quad (2.1)$$

در این رابطه R ثابت گاز ایده‌آل، θ دمای سیال، η ثابت اصطکاک آن، r شعاع ذرات و N عدد آوگادرو است. در گام بعدی، اینشتین با رویکردی متفاوت با مساله برخورد کرد. ذرات بروانی آنقدر بزرگ هستند (از مرتبه میکرون) که بتوان آن‌ها را جداگانه مطالعه کرد. او فرض مهمی را در نظر گرفت به این قرار که، مادامی که بازه‌های زمانی خیلی کوچک نباشند، هر ذره حرکتی کاملاً مستقل از دیگر ذرات انجام می‌دهد؛ همچنین حرکت یک ذره‌ی بخصوص در بازه‌های زمانی متفاوت نیز، حرکتی مستقل از هم هستند. در این‌جا بازه‌ی زمانی τ را معرفی می‌کنیم که در مقایسه با زمان‌های مشاهده بسیار کوچک است، اما به اندازه کافی بزرگ است که بتوان حرکت‌های بین دو بازه‌ی متوالی τ را مستقل در نظر گرفت. سپس او احتمال $\phi(\Delta)$ را برای جابجایی به اندازه Δ هر ذره بروانی در بازه‌ی زمانی $t + \tau$ در نظر گرفت. $\phi(\Delta)$ نسبت به Δ متقارن و مستقل از t و زمان‌های گذشته است. بنابراین، تعداد ذرات در یک حجم کوچک در اطراف x برطبق رابطه زیر با

^۲ Fick^۳ Stokes Friction

زمان تحول می‌یابد،

$$f(x, t + \tau) dx = dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \Delta, t) \phi(\Delta) d\Delta. \quad (3.1)$$

با اعمال بسط تیلور نسبت به τ و Δ بر روی هر دو طرف این رابطه، معادله نهایی زیر را خواهیم داشت،

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (4.1)$$

که ضریب D به این صورت تعریف می‌شود،

$$D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \phi(\Delta) d\Delta. \quad (5.1)$$

رابطه (۴.۱) فرض اولیه مبنی بر حاکم بودن معادله پخش کلاسیک بر تحول گرادیان غلظت را تایید می‌کند، هرچند که این رهیافت بر تصویر تک ذره‌ای استوار است. ثابت پخش D از طریق رابطه (۵.۱) با احتمال $\phi(\Delta)$ ، که بر جابجایی‌های میکروسکوپی حاکم است، مرتبط می‌باشد. روش اینشتین برای پیدا کردن این کمیت به این صورت بود. بعد از ثبت حرکت ذرات، می‌توان تمام مسیرهای ذرات را به گونه‌ای انتقال داد که مبدا دستگاه مختصات مکانی، $x = 0$ ، منطبق بر مبدا حرکت در $t = 0$ باشد. با توجه به همگنی فضایی، غلظت ذرات انتقال یافته همچنان باید از معادله پخش تبعیت کند. شرط اولیه نیز به این صورت است^۱، $f(x, t = 0) = n\delta(x)$ که $n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx$ تعداد کل ذرات بروانی معلق است. پاسخ معادله (۴.۱) توزیع معروف گاوسی است،

$$\frac{1}{n} f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (6.1)$$

بنابراین ثابت پخش از روی توزیع جابجایی تمام ذرات $f(x, t)$ به دست می‌آید. راه ساده‌تری که اینشتین پیشنهاد داد

^۱ در این‌جا $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک است، تابع تعمیم یافته‌ای که از رابطه $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)dx = g(0)$ برای هر تابع خوش‌رفتار $g(x)$ تعریف می‌شود. اینشتین از این تابع استفاده نکرد بلکه مفهوم آن‌را به کار برد.



شکل ۳.۱: اسملوکوفسکی و کار بر روی جنبه میکروسکوپی حرکت بروانی.

محاسبه میانگین مربع جابجایی برای هر ذره در راستای x یا به عبارتی میانگین هنگردی است،

$$\langle X^2(t) \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, t) dx = 2Dt. \quad (7.1)$$

ثابت پخش با میانگین‌گیری مربع جابجایی بر روی تعداد زیادی از مسیرهای ذره‌ی بروانی به دست می‌آید. در ترکیب با رابطه (۲.۱) می‌توان عدد آووگادرو را از طریق این روش یافت؛ که کمیت مهمی در تئوری اتمی است.

ویژگی منحصر کار اینشتین در به کار بردن رهیافت دوگانه‌اش بود: از یک سو، با استفاده از گرادیان غلظت، قوانین فشار و معادلات کلاسیک پخش، نگاه پیوستار به ذرات داشت. از سوی دیگر، از توصیف احتمالاتی ذرات بهره برد و مسیر تک ذره را مورد بررسی قرار داد. اینشتین با تمرکز مستقیم بر مختصه مکانی x در زمان‌هایی بزرگ در مقایسه با τ ، از مواجهه با مشکلات پیش رو در دیگر توصیف‌های آماری در امان ماند، مشکلاتی نظیر تناقض در تخمین سرعت لحظه‌ای ذره بروانی یا میانگین جابجایی این ذره بر برخوردهای میکروسکوپی. این موارد ظریف بعداً توسط اسملوکوفسکی مورد توجه قرار گرفت.

۲.۳.۱ رهیافت اسملوکوفسکی و ول‌گشت

اینشتین ویژگی‌های آماری دینامیک ذرات بروانی را بر حسب تابع احتمال جابجایی‌ها $\phi(\Delta)$ تعریف کرد. او یک سری فرض‌های منطقی مانند استقلال x و t از یکدیگر را در نظر گرفت، اما صورت تابعی آن‌ها و نیز رابطه با دینامیک محیط اطراف را مشخص نکرد. از این رو رهیافت ارائه شده توسط اسملوکوفسکی در ۱۹۰۶ [۲۹] بیشتر، جنبه میکروسکوپی دارد چنان‌که این تئوری، اثر تک برخوردها با ملکول‌های نامرئی گاز یا سیال را مدل‌سازی می‌کند. اساس کار وی ول‌گشت است.

همراستا با محاسباتش، اسملوکوفسکی چندین تصور غلط موجود در گذشته را گوشزد نمود. از آن جمله، به عقیده‌ی نگلی

بر کوچک بودن جابجایی‌ها اشاره کرد. افزایش سرعت یک ذره بروانی با قطر 10^{-4} cm ، در برخورد با یک ملکول سبک وزن آب باید چیزی از مرتبه 10^{-6} cm/sec باشد. اما این بسیار کمتر از ویژگی‌های حرکتی مشاهده شده برای ذره بروانی است. علی‌رغم وجود تعداد زیادی از این برخوردها در ثانیه، طبق تعریف نگلی بدلیل جهت‌گیری بدون بایاس، جابجایی خالص باید صفر باشد. اما اسملوکوفسکی با این نتیجه‌گیری مخالف بود و عقیده داشت این همان استدلال اشتباهی است که در مورد پرتاب تاس در بازی خطر^۱ انجام می‌شود که بازیکن اعتقاد دارد بیش‌تر مبلغ شرط‌بندی خود از دست نمی‌دهد. در n پرتاب تاس، احتمال m مرتبه برد $p(m; n)$ از رابطه زیر نتیجه می‌شود،

$$p(m; n) = \frac{n!}{2^n m!(n-m)!} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{m}. \quad (۸.۱)$$

برای m برد از n مرتبه، دستاورد کل $v = 2m - n$ حاصل می‌شود. از آن‌جا که ارجحیتی در بازی وجود ندارد، $p(m; n) = p(n - m; n)$. در نتیجه میانگین سود حاصل شده $\langle v \rangle = 0$ است. اما میانگین انحراف از صفر برابر است با،

$$\langle |v| \rangle = \sum_{m=0}^n |2m - n| p(m, n) = 2 \sum_{m=n/2}^n \binom{n}{m} \frac{2m - n}{2^n} = \frac{n}{2^n} \binom{n}{n/2},$$

(۹.۱)

که برای n ‌های بسیار بزرگ 2 به این صورت خواهد بود،

$$\langle |v| \rangle \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}. \quad (۱۰.۱)$$

بنابراین فردی که قصد n بار بازی دارد، باید انتظار برد یا باختی از مرتبه \sqrt{n} داشته باشد. برگردیم به ول‌گشت، مولفه سرعت v_x ذره بروانی در راستای x ، فرضاً در هر برخورد با یک اندازه ثابتی افزایش (برنده) یا کاهش (بازنده) می‌یابد. در نتیجه، متوسط سرعت صفر خواهد بود، $\langle v_x \rangle = 0$ ، اما سرعت متوسط (مقدار مطلق سرعت) $\langle |v_x| \rangle$ به صورت جذر n افزایش می‌یابد. در یک ثانیه، ذره بروانی معلق در یک گاز حدود $n = 10^{16}$ برخورد و ذره در سیال آب $n = 10^{20}$ برخورد

^۱ Hazard یا بازی خطر، بازی تاس معروف در قرن‌های ۱۷ و ۱۸ بود. قاعده بازی پیچیده بود، اما اسملوکوفسکی از قواعد ساده ول‌گشت معروف برای توصیف استفاده کرد. بازیکن روی مقدار معینی شرط‌بندی می‌کند، و در هر مرحله از پرتاب تاس احتمال برد یا باخت مساوی است.

^۲ با استفاده از رابطه استرلینگ $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$

را تجربه می‌کند. در این تصویر بسیار ساده، افزایش سرعت می‌تواند چیزی از مرتبه به ترتیب 10^2 یا 10^4 cm/sec باشد. بنابراین اسملوکوفسکی نشان داد که چگونه مجموع یک ول‌گشت بدون بایاس، می‌تواند از مقدار صفر مطلق پیش‌بینی شده، انحراف داشته باشد. در حقیقت، بر طبق قضیه حد مرکزی (که در ادامه بیان می‌شود)، در n ‌های بزرگ، این فرم بستگی به جذر n یک نتیجه کلی است.

در حالی که این نوع نگاه مساله نگلی را حل می‌کرد، این ول‌گشت به عنوان یک مدل کامل برای توصیف ذره بروانی باید کنار گذاشته شود. همان‌طور که اسملوکوفسکی بیان نمود، رابطه (۱۰.۱) افزایش دائمی سرعت و در نتیجه انرژی جنبشی را ایجاد می‌کند. نکته‌ی مهم در تئوری فوق، عدم وابستگی احتمال برخوردها به سرعت است. در عمل هرچه ذره در یک جهت خاص سرعت بیشتری داشته باشد، تعداد برخوردهای بیشتری را در آن جهت با ملکول‌های حلال تجربه می‌کند. برخوردها ذره را پیش می‌برند، اما باعث ایجاد پدیده اصطکاک نیز می‌شوند. در نهایت، توزیع سرعت و به‌ویژه سرعت متوسط به یک مقدار محدودی می‌رسند. طبق تئوری جنبشی ماکسول، این همان چیزی است که حد ترمودینامیکی را تعریف می‌کند. به صورت دقیق‌تر، در یک سیستم در حالت تعادل، تمام ذرات صرف‌نظر از شکل، اندازه و وزن، باید میزان مساوی انرژی جنبشی داشته باشند. با فرض این که ذرات بروانی، ذراتی کروی با جرم M و سرعت V باشند و ملکول‌های آب را به صورت نقطه‌ای با جرم m و سرعت v در نظر بگیریم، خواهیم داشت،

$$\langle V^2 \rangle = \frac{m}{M} \langle v^2 \rangle. \quad (11.1)$$

بر اساس این رابطه، اسملوکوفسکی توانست به صورت غیر دقیق سرعت متوسط ذره بروانی معلق در آب و در شرایط تعادل را $\langle V \rangle \approx \sqrt{\langle V^2 \rangle} \approx 0.4 \text{ cm/sec}$ تخمین بزند. او همچنین متذکر شد که این عدد برای سرعت از هر مقداری حاصل از اندازه‌گیری، بزرگ‌تر است؛ این نکته شکی نسبت به صحت تئوری جنبشی برانگیخت. اشتباه دوباره در تفسیر بود. اسملوکوفسکی این‌گونه توضیح داد که: ”آنچه ما مشاهده می‌کنیم در واقع مکان میانگین ذرات متحرک با سرعت V است؛ اما این ذرات بین 10^{16} تا 10^{20} مرتبه در ثانیه تغییر جهت می‌دهند. مرکز جرم این سیستم مسیر زیگزاگی بی‌اندازه پیچیده‌ای را طی می‌کند، مسیری که خطوط راست آن بسیار کوچک‌تر از ابعاد خود ذرات است. [...]”

جابجایی روی هر مسیر مستقیم، $\delta X = |X(t + \delta t) - X(t)|$ ، حتی نمی‌تواند معیار تقریبی برای مسیر واقعی ذره باشد. هر تلاشی برای محاسبه سرعت لحظه‌ای V از روی $\delta X / \delta t$ با در نظر گرفتن δt ای بیش از 10^{-16} sec ، منجر به شکست می‌شود. اسملوکوفسکی با معرفی یک طرح ماهرانه‌تری برای ول‌گشت، تلاش کرد تا بحث خود را اثبات نماید. موقعیت ذره بعد از n برخورد با ملکول‌های گاز یا سیال اطراف $X(n)$ خواهد بود. حرکت در $X(0) = 0$ در یک جهت کاتوره‌ای آغاز خواهد شد. به جهت عملیاتی کردن مدل از لحاظ تحلیلی، او چند فرض ساده‌کننده در نظر گرفت. برخی از آن‌ها

واضحند، نظیر ساده‌سازی‌های برآمده از تقریبی چون $M \gg m$ ؛ اما برخی نکات ظریف‌تری هستند. برای جزئیات بیشتر می‌توان به مرجع [۲۹] مراجعه نمود. به صورت خلاصه مدل این‌گونه است. الف) برخوردها با ملکول‌های محیط در بازه‌های زمانی ثابتی انجام می‌گیرد، هرگونه کاتوره‌ای بودن زمان‌های برخورد قابل چشم‌پوشی است. ب) بین هر دو برخورد n و $n+1$ ، حرکت مستقیم با سرعت ثابت $V(n)$ خواهد بود. سرعت ذره بروانی از قضیه همپاری، معادله (۱۱.۱)، ناشی می‌شود؛ $V(n) \equiv V = \langle V \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} m/M$. در عمل قضیه همپاری یک قضیه آماری است و افت و خیز حول مقدار میانگین در آن وجود دارد، اما قابل صرف‌نظر کردن است. از این دو فرض (الف) و (ب) می‌توان دریافت که بردار جابجایی از این طریق به دست می‌آید، $\delta X(n) = X(n+1) - X(n) = V(n)/v$ ، که در این رابطه v نرخ برخورد است. با توجه به نکته فوق، می‌توان این مدل را صورت سه بعدی ول‌گشت پیرسون^۱ دانست، چراکه ذره بروانی مسافت‌های غیرکاتوره‌ای و ثابت $l = \delta X = V/v$ را بین هر دو برخورد متوالی طی می‌کند. در مدل ول‌گشت اسملوکوفسکی، جهت جدید حرکت بعد از هر برخورد کاملاً کاتوره‌ای نیست. ج) زاویه چرخش $\epsilon(n) \equiv \epsilon$ ، که از روی $\cos[\epsilon(n)] = [V(n-1)V(n)]/V^2$ تعریف می‌شود، ثابت و غیرکاتوره‌ای فرض می‌شود، $\epsilon(n) = \epsilon$. با پیگیری بحث نگلی، می‌توان سهم هر برخورد را بسیار کوچک در نظر گرفت. از این رو، زاویه چرخش کوچک بوده و تا تقریب مرتبه اول متناسب است با نسبت $(mv)/(MV)$. با تخمین $v \approx \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ و استفاده از تعریف V در (ب) به $\epsilon = O(\sqrt{m/M})$ خواهیم رسید. به طور خلاصه، بعد از هر برخورد، نوک بردار جابجایی $\delta X(n)$ باید بر روی دایره‌ی معین کوچکی حول $\delta X(n-1)$ بنشیند، شکل (۶.۱).

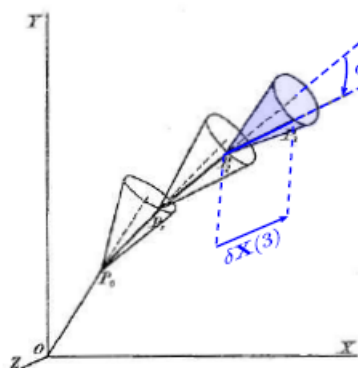
در مقابل مسیر زیگزاگی و کاملاً کاتوره‌ای پیرسون، اسملوکوفسکی به نوعی یک پایداری را نشان می‌داد: ذره بروانی بعد از برخورد تمایل به حفظ جهت حرکت خود دارد، که این ناشی از اینرسی جرمی بالای آن است. اگر ϵ خیلی کوچک باشد، حتی بعد از تعداد زیادی برخورد نیز مسیر مشاهده شده تقریباً به صورت خط راست خواهد بود. نتیجه‌گیری اسملوکوفسکی ظهور یک مسیر آزاد میانگین مشهود^۲ λ^2 بود که چندین مرتبه از مسیر آزاد میانگین واقعی l بزرگ‌تر است. اسملوکوفسکی با در نظر گرفتن میانگین مربع جابجایی ذره بروانی معلق در گاز، $\langle X^2(n) \rangle$ ، یک نمونه کمی ارائه کرد. ابعاد فضایی ذره در این مورد، بسیار کوچک‌تر از مسیر آزاد میانگین در ملکول‌های گاز است. بنابراین، بر طبق تئوری جنبشی بولتزمن^۳، می‌توان اثر برخوردهای متوالی را مستقل از یکدیگر فرض کرد. و این مدل اسملوکوفسکی را کامل می‌کند: د) کاتوره‌ای بودن برخوردها از طریق زوایای سمتی $\delta X(n)$ در دایره‌ی حول $\delta X(n-1)$ وارد می‌شود. این زوایا به صورت مستقل و از یک توزیع یکنواخت از بازه‌ی $[0; 2\pi]$ گرفته می‌شود. با مشخص کردن مختصه زمان به صورت $t = n/v$ ، نتایج

^۱ Pearson's Random Walk

^۲ Apparent Mean Free Path

^۳ Boltzmann's Original Kinetic Theory

jedesmal ihre Bewegungsrichtung um den Winkel ϵ ändernd. Wir nehmen die Längen $OP_0 = P_0P_1 = P_1P_2 = \dots$ als gleich an und nennen sie „die wirkliche mittlere Weglänge l des Teilchens M “. Die Aufgabe, welche wir uns stellen, besteht darin, das mittlere Quadrat der Entfernung OP_n , welche wir mit A bezeichnen werden, als Funktion der Länge l , des Winkels ϵ und der Anzahl n der Teilstrecken zu finden. Behufs Definition der in Betracht kommenden Richtungen beschreiben wir eine Einheitskugel und ziehen aus deren Mittelpunkt Gerade, parallel zu OP_0, P_0P_1, \dots , welche die Kugel in den Punkten Q_0, Q_1, \dots durchstoßen. Die Winkel XOQ_0, XOQ_1, \dots etc. bezeichnen wir mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, die zwischen den Ebenen XOQ_0 und Q_0OQ_1, XOQ_1 und Q_1OQ_2, \dots eingeschlossenen Winkel mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Dann bestehen die Relationen:



parallel zu OP_0, P_0P_1, \dots , welche die Kugel in den Punkten Q_0, Q_1, \dots durchstoßen. Die Winkel XOQ_0, XOQ_1, \dots etc. bezeichnen wir mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, die zwischen den Ebenen XOQ_0 und Q_0OQ_1, XOQ_1 und Q_1OQ_2, \dots eingeschlossenen Winkel mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Dann bestehen die Relationen:

شکل ۴.۱: نمایی از ول‌گشت پایدار اسملوکوفسکی در سه بعد که از $X(0) = 0$ شروع به حرکت نموده و مسافت جابجایی‌ها برای همه n ها یکسان است، $\delta X(n) = l$. نخستین جهت حرکت تصادفی است. اما تغییر جهت‌های بعدی مقید به یک زاویه قطبی ثابت ϵ هستند. زاویه سمتی مقداری تصادفی دارد و در هر گام مستقل از گام قبلی است. این تصویر از مرجع [۲۹] گرفته شده است.

اسملوکوفسکی به این صورت خواهد بود:

$$\langle X^2(t) \rangle = \begin{cases} (Vt)^2, & \nu^{-1} \ll t \ll \tau, \\ \epsilon Dt, & t \gg \tau, \end{cases} \quad (12.1)$$

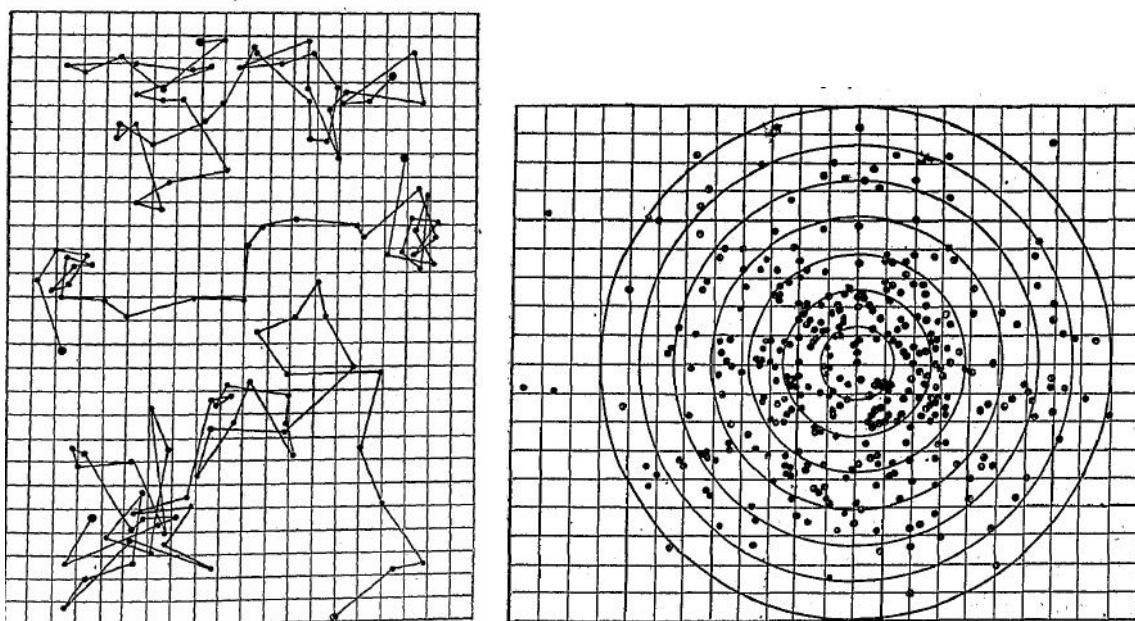
که در این رابطه کمیت‌های زیر وارد شده‌اند،

$$\tau = \frac{1}{\nu \sqrt{1 - \cos(\epsilon)}} \approx \frac{1}{\nu \epsilon^2} = O\left(\frac{M}{\nu m}\right),$$

$$\lambda = V\tau = \lambda_x \sqrt{3},$$

$$D = \frac{\lambda_x^2}{\tau} = O\left(\frac{\langle v^2 \rangle}{\nu}\right)$$

این نتایج از چند جهت قابل توجه هستند. نخست، رابطه (۱۲.۱) بحث اسملوکوفسکی در مورد جدایی مقیاس‌ها را تایید می‌کند. حرکت برای مقیاس‌های زمانی کوچک‌تر از τ خطی است، $\sqrt{\langle X^2 \rangle} = Vt$ ، و در مقیاس‌های زمانی بزرگ، ویژگی



شکل ۵.۱: مطالعات پیرین بر روی حرکت بروانی [۲۷]. سمت چپ: مسیره‌های یک ذره بروانی در یک صفحه، که در بازه‌های زمانی ۳۰ ثانیه‌ای اندازه‌گیری شده است. راست: تمامی جابجایی‌های تمام مسیره‌ها به مبدا منتقل شده‌اند. این تصویر گاوسی بودن توزیع طول مسیره‌ها را نشان می‌دهد که توسط اینشتین پیش‌بینی شده بود.

آشوبناک^۱ بروز می‌کند. این یک رژیم پخشی است: رفتار میانگین مربع جابجایی نظیر رفتار حاصل از معادله اینشتین (۵.۱) است. اما اینشتین پایداری حرکت را وارد نکرده بود: معادله (۳.۱) واضحا استقلال بردارهای جابجایی قبل و بعد را بیان می‌دارد. در حقیقت، در زمان‌های بلند، ول‌گشت معرفی شده توسط اسملوکوفسکی حرکت پیرسون ناپایدار با طول مسیر موثر $l = \lambda = V\tau$ را تقلید می‌کند. این تشابه از دل قضیه حد مرکزی می‌آید (قضیه‌ای که در ادامه معرفی می‌شود اما نه اینشتین و نه اسملوکوفسکی آن‌را در دسترس نداشتند).

بنابراین، اسملوکوفسکی یک پلی میان ویژگی‌های غیرقابل مشاهده در آزمایشگاه (مانند نرخ برخورد ν ، و مسیر آزاد واقعی V/ν) و نیز خواص قابل اندازه‌گیری (همچون ثابت پخش) برقرار کرد. به عنوان نمونه، معادله (۱۳.۱) پیش‌بینی می‌کند که D باید مستقل از نسبت جرم‌ها m/M باشد. اسملوکوفسکی توضیح می‌دهد که، یک ذره بروانی با جرم بزرگ در حالت تعادل یک سرعت متوسط کوچکی را حفظ می‌کند، اما در مقابل حفظ جهت حرکتش به شدت مقاومت نشان می‌دهد؛ و این دو پارامتر یکدیگر را خنثی می‌کنند. در یک نگاه کلی، اینشتین یک رهیافت احتمالاتی رضایت بخشی برای مدل‌سازی ذرات ارائه نمود. اسملوکوفسکی نشان داد که رهیافت ول‌گشت می‌تواند ارتباط گم شده با مدل‌های برخورد جنبشی را برقرار نماید. و به این ترتیب تئوری ذرات بروانی شکل گرفت، که باید به صورت تجربی نیز آزمایش می‌شد. نتایج چنین

^۱ Chaotic

آزمایش هایی در ۱۹۰۹ توسط پیرین^۱ فیزیکدان فرانسوی منتشر شد [۲۷]. وی چندین آزمایش انجام داد تا با مطالعه ذره بروانی، در حالت کلی تئوری جنبشی و به ویژه ایده های اینشتین را بررسی کند. کار اصلی او تعیین عدد آووگادرو (تعداد ملکول های موجود در دو گرم هیدروژن) بود.

۴.۱ فراهم سازی ابزار مدل های تصادفی

ارائه ی این مفاهیم احتمالاتی در آغاز قرن ۲۱ باعث شکل گیری و رشد سریع تعداد زیادی از روش های تحلیلی شد. مسائلی مختلفی از دنیای فیزیک، ریاضی و حتی اقتصاد تحت تئوری فرآیندهای تصادفی مورد مطالعه قرار گرفتند. یک فرآیند تصادفی را باید مجموعه ای از متغیرهای کاتوره ای $X(t)_{t \in I}$ دانست، که شاخص t عموماً پارامتر زمان نامیده می شود. این شاخص می تواند گسسته باشد (به عنوان نمونه ول گشت، گزینه ی واضح این مورد اعداد طبیعی است، $I = \mathbb{N}$) یا پیوسته باشد (برای ذره بروانی که $I = \mathbb{R}$). وضعیت فرآیند در یک زمان معین t با متغیر کاتوره ای $X(t)$ نشان داده می شود. برای مورد دومی، می توان فضای حالت مناسب را تعیین کرد. برای نمونه در حرکت بروانی سه بعدی، باید بردارهای کاتوره ای سه بعدی $X(t) \in \mathbb{R}^3$ در نظر گرفت. برای هر مجموعه ی محدود از زمان های اندازه گیری $(t_1, \dots, t_d) \in I^d$ که $d \in \mathbb{N}$ می توان متغیرهای $X(t_1) = x_1, \dots, X(t_d) = x_d$ را داشت که یک مجموعه از نقاط نمونه ی^۲ متعلق به نمود یا مسیر یا خط سیر^۳ فرآیند تصادفی $X(t)$ را می سازند. و باید توجه داشت که این چنین تعریفی تنها برای یک مجموعه محدود به راحتی انجام می شود. این سوال که چگونه می توان یک نمادگذاری مناسب برای احتمالاتی بودن مسیر کامل $t \rightarrow x(t)$ تعریف کرد، یا این که چطور به صورت احتمالاتی ویژگی های تحلیلی مسیر را توصیف نمود، کاملاً مبهم است.

۱.۴.۱ فرآیند وینر

آنچه از لحاظ ریاضیاتی باید انجام داد این است که باید تعریف دقیقی برای این فرآیندهای متفاوت ارائه نمود تا بتوان آن ها را دسته بندی کرد. تلاش در این راه با کار نوربرت وینر^۴ به اوج خود رسید [۳۰]. او فرآیندی تصادفی را مطالعه نمود که امروزه به نام خود او فرآیند وینر^۵ نام گذاری شده است. این فرآیند توسط سه ویژگی زیر تعریف می شود: الف) $B(0) = 0$ ؛

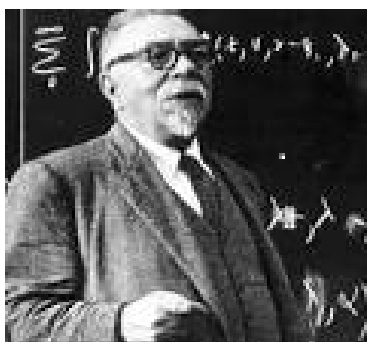
^۱ Jean Baptiste Perrin

^۲ Sample Points

^۳ Realisation or Path or Trajectory

^۴ Norbert Wiener

^۵ The Wiener Process



شکل ۶.۱: نوربرت وینر ریاضیدان آمریکایی که سهم عمده ای در شکل گیری فرآیندهای تصادفی داشت.

(ب) مسیر هر ذره $B(t)$ تقریباً به طور قطع^۱ پیوسته است^۲؛ ج) نمو $B(t_2) - B(t_1)$ یک توزیع گاوسی^۳ با میانگین صفر و واریانس $|t_2 - t_1|$ است، و برای هر دو بازه ی بدون همپوشانی $[t_1, t_2]$ ، $[t_3, t_4]$ ، به صورت دو به دو، از یکدیگر مستقلند. در حقیقت این فرآیند را می توان نمود ریاضیاتی حرکت بروانی (یک بعدی) توصیف شده توسط اینشتین دانست. (فرآیند وینر یکاهای دلخواهی را برای مختصات مکان و زمان استفاده می کند به طوری که $D = 1/2$. برای به دست آوردن معادله اینشتین، باید حرکت بروانی غیراستاندارد و باز مقیاس شده $\sqrt{2DB(t)}$ را به کار برد.) نکته (ج) یادآور شرط اینشتین است که ”حرکت ها در هر دو بازه زمانی پیاپی τ ، مستقل از یکدیگر هستند” [۳۱]. رابطه (۶.۱) گاوسی بودن را ایجاب می کند و ویژگی مربوط به واریانس در (۷.۱) است. مختصه مکانی به صورت $X(t) \sim t^{1/2}$ با زمان رابطه مقیاسی^۴ دارد. وینر وجود چنین فرآیندی را با ساختن فضای نمونه مناسب که دارای احتمال ...^۵ مناسبی است، اثبات کرد، فضایی که شرایط (الف) تا (ب) را ارضا می کند. بر این اساس، او چندین ویژگی مسیرها را به دست آورد؛ می توان با مسیرهای تولید شده حاصل از شبیه سازی (۹.۱) مقایسه نمود. مهم ترین ویژگی مشهود این است که، هر مسیری در فرآیند وینر اگرچه پیوسته است، اما با احتمال یک در هیچ نقطه ای مشتق پذیر نیست. این ویژگی، بیان ریاضی دقیق عدم توانایی در تعیین سرعت ذرات بروانی است. از طرفی تلاش ها جهت معنا دادن به انتگرال یک فرآیند تصادفی انجام گرفت که منجر به شکل گیری

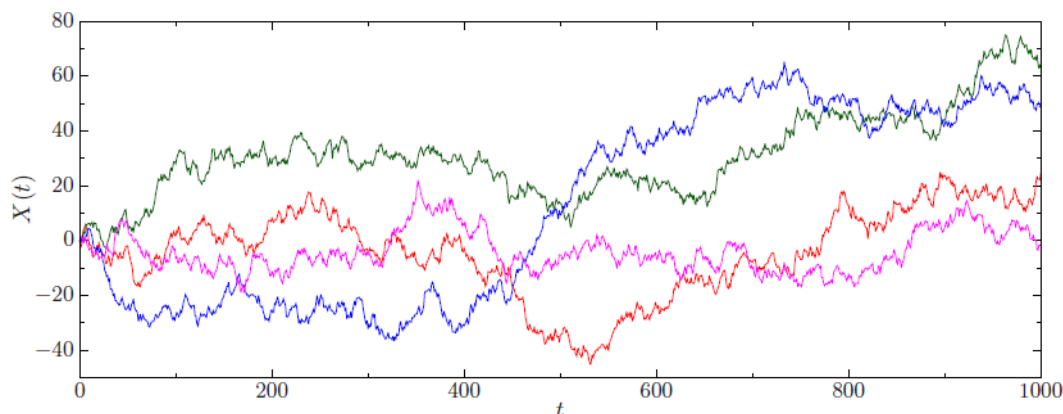
^۱ Almost Surely

^۲ فرآیند A در صورتی تقریباً به طور قطع رخ می دهد اگر $PrA = 1$. این شرط ایجاب نمی کند که این اتفاق حتماً با تعداد معینی تلاش رخ دهد. به عنوان مثال، عددی صحیح به صورت تصادفی انتخاب کرده و اجازه دهید A حالتی باشد که رقم مورد نظر ۵ نباشد. اگرچه که اصولاً انتخاب ۵ غیرممکن نیست، اما این احتمال برای A یک است چراکه خروجی می تواند از میان بی نهایت عدد باشد.

^۳ Gaussian Distribution

^۴ فرآیند A در صورتی تقریباً به طور قطع رخ می دهد اگر $PrA = 1$. این شرط ایجاب نمی کند که این اتفاق حتماً با تعداد معینی تلاش رخ دهد. به عنوان مثال، عددی صحیح به صورت تصادفی انتخاب کرده و اجازه دهید A حالتی باشد که رقم مورد نظر ۵ نباشد. اگرچه که اصولاً انتخاب ۵ غیرممکن نیست، اما این احتمال برای A یک است چراکه خروجی می تواند از میان بی نهایت عدد باشد.

^۵ Measure



شکل ۷.۱: مسیره‌های نمونه $X(t)$ برای فرآیند وینر که در واقع مدل ریاضی برای حرکت بروانی است. مسیره‌ها از شبیه‌سازی عددی حاصل شده‌اند. مسیره‌های نمونه بسیار نامنظم هستند اما پیوسته؛ و در هیچ زمانی نمی‌توان یک مسیر ارجح تعیین کرد. به صورت موضعی مسیره‌های تولید شده با حرکت بروانی واقعی مشاهده شده توسط کاپلر (۱.۱) سازگار هستند.

محاسبات تصادفی^۱ [۳۲] توسط ایتو^۲ [۳۳، ۳۴] و در ادامه توسط استراتونوویچ^۳ [۳۵] (که بیشتر برای فیزیکدان‌ها اهمیت فراوانی دارد) شد.

۲.۴.۱ معادله لانژوین

انگیزه برای یافتن چنین ابزار ریاضی همزمان بود با بحث معادلات دیفرانسیل تصادفی^۴ در جامعه فیزیک. اولین مفهوم در این زمینه توسط فیزیکدان فرانسوی لانژوین^۵ [۳۶] ارائه شد، که حرکت ذره بروانی را برحسب معادلات حرکت توصیف کرد،

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V(t), \\ m \frac{dV}{dt} &= -\gamma V(t) + \xi(t), \end{aligned} \quad (۱۳.۱)$$

که در این معادلات، m جرم ذره بروانی و γ ضریب اصطکاک خطی با محیط اطراف است. در نگاه اول، این معادلات مشابه قانون دوم نیوتون، به همراه ترم آشنای مربوط به لختی در سمت چپ و نیز نیروی اصطکاک اتلافی در سمت راست،

^۱ Stochastic Calculus

^۲ Ito

^۳ Stratonovich

^۴ Stochastic Differential Equations

^۵ Paul Langevin



شکل ۸.۱: پاول لانژوین (۱۸۷۲-۱۹۴۶)

به نظر می‌رسند. جمله وابسته به زمان $\xi(t)$ معرف انتقال تکانه با ملکول‌های گاز یا سیال خارجی در حین برخوردها است. دوباره فرض می‌شود که نرخ برخورد بسیار سریع‌تر است از معکوس مقیاس زمانی dt یا به عبارتی تعریف کننده‌ی حدود اعتبار (۱۳.۱). تعریف $\xi(t)$ از دل فرآیند تصادفی بیرون می‌آید نه یک تابع تعینی^۱ از زمان. کاتوره‌ای بودن مقدار این تابع به توابع $X(t)$ و $V(t)$ نیز منتقل می‌شود، که باید از طریق احتمالات مشخصه‌یابی شوند. بنابراین، معادله لانژوین روش‌های آنالیز کلاسیک را کنار گذاشته و ریاضیدان‌ها و فیزیکدان‌ها را در شاخه‌ای که در دهه‌های بعدی بسیار پراهمیت شد [۳۳، ۳۷، ۳۸، ۴۰]، با یکدیگر همراستا نمود. نخست، باید نوع برخوردها $\xi(t)$ را مشخص نمود. اگر محیط در شرایط تعادل گرمایی نگه داشته شود، می‌توان به قوانین تئوری جنبشی استناد کرد، چیزی که موجب ظهور تئوری‌های اینشتین و اسملوکوفسکی شد. ملکول‌های اطراف از قوانین توزیع ماکسول-بولتزمن پیروی می‌کنند. انتقال تکانه به صورت میانگین، بدون بایاس خواهد بود، ضربات وارده به ذره بروانی در جهات مختلف با احتمال یکسان وارد می‌شود. علاوه بر این، قوانین تعادل پایا هستند^۲؛ که ایجاب می‌کند فرآیندهای $\xi(t)$ و $\xi(t+t)$ به ازای هر انتقال زمانی t ، از لحاظ آماری معادل باشند. و همچنین هر دو برخوردی از لحاظ آماری اتفاق‌های مستقل از یکدیگر فرض می‌شوند^۳. پذیرفتن فرض‌های فوق نیازمند ارضای این شرایط است،

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= 2D\gamma^2\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (14.1)$$

^۱ Deterministic Function

^۲ Stationary

^۳ فرض کنید A و B دو متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال به ترتیب $p_A(x)$ و $p_B(x)$ باشند. نیز تابع چگالی احتمال مشترک آن‌ها $p_{AB}(x, y)$ باشد. در صورتی A و B از لحاظ آماری مستقل خواهند بود که $p_{AB} \equiv p_A p_B$. همچنین دو متغیر تصادفی مستقل، ناهمبسته نیز هستند؛ به عبارتی، $\langle AB \rangle = \int \int xy p_{AB}(x, y) dx dy = \int x p_A(x) dx \int y p_B(y) dy = \langle A \rangle \langle B \rangle$. اما عکس قضیه تنها در حالی برقرار است که A و B به طور مشترک گاوسی باشند.

برای تمام مقادیر t و t' . در ادامه علت حضور ثابت پخش D بیان خواهد شد اما در حال حاضر، این فقط یک ثابت مثبت است که مقدارش دامنه‌ی افت و خیزها در برخورد با فرآیند نوفه‌ای $^1 \xi(t)$ را مشخص می‌کند. در ۱۹۴۵، ونگ و اورناشتاین 2 [۳۸] نشان دادند که منطقی است، $\xi(t)$ را یک فرآیند گاوسی 3 در نظر بگیرند. این فرض ضمن این که با طبیعت گاوسی تابع توزیع تکانه‌ی ماکسول- بولتزمن در بمباران ملکول‌ها سازگار است، از جهات مهم دیگری نیز توجیه می‌شود 4 . ویژگی‌های توزیع نوفه‌ی گاوسی سفید $^5 \xi(t)$ ، منحصرًا از روی جملات مربوط به تابع خودهمبسته 6 و سوق در رابطه (۱۴.۱) تعریف می‌شوند 7 .

حال باید به بحث و تفسیر در مورد معادله دیفرانسیل تصادفی (۱۳.۱) می‌پردازیم. اولین گام در این راستا، حل این معادله با در نظر گرفتن ترم نوفه به عنوان یک تابع تحلیلی است. با استفاده از فرم کلی پاسخ حاصل [۳۹]، می‌توان مومنت‌های اول و دوم و همچنین توابع خود همبستگی و یا همبستگی متقابل میان $X(t)$ و $V(t)$ را به دست آورد. در این مرحله باید (۱۴.۱) مورد استفاده قرار گیرد. پاسخ به مقادیر اولیه $X(0)$ و $V(0)$ بستگی دارد که حتی می‌تواند کاتوره‌ای باشند. از جمله حالت‌های مورد علاقه، پاسخ تعادلی است که توسط یک توزیع سرعت مستقل از زمان (ماکسول- بولتزمن) مشخص می‌شود. این شرایط از طریق شرایط اولیه زیر حاصل می‌شوند:

$$\langle V(0) \rangle = 0 \equiv \langle V(t) \rangle, \quad \langle V^2(0) \rangle = \frac{\gamma D}{m} \equiv \langle V^2(t) \rangle. \quad (15.1)$$

باید توجه داشت که، برای یک ذره بروانی با یک درجه آزادی مکانیکی، همپاری انرژی ایجاب می‌کند داشته باشیم

¹ Noise Process

² Wang and Ornstein

³ Gaussian Process

⁴ $\{X(t)\}_{t \in I}$ یک فرآیند گاوسی نامیده می‌شود اگر توزیع هر بردار تصادفی با بعد محدود $X = (X(t_1), \dots, X(t_d))$ که $t_i \in I$ و $d \in N$ گاوسی چند متغیره باشد. فرآیند گاوسی صرفًا از طریق میانگین $\langle X(t) \rangle$ و تابع همبستگی‌اش $\langle X(t_1)X(t_2) \rangle$ تعریف می‌شود. این ویژگی حاصل قضیه ایزرلی *isserli's theorem* در تئوری احتمالات است. طبق این قضیه، برای یک فرآیند گاوسی با میانگین صفر، تمام مومان‌های فرد مقدار صفر دارند و مومان‌های زوج از طریق تابع همبستگی محاسبه می‌شوند.

⁵ Gaussian White Noise

⁶ نوفه سفید اشاره دارد به چگالی طیفی توان ثابت $\gamma k_B T$ $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \langle \xi(0)\xi(t) \rangle dt = \gamma k_B T$. این نام مشابه مورد نور سفید است که تمام طول موج‌ها سهم یکسانی دارند.

⁷ Autocorrelation

⁸ از لحاظ ریاضی، کوواریانس دو متغیر تصادفی A و B به این صورت تعریف می‌شود، $Cov[A, B] = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$. کوواریانس از طریق واریانس $\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ و $\sigma_A^2 = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ به همبستگی ارتباط دارد، $Corr[A, B] = Cov[A, B] / \sqrt{\sigma_A^2 \sigma_B^2}$.

⁹ Cross-Correlators

$\langle V^2(0) \rangle = (RT)/(Nm)$ ، که T دمای محیط پیرامون است. به این ترتیب ثابت $D = (RT)/(N\gamma)$ تعریف می‌شود. علاوه بر این برای یک ذره کروی با شعاع r ، ضریب اصطکاک استوکس برابر است با $\gamma = 6\pi\eta r$ که دقیقاً همان معادله (۲.۱) را به دست می‌دهد؛ معادله‌ای که با توجیهی کاملاً متفاوت توسط اینشتین ارائه شد. اما آیا واقعا D برای این معادله لانه‌زین ضریب پخش است؟ برای میانگین مربع جابجایی در این فرآیند داریم (البته بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $\langle X(0) \rangle = 0$)،

$$\begin{aligned} \langle X(t) \rangle &= 0, \\ \langle X^2(t) \rangle &= \frac{2D}{\gamma} [t/\tau - (1 - e^{-t/\tau})] \\ &= \begin{cases} \langle V^2(0) \rangle t^2, & \text{for } t \ll \tau, \\ 2Dt, & \text{for } t \gg \tau. \end{cases} \end{aligned} \quad (16.1)$$

این مقیاس زمانی $\tau = m/\gamma$ در واقع معیاری است برای سنجش رقابت میان نیروهای اصطکاک و اینرسی که در واقع دو رژیم زمانی را متمایز می‌کند. برای زمان‌های خیلی کوچک (تخمین لانه‌زین برای ذره بروانی معلق در سیال $\tau = 10^{-8} \text{ sec}$ بود)، میانگین مربع جابجایی متناسب با مربع زمان افزایش می‌یابد. این رژیم زمانی، رژیم بالستیک^۱ نامیده می‌شود. انگیزه‌ی این نامگذاری هنگام مقایسه با معادله اسملوکوفسکی (۱۲.۱) آشکار می‌شود: ذره‌ای که با تندی تعینی $V_{det} = \sqrt{\langle V^2(0) \rangle}$ در حال حرکت است، دقیقاً چنین رفتاری نشان می‌دهد. هر چند که بر خلاف پاسخ پیشنهادی اسملوکوفسکی، تندی و سرعت‌ها در این‌جا کاتوره‌ای هستند و با توجه به معادله (۱۵.۱) توزیعی مطابق با قانون ماکسول-بولتزمن دارند. رژیم زمان‌های بلند، ناحیه‌ی پخشی نام دارد، چنان‌که، می‌توان دید که رفتار میانگین مربع جابجایی کاملاً موافق با نتیجه (۵.۱) حاصل از مدل پخش اینشتین است. همچنین، طبیعت گاوسی بودن نوفه $\xi(t)$ به $X(t)$ و $V(t)$ منتقل می‌شود [۳۸]: به ویژه، مختصه مکانی $X(t)$ طبق معادله (۶.۱) توزیع می‌شود. در حقیقت، رفتار $X(t)$ ، در حالت حدی که تمام زمان‌های اندازه‌گیری و بازه‌های زمانی در مقایسه به τ بسیار بزرگ هستند، همان فرآیند وینر است. یک تشابه جالب با اعمال مستقیم تقریب بر معادله لانه‌زین (۱۳.۱)، مشاهده می‌شود. با در نظر گرفتن پارامتر کوچک $m/\gamma = \tau$ ، می‌توان از ترم اینرسی (متناسب با m) در مقابل اصطکاک (متناسب با γ) صرف‌نظر کرد. در این صورت برای معادله به این نتیجه حرکت می‌رسیم:

$$V(t) = \frac{dX}{dt} = \frac{\xi(t)}{\gamma}. \quad (17.1)$$

^۱ Ballistic

حال اگر فرضا در این جا، فرآیند $X(t)$ یک فرآیند وینر باشد، نوفه ی $\xi(t)$ متناسب خواهد بود با مشتق یک فرآیند وینر. در نتیجه، با وجود این که مسیرهای فرآیند وینر مشتق ناپذیر هستند، در این حالت حدی، این مشتق معنا پیدا کرده است. بنابر تعریف، حرکت طبق معادله لانژوین دارای سرعتی خوش تعریف است. اما در مقیاس های زمانی که اینرسی قابل چشم پوشی است، اثر ضربه های حاصل از $\xi(t)$ جابجایی های لحظه ای $\xi(t)dt = \gamma^{-1}(X(t+dt) - X(t))$ خواهد بود. از این رو، سرعت ذرات حداکثر شده و افت و خیز فراوان دارد.

دشواری های ریاضی در تعریف ها، با استفاده از تفسیر دووب^۱ [۴۰] از معادله لانژوین برداشته می شود. شکل اصلی آن (۱۳.۱) البته برای فیزیکدان ها بسیار با ارزش است؛ چراکه رهیافتی طبیعی و شهودی را جهت انتقال مسایل تعینی و آشنای مکانیک، به دنیای حرکت های تصادفی فراهم می آورد. از طرفی، ریاضیدان ها صورت انتگرالی این معادله دیفرانسیل را ترجیح می دهند. انتگرال مورد بررسی، شامل $\xi(t')dt'$ به عنوان $dB(t')$ شناخته می شود که انتگرالی نسبت به یک فرآیند وینر است. این صورت دوم معادله با به کارگیری محاسبات تصادفی ایتو مورد بررسی قرار می گیرد.

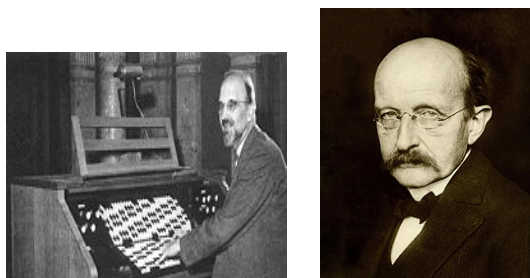
بر مبنای این پایه های ریاضی، می توان با مسایل پیچیده تری روبرو شد. به عنوان نمونه، حرکت ذره تحت اثر پتانسیل خارجی $U(x, t)$ ، با اضافه کردن جمله ی مربوط به نیروی $\frac{\partial U}{\partial x}$ به معادله لانژوین (۱۳.۱) قابل بررسی است. این کار برای مورد پتانسیل هارمونیک $U(x) = m\omega^2/2$ ، توسط ونگ، اورناشتاین و اوهلنبک^۲ [۳۸، ۳۷] انجام شد. اما تا به امروز مساله مورد علاقه، فرمول بندی مسایل غیر تعینی بر حسب معادلات دیفرانسیل تصادفی بوده است. محاسبات تصادفی ایتو، قابلیت بررسی هرگونه معادله به فرم زیر را دارد،

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{X}(t), t) + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{X}(t), t)\xi(t). \quad (18.1)$$

$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ کمیتی برداری، $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t)$ تابعی ماتریسی و $\xi(t)$ یک پروسه تصادفی است که مولفه های نوفه های سفید گاوسی از هم مستقلند. بردار \mathbf{X} در بردارنده ی تمام متغیرهای لازم جهت تعیین حالت سیستم در یک لحظه معین از زمان است. به عنوان مثال برای یک فرآیند وینر d بعدی، $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T$. جهت بازیافتن معادله لانژوین برای یک ذره بروانی یک بعدی، $\mathbf{X} = (X, V)^T$. همچنین مولفه های \mathbf{X} می توانند شامل زاویه، تکانه زاویه ای و سایر کمیت های فیزیکی باشند. بنابراین، می توان اثر حامل های بار برانگیخته گرمایی را (الکترون ها یا یون ها) با استفاده از متغیرهای حالتی به صورت $\mathbf{X} = (U_i, I_i)$ در نظر گرفت؛ که U_i و I_i به ترتیب ولتاژها و جریان های مختلف اندازه گیری شده در یک مدار الکتریکی هستند. برخلاف ظاهر مجرد و کلی اش، معادلاتی از قبیل (۱۸.۱) عموماً در متون فیزیکی به عنوان معادله لانژوین شناخته

^۱ Doob

^۲ Uhlenbec



شکل ۹.۱: سمت چپ: آدرین فوکر (۱۸۸۷-۱۹۷۲)، راست: ماکس پلانک (۱۸۵۸-۱۹۴۷)

می شوند.

۳.۴.۱ معادله فوکر- پلانک

بجلیبر (در متون مربوط به بازار سهام) و اینشتین (با مطالعه حرکت بروانی) نشان دادند که تابع چگالی احتمال حالت یک فرآیند وینر $B(t)$ در زمان t ، از یک معادله دیفرانسیل خطی، معادله (۴.۱)، پیروی می کند. حال سوال این است که آیا می توان معادله مشابهی برای دینامیک های پیچیده تری نظیر معادله حرکت لانژوین یافت؟ تلاش های قابل توجه در این زمینه در سال های پس از انتشار مقاله اینشتین در مورد حرکت بروانی، انجام شد. سرانجام معلوم شد که وابسته به هر معادله دیفرانسیل تصادفی (۱۸.۱)، یک معادله به صورت زیر وجود دارد [۴۱]،

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}; t) = - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}; t)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}; t)]. \quad (19.1)$$

$p(\mathbf{x}; t)$ تابع چگالی احتمال pdf برای متغیرهای حالت \mathbf{x} است. توابع $a_i(\mathbf{x}; t)$ با مقادیر حقیقی، مولفه های $a_i(\mathbf{x}; t)$ هستند که در معادله (۱۸.۱) وجود داشت و ضرائب سوق^۱ نام دارند. به همین ترتیب، $b_{i,j}(\mathbf{x}; t)$ ها مولفه های $\mathbf{g}(\mathbf{x}; t)\mathbf{g}(\mathbf{x}; t)^T$ هستند که ضرائب پخش هستند. بسیار مهم است که تمایز میان معادله تعینی فوکر- پلانک برای چگالی احتمالی با مقدار حقیقی و معادله لانژوین تصادفی توضیح دهنده ی تحولات یک پدیده ی کاتوره ای، آشکار شود.

معادله (۱۹.۱) در ۱۹۳۱ توسط آندره کولموگروف [۴۲] معرفی شد و امروزه در متون مربوط به تئوری احتمالات به عنوان معادله پیشرو کولموگروف شناخته می شود. با قرار دادن $a(x; t) = 0, b(x; t) = 2D$ معادله پخش یک بعدی اینشتین و

^۱ Drift Coefficients

بچلیبر به دست خواهد آمد. آدریان فوکر^۱، در طی دوره‌ی دکتری تخصصی خود در کنار ماکس پلانک^۲ (که در ۱۹۱۳ دنیای فیزیک، در مطالعه بر روی دوقطبی‌های دوار^۳، به یک شکل کلی برای معادله (۱۹.۱) دست یافت [۴۲-۴۴]. در این معادلات فوکر-پلانک به این معادلات ارجاع می‌شود. در ۱۹۱۵ اسملوکوفسکی فرم عام معادله پخش را، که در حال حاضر به نام معادله اسملوکوفسکی می‌شناسیم، ارائه داد [۴۵]: معادله‌ای که سهم نیروهای خارجی را وارد می‌کند اما در محدوده‌ای کار می‌کند که ترم اینرسی قابل صرف‌نظر کردن است. در ۱۸۹۱، ریلی معادله دیفرانسیلی در فضای سرعت و در غیاب نیروهای خارجی را مورد مطالعه قرار داد [۴۶]. و سرانجام، معادله کلاین-کرامرز^۴، که به افتخار اسکار کلاین^۵ [۴۷] و هانس کرامرز^۶ [۴۸] نامگذاری شده است، شامل هر دو جمله‌ی نیروهای اینرسی و خارجی است. و در نهایت توانست توصیفی در فضای فاز کامل $\mathbf{x} = (x, v)$ فراهم آورد.

معادله‌ی (۱۹.۱) تکمیل‌کننده‌ی روش لانژوین است. معادله لانژوین صورتی کامل‌تر است، چراکه ویژگی‌های فرآیند تصادفی مورد مطالعه را تماماً تعیین می‌کند. معادله فوکر-پلانک تنها تابع چگالی احتمال متغیرهای حالت تک زمانی، $p(x; t)$ ، را توصیف می‌کند. این معادله در پیش‌بینی در مورد همبستگی‌های دوزمانه $\langle \mathbf{X}(t_1) \mathbf{X}(t_2) \rangle$ ناکارآمد است. هرچند که، وقتی در مورد تحلیل یک تابع چگالی احتمال خاص صحبت می‌کنیم، معادله فوکر-پلانک با تمرکز خاص بر مساله، نتیجه بسیار چشم‌گیری ارائه می‌دهد. اگر یک معادله دیفرانسیل تعینی داشته باشیم، روش‌های دقیق و یا تقریبی بسیاری برآمده از تحلیل‌های استاندارد برای حل آن وجود دارد؛ روش‌هایی نظیر بسط ویژه توابع، جداسازی متغیرها و یا روش‌های پیچیده‌تر مربوط به مکانیک کوانتومی [۴۱]. علاوه بر این‌ها، شرایط مرزی به راحتی با استفاده از روش تصویر [۴۹] وارد می‌شود.

۵.۱. نوفه سفید گاوسی: رهیافتی جهان‌شمول برای مدل‌سازی افت و خیزها

کلیت موجود در معادله لانژوین (۱۹.۱) و معادله‌ی فوکر-پلانک (۱۸.۱) وابسته به آن بسیار جالب توجه و مهم است. حیطه کاربرد آن‌ها بسیار گسترده و فراتر از پخش ذرات بروانی است. ایده این است که تمام کمیت‌های اثرگذار بر متغیر دینامیکی تحت مطالعه $\mathbf{X}(t)$ را به دو سهم تعینی و افت و خیزها تقسیم کنیم. بخش تعینی رویهمرفته ساختار معادله

^۱ Adriaan Fokker

^۲ Max Planck

^۳ Rotating Dipoles

^۴ Klein-Kramers Equation

^۵ Oskar Klein

^۶ Hans Kramers

حرکت لانژوین را توصیف می‌کند. مولفه‌های افت و خیز اساساً از طریق نوفه (های) سفید گاوسی $\xi(t)$ وارد می‌شوند.

۱.۵.۱ کاربردها

نمونه‌های فراوانی از کاربرد معادله حرکت لانژوین در پتانسیل‌های دوره‌ای در کتاب ریسکن^۱ در ۱۹۸۹ [۴۱] ذکر شده‌اند شامل: همزمان‌سازی نوسانگر^۲، ترابرد حامل بار در رساناهای ابریونی^۳، جریان عبوری از اتصال تونل‌زنی جوزفسون^۴ (دو ابررسانا که توسط یک لایه نازک اکسید از هم جدا شده‌اند)، نوفه در حلقه‌های فازی بسته^۵ و نوفه در یک لیزر. علاوه بر این ذره بروانی دوار که قلب تئوری واهلش دی‌الکتریکی دبابی^۶ است [۳۹، ۴۱]، محاسبه‌ی پذیرفتاری در نظریه پاسخ خطی برای دوران دو قطبی‌ها در میدان خارجی را امکان‌پذیر می‌کند [۴۱].

کووفی^۷ در ۲۰۰۴ [۳۹] پراکندگی نور دینامیک و تئوری نرخ گریز کرامرز^۸ را نیز به کاربردها افزود [۴۱، ۴۸]. مورد دوم در اصل جهت توضیح شکست پیوندهای شیمیایی به دلیل محرک‌های گرمایی شکل گرفته بود. در این‌جا، متغیر $X(t)$ مکان کلاسیک نیست، بلکه نشان‌دهنده مختصات برهمکنش است؛ به عبارتی دیگر، فاصله بین دو قسمت ملکول شکسته شده [۳۹]. این تئوری فرمول‌بندی صریحی را برای نرخ گریز در هر سیستم فیزیکی دارای گریز از چاه پتانسیل به علت نوفه، فراهم می‌آورد. از موردهای کاربردی فراوان این تئوری می‌توان به واهلش دی‌الکتریک در بلورهای مایع مغناطیسی^۹، واهلش مغناطیسی ذرات فرومغناطیس ریز^{۱۰}، فیزیک لیزر و دینامیک اتصال‌های جوزفسون اشاره نمود.

از سویی دیگر، اگر مقیاس زمانی نوعی برای واکنش‌های شیمیایی نسبتاً کوچک باشد، در این صورت روند پیشروی آن توسط زمان مورد نیاز ذرات برای یافتن جفت‌هایشان در واکنش هدایت می‌شود. در این رژیم که واکنش محدود یا کنترل شده‌ی پخشی^{۱۱} [۵۰] نامیده می‌شود، اصولاً حرکت بروانی بر آمار و نرخ گذارها حاکم است.

^۱ Risken

^۲ Synchronisation

^۳ Superionic Conductors

^۴ Josephson Tunneling Junction

^۵ Phase Locked Loops

^۶ Debye Theory of Dielectric Relaxation

^۷ Coffey

^۸ Kramer's Escape Rate Theory

^۹ Nematic Liquid Crystals

^{۱۰} Fine Ferromagnetic Particles

^{۱۱} Diffusion-Limited or Diffusion-Controlled Reaction

در مدارهای الکتریکی، نوفه جانسون- نیکوویست^{۱۲} [۳۵، ۵۱، ۵۲] نوفه‌ایست که به علت برانگیخته‌گی‌های گرمایی حامل‌های بار (عموماً الکترون‌ها) در رسانای الکتریکی در حالت تعادل تولید می‌شود، صرف نظر از هر نوع ولتاژ اعمال شده. نوفه گرمایی در یک مقاومت ایده‌آل با تقریب نوفه سفید است و دارای توزیعی نزدیک به گاوسی است [۵۳]. به این ترتیب، در هر موردی که نیاز به وارد کردن آثار نوفه گرمایی باشد، مطالعه‌ی معادله لانژوین برای جریان‌ها و ولتاژها از اهمیت برخوردار است.

آر. مازو^۱ در کتاب خود در ۲۰۰۲ [۵۴]، با بررسی واقطیدگی تابشی^۲ ملکول‌های در محلول‌ها در این زمینه نقشی ایفا کرد. او در این کار، به شرح کامل مدلی ساختگی برای پخش پلیمرها پرداخت و لیست بزرگی از مرجع‌ها در این زمینه گردآوری نمود.

حرکت بروانی فعال^۳ (که معادله حرکت لانژوین است با ترم اصطکاک غیرخطی $\mathbf{a}(\mathbf{X})$) در کاربردهای زیست‌شناسی دارای اهمیت فراوانی است؛ کاربردهایی مانند توصیف الگوهای حرکتی خودکشی^۴: نظیر ترابرد جهت‌دار در سلول‌های زنده یا رفتار ازدحام تجمعی^۵ [۵۵]. با توجه به این که اولین بار معادله پخش به صورت آماری توسط بچلیر در حیطه بازار سهام مطرح شد، عجیب نبود که معادله لانژوین نقش مهمی در ریاضیات مالی جدید داشته باشد. مدل بلک- شولتز^۶ تحول قیمت سهام $X(t)$ تحت اثرات و خیزها را توضیح می‌دهد [۵۶]. این مدل برحسب معادله لانژوین دارای نوفه‌ی افزاینده^۷ فرمول‌بندی می‌شود: نوفه‌ی حاضر در معادله (۱۸.۱) ثابت نیست بلکه متناسب است با $X(t)$. و این تغییر حرکت بروانی هندسی^۸ را تولید می‌کند که در واقع فرآیند وینر نمایی با ترم سوق است. از این رو، $X(t)$ همواره مثبت است و با استفاده از نمونه‌های افزاینده‌ی مستقل و توزیع نرمال لگاریتم^۹ مشخص می‌شود.

^{۱۲} Johnson-Nyquist Noise

^۱ Mazo

^۲ Fluorescence Depolarisation

^۳ Active Brownian Motion

^۴ Self-Propelled

^۵ Collective Swarming Behaviour

^۶ Black-Scholes Model

^۷ Multiplicative Noise

^۸ Geometric Brownian Motion

^۹ Log-Normal

۲.۵.۱ متغیرهای سریع نسبت به متغیرهای کند

موضوع اصلی مطالعات تحلیلی لانتروین، حرکت بروانی بود. به جای وارد کردن برهمکنش‌های پیچیده با دینامیک محیط پیرامون، لانتروین پیشنهاد به کارگیری معادلات حرکت تصادفی اش (۱۳.۱) را داد. بنابراین، تمام آثار حاصل از محیط توسط ترم اصطکاک خطی $-\gamma V$ و نوفه سفید گاوسی $\xi(t)$ جمع می‌شوند. مطمئناً این روشی بسیار جالب توجه است، چراکه درکی شهودی فراهم کرده و اجازه‌ی بسط روش به مسایل دیگر (نظیر کاربردهای ذکر شده) را می‌دهد. هرچند که این روش پیشنهادی، روشی پدیده‌شناختی است. یک توجیه ابتکاری (ذهنی) برای این رهیافت، براساس جداسازی مقیاس‌های زمانی است که در ادامه بیان می‌شود.

سیستم‌هایی که در بالا به آن اشاره شد، با وجود تنوع در موضوعات آن‌ها، در یک مورد مشترک هستند. از یک سو، متغیر یا متغیرهایی هستند که دینامیک آن‌ها مورد مطالعه است $\mathbf{X}(t)$. از طرفی دیگر، رفتار این متغیرها با محیط نوفه‌ای پیرامون یا به بیان فیزیکی، با یک حمام گرمایی^۱ جفت شده است. این حمام گرمایی، خود تشکیل شده است از یک مجموعه‌ی دینامیکی شامل تعداد بسیار زیادی درجه آزادی، که اجزای تشکیل دهنده‌ی آن در مقایسه با متغیر دینامیکی مورد مطالعه، خیلی سریع عمل می‌کنند: قیمت سهام می‌تواند هر ماه یک مرتبه ثبت شود؛ اما در طی این بازه هزاران سهم تغییر مالکیت دارند. این برهمکنش‌ها به صورت مجزا بر متغیر کندتر $\mathbf{X}(t)$ اثر قابل توجهی ندارند، بلکه اثر جمعی تمام ذرات بر این متغیر وارد می‌شود. به این دلیل، تمرکز بر آثار آماری میانگین (زمانی) است. از سویی دیگر، همبستگی میان برهمکنش‌های متوالی باید به سرعت از بین برود تا در مقایسه با حرکت متغیر دینامیکی قابل چشم‌پوشی باشد. به عنوان مثال، بلافاصله بعد از برخورد ذره بروانی با ملکول سیال، حرکت آن‌ها همبسته است؛ اما زمانی که دوباره با یکدیگر روبرو می‌شوند، ملکول سیال آنقدر با دیگر ملکول‌های سیال برخورد داشته است که همبستگی آن با ذره بروانی به کلی از بین رفته است. این شرایط، علت به کارگیری نوفه سفید (یا همبستگی به صورت تابع دلتا δ) در رهیافت لانتروین را توجیه می‌کند.

می‌توان این موارد را با استفاده از یک روش دقیق‌تر و کمی‌تر، با به کار گرفتن ابزارهای ماهرانه‌ای همچون عملگرهای مسیر موری-سوانسیش^۲ [۵۸، ۵۷] نیز انجام داد. این فرآیند برای ذرات بروانی سنگین در گاز یا سیال، در مرجع [۵۴] بررسی شده است. با شروع از معادله لیوویل^۳ تعیینی، متغیرهای سریع به نفع کندترها حذف می‌شوند و منجر به معادله حرکت لانتروین می‌شود. بدین وسیله حتی می‌توان رابطه میکروسکوپی میان اصطکاک و ضریب پخش را یافت^۴. اما

^۱ Heat Bath

^۲ Mori-Zwanzig Projection Operators

^۳ Liouville Equation

^۴ لانتروین رابطه میان اصطکاک و ضریب پخش را با استفاده از معادله‌ای دیگر به دست آورد، مستقل از معادله حرکتش. در این رابطه او به همپاری انرژي در تعادل نیاز داشت.

این ریاضیات بدیهی نیستند و بسط آن به سیستم‌های پیچیده‌تر چالش برانگیز بوده و حتی برای بسیاری از مسایل، دستیابی به پاسخ نهایی میسر نیست. در حقیقت، روش موری-سوانسیش، روشی برجسته برای توجیه حرکت بروانی نیست، بلکه حدود اعتبار آن را نشان می‌دهد. تحلیل دقیق نیازمند عمومیت دادن روش لانژوین است؛ که در درجه اول نوفه غیر همبسته و اصطکاک خطی را زیر سوال می‌برد. مثال‌هایی در این مورد را می‌توان در مرجع [۵۴] در بحث حرکت بروانی در سیال چگال و در همین مرجع و نیز [۵۹] در مورد شبکه‌ی فنرهای هارمونیک^۱ مشاهده کرد.

۳.۵.۱ موضوعات جالب توجه

یک سوال قابل توجه این است که چگونه پدیده‌های گوناگونی نظیر آن‌چه در بالا ذکر شد، با وجود این همه تفاوت توسط یک معادله تصادفی (۱۸.۱) توصیف می‌شود. چطور مکانیزم‌های افت و خیزی که از لحاظ میکروسکوپی به شدت متفاوت از هم هستند- ناخالصی‌های پراکنده‌ی پرتو لیزر، برانگیختگی گرمایی حامل بار، کره سخت یا تکانه مغناطیسی، معادلات در بازار بورس- قابل مطالعه از طریق یک مدل نوفه ریاضیاتی $\xi(t)$ است؟ به‌ویژه چرا از نظر آماری نوفه گاوسی است؟ پاسخ متخصصان آماری این است که: گاوسی بودن ناشی از قضیه حد مرکزی است. دسته وسیعی از پدیده‌ها در زمان‌های بلند از لحاظ ریاضی میل به فرآیند گاوسی دارند. فرم کلی قضیه به این صورت است. فرض کنید که علاقه‌مند به اطلاعات آماری مجموع یک سری متغیر کاتوره‌ای مستقل از هم δX_j هستیم که توزیع احتمال یکسانی دارند؛ یعنی،

$$X(n) = \sum_{j=1}^n \delta X_j. \quad (20.1)$$

میانگین و واریانس مشترک آن‌ها را به ترتیب با $\mu = \langle \delta X_j \rangle$ و $\sigma^2 = \langle \delta X_j^2 \rangle - \mu^2$ نشان می‌دهیم. حال مجموع نرمال شده را به این صورت در نظر می‌گیریم،

$$X'(n) = \frac{X(n) - \mu n}{\sqrt{\sigma^2 n}}, \quad (21.1)$$

که تابع چگالی احتمال آن $p'(x'; n)$ است. حال، قضیه حد مرکزی چنین بیان می‌دارد که برای n های بزرگ، این چگالی احتمال به سمت تابع گاوسی میل می‌کند؛ به بیانی دیگر،

$$p'(x'; n) \rightarrow p'(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x'^2}{2}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (22.1)$$

^۱ Lattice of Harmonic Springs

به نتایج این قضیه برای فرآیندهای تصادفی می‌پردازیم. دو دیدگاه در مورد این قضیه مطرح می‌کنیم. از یک سو، می‌توان مجموع $X(n)$ را به عنوان ول‌گشت یک بعدی تعبیر کنیم؛ حرکت خطی مرحله به مرحله با طول گام کاتوره‌ای. این نگاه درک بهتری از تئوری کلاسیک حرکت بروانی فراهم آورده و به پیدا کردن ارتباط آن‌ها کمک می‌کند. از طرفی دیگر، می‌توان این‌طور به مساله نگاه کرد که δX_j ها اغتشاش‌های کوچک مقیاس^۱ در محیط نوفه‌ای هستند. اگر در مقیاس مشاهده، تنها آثار تجمعی بزرگ این رفتار میکروسکوپی قابل تشخیص باشد، در این صورت نیازمند مطالعه‌ی نمو $X(n)$ خواهیم بود. این نوع تحلیل‌ها نشان دهنده‌ی اهمیت نوفه گاوسی در تئوری تصادفی هستند، ضمن این‌که محدودیت‌های آن را نیز بر ملا می‌کند.

قضیه حد مرکزی برای ول‌گشت

ابتدا تصویر ول‌گشت را بررسی می‌کنیم. در این دیدگاه، δX_j طول گام زام است. فرض می‌شود که، طول‌های کاتوره‌ای گام‌ها به صورت مستقل از یکدیگر و یکنواخت توزیع شده‌اند. برای مثال، حرکت یک بعدی پیرسون، با احتمال یکسان دارای طول گام‌های گسسته $+l$ یا $-l$ $\delta X_j =$ است. در این صورت خواهیم داشت، $\mu = 0$ و $\sigma^2 = l^2$. در حرکت پیرسون دوبعدی، مختصه x توزیعی پیوسته دارد: برای یک تک گام داریم، $\delta X_j = l \cos(\theta_j)$ ، که هر θ_j به صورت یکنواخت از بازه $[0; 2\pi]$ انتخاب می‌شود. در این مورد داریم، $\mu = 0$ و $\sigma^2 = l^2 \langle \cos^2(\theta_j) \rangle = l^2/2$. ول‌گشت با $\mu \neq 0$ ، حرکت بایاس شده نام دارد.

حال با فرض این‌که n بسیار بزرگ باشد به مطالعه‌ی تابع چگالی احتمال $p(x; n)$ برای مختصه مکان ول‌گشت $X(n)$ ، می‌پردازیم. مستقیماً از (۲۱.۱) و (۲۲.۱)، می‌توان نتیجه گرفت که $p(x; n)$ تقریباً گاوسی بوده و دارای میانگین μn و واریانس $\sigma^2 n$ می‌باشد. برای این‌که بتوان ول‌گشت را یک فرآیند واقعی در نظر بگیریم، یک مختصه زمانی $t = n\tau$ تعریف می‌کنیم که τ زمان سپری شده بین هر دو گام متوالی است. در نهایت طبق قضیه حد مرکزی،

$$p(x; n) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - vt)^2}{4Dt}\right), \quad t \gg x^2/D. \quad (23.1)$$

در این‌جا، سرعت سوق $v = \mu/\tau$ و ثابت پخش $D = \sigma^2/(2\tau)$ به عنوان پارامترهای فیزیکی قابل اندازه‌گیری معرفی شده‌اند. نکته قابل ذکر، جهان‌شمولی این نتیجه است. مستقل از جزئیات آماری طول گام‌ها، توزیع مختصه مکانی تقریباً گاوسی است؛ و یک روند ثابت^۲ $\langle X(t) \rangle = vt$ وجود دارد و مربع پهنا به صورت خطی با زمان افزایش می‌یابد

^۱ Small Scale Distortions

^۲ Drift

در $\langle X^2(t) \rangle = 2Dt$ برای نمونه، اینشتین، به معادله (۶.۱) دست یافت، که معادل است با نتیجه (۲۳.۱) به ازای $v = 0$. در واقع او به صورت ضمنی، رهیافت ول‌گشت را به کار برده است: طول گام‌ها در روش او بر حسب تابع متقارن $\phi(\Delta)$ تعریف شده است. مورد خاص‌تر، ول‌گشت پیرسون در صفحه است. هر دو مختصه x و y ول‌گشت بدون بایاس با واریانس $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = l^2/2$ را نشان می‌دهند. درحالی‌که، حرکت در راستاهای x و y از نظر آماری مستقل نیستند (چراکه از طریق زاویه چرخش θ_j به یکدیگر مرتبطند)، نسبت به هم غیرهمبسته هستند: $\langle \delta X_j \delta Y_j \rangle = l^2 \langle \cos(\theta_j) \sin(\theta_j) \rangle = 0$. در چنین موردی، تعمیم قضیه حد مرکزی برای جمع بردارهای کاتوره‌ای، منجر به نتیجه $p(x, y; t) = p(x; t)p(y; t)$ می‌شود، که هر کدام از $p(x; t)$ و $p(y; t)$ خود دارای توزیع گاوسی (۲۳.۱) هستند. برای مختصه دایروی $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $D = D_x + D_y = l^2/(2\tau)$ که $p(r; t) = [r/(Dt)] \exp[-r^2/(2Dt)]$ دست یافت، که ضرب پخش دو بعدی است. و این دقیقاً مطابق است با همان نتیجه‌ی حدی؟؟ که رایلی (با به کار بستن مختصات استاندارد $n = t/\tau$ و $r' = r/l$) به دست آورد.

هرچه نسبت $x^2/(Dt)$ بزرگ‌تر باشد، تقریب گاوسی (۲۳.۱) دقیق‌تر می‌شود. عدم دقت در نواحی انتهای توزیع^۱ (دم توزیع) به چشم می‌خورد؛ از این رو نام "قضیه حد مرکزی" مناسب به نظر می‌رسد. از این مرحله به بعد، فرض می‌شود که رابطه (۲۳.۱)، عبارتی دقیق برای فرآیند $X(t)$ است. می‌توان با میل دادن τ و σ^2 به سمت صفر و ثابت نگه داشتن D ، به این حد دست یافت. در این صورت، $X(t)$ حد مقیاسی یا پخشی (به دلیل بازمقیاس کردن در رابطه (۲۱.۱)) ول‌گشت $X(n)$ خوانده می‌شود. باید توجه داشت که، به علت نحوه‌ی ساخت بر حسب طول گام‌هایی با توزیع یکنواخت و مستقل از هم، نمونه‌های فرآیند $X(t_2) - X(t_1)$ ، در صورت عدم همپوشانی بازه‌های زمانی، از یکدیگر مستقل هستند. همچنین، این نمونه‌ها گاوسی با واریانس $2D|t_2 - t_1|$ هستند، البته به این شرط که فقط بتوان اختلاف زمان‌های فراتر از $\tau \gg |t_2 - t_1|$ را تشخیص داد. این نکات فرد را به سمت این نتیجه‌گیری سوق می‌دهد که، حد مقیاسی ول‌گشت $X(n)$ در واقع یک فرآیند وینر مقیاس شده با روند ثابت است، $X(t) = vt + \sqrt{2DB}(t)$. می‌توان این عبارت را با استفاده از قضیه‌ای از دونسکر^۲ به دقت فرمول‌بندی و به صورت ریاضی اثبات نمود.

قضیه حد مرکزی، به روش‌های مختلف قابلیت تعمیم دارد. الکساندر لیاپانوف^۳ رشته‌ای از طول گام‌های مستقل δX_j را در نظر گرفت که امکان تنوع در توزیع آن‌ها وجود داشت. با توجه به این نکته، مومنت‌های بالاتر توزیع طول گام‌ها، با افزایش j غالب نمی‌شوند، بلکه به سمت گاوسی میل می‌کند. لیاپانوف شروط لازم و دقیق برای این رفتار را در مرجع [۶۰]

^۱ Far Tails of Distribution

^۲ Monroe D. Donsker

^۳ Alexandr Lyapunov

ارائه داد که در ادامه توسط لیندبرگ^۴ اصلاح شد [۶۱]. در این مورد، حد مقیاسی $X(t)$ توزیع گاوسی (۲۳.۱) دارد، اما ضرائب وابسته به زمان خواهند بود، $v = v(t)$ و $D = D(t)$.

حال سوالی که می‌تواند مطرح شود این است که آیا یک رشته‌ی پایا δX_j با بستگی ذاتی^۱، همچنان به حد گاوسی تمایل دارد یا نه. اما این سوالی بسیار ظریف است. پاسخ مثبت است اگر δX_j ها در زمان با یکدیگر آمیخته باشند. این بدین معناست که، طول گام‌هایی که از لحاظ زمانی از یکدیگر دورند، مستقل از هم هستند. هرچند، این که دقیقاً چه ویژگی‌هایی از این طول گام‌ها ترکیب شده اند، تعاریف متفاوتی دارد. مفاهیم مختلفی در این زمینه وجود دارد، برخی شهودی و برخی مجرد؛ برای بررسی دقیق ریاضی مرجع [۶۲] مناسب است. تعیین این که آیا جمع یک سری گام‌های وابسته نهایتاً به یک متغیر کاتوره‌ای گاوسی می‌رسد یا نه بسیار پیچیده است. حتی اگر این گرایش به توزیع گاوسی وجود داشته باشد، تضمینی نیست که حد مقیاسی $X(t)$ عاری از هرگونه وابستگی درونی باشد. دو مثال حرکت بروانی مربوط، ول‌گشت اسملوکوفسکی و معادله حرکت لائوین هستند. در هر دو مورد، نمودهای فرآیند در ابتدا به شدت همبسته هستند: به علت اینرسی ذره، حرکت پایدار است. اما در زمان‌های بزرگ نسبت به زمان همبستگی τ ، تقریب فرآیند وینر برقرار خواهد بود.

قضیه حد مرکزی برای نوفه کاتوره‌ای

حضور فرآیند وینر در تئوری فرآیند تصادفی، همواره به چشم می‌خورد. نوفه سفید گاوسی به مشتق فرآیند وینر ارتباط دارد. حال باید فرآیند را با حضور قضیه حد مرکزی بازبینی نمود. بدین منظور، متغیرهای δX_j را حاصل از برهمکنش‌ها با محیط به شدت افت و خیز دار پیرامون خواهیم دانست. به عنوان مثال، این متغیرها می‌توانند انتقال تکانه‌ی ناشی از برخورد میان چند ذره را مدل‌سازی کنند. کمیت مورد مطالعه می‌تواند تحت اثر پدیده‌های دیگری نیز باشد، اما بخش کاتوره‌ای، فقط حاصل از δX_j است.

به صورت خلاصه، متغیرهای δX_j تنها منشا نوفه تصادفی هستند. حال فرض کنیم که کمیتی که تحت اثر این نوفه است، به آرامی به این محرک‌ها واکنش می‌دهد. که علت می‌تواند اینرسی بالای کمیت باشد یا حضور یک اثر خارجی بسیار قوی اما کند تغییر. در این صورت، یک δX_j به تنهایی اثری نداشته و می‌توان از نوفه‌ی^۲ موثر صحبت کرد،

$$\xi_{\bar{\tau}}(t) = \frac{\gamma}{\bar{\tau}} \sum_{j=t/\bar{\tau}}^{(t+\bar{\tau})/\bar{\tau}} \delta X_j = \frac{\gamma}{\bar{\tau}} [X(t+\bar{\tau}) - X(t)]. \quad (24.1)$$

^۴ Jarl Waldemar Lindeberg

^۱ Inherent Dependence

^۲ Effective Noise

در این رابطه، فرض شده است که τ یا زمان بین دو شوک پیاپی وارد شده توسط نوفه، بسیار کوچک‌تر از $\bar{\tau}$ است. $\bar{\tau}$ زمان نوعی را نشان می‌دهد که نیاز داریم تا جهت شکل دادن یک اثر قابل تشخیص برای جسم آرام، میزان کافی از آثار حاصل از نوفه‌ها را جمع کنیم (ضرایب وارد شده که قطعاً به سیستم مربوطه بستگی دارند، به منظور سازگاری با فرمول‌بندی حرکت بروانی است).

در این متن، قضیه حد مرکزی به این طریق بیان می‌شود. نخست، تحت شرایط مناسب حاکم بر نوفه میکروسکوپی δX_j (شرایط لیپانوف، لیندبرگ یا ترکیبی)، توزیع نوفه موثر $\xi_{\bar{\tau}}(t)$ تقریباً گاوسی است. سپس، از میان جزئیات آماری نوفه میکروسکوپی δX_j ، تنها میانگین μ_j و واریانس σ_j کمیت‌های مربوط خواهند بود که به ترتیب مرکز و پهنای آن‌را نشان می‌دهند. می‌توان نوفه موثر را به دو بخش تقسیم نمود، $\xi_{\bar{\tau}}(t) = \xi_{\bar{\tau}}^{drift}(t) + \xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t)$. جمله اول، جمله‌ی سوق بوده و میانگین تجمعی μ_j را نشان می‌دهد. این نوفه، تعینی است و تحول میانگین نوفه کل را بیان می‌دارد: $\langle \xi_{\bar{\tau}}(t) \rangle = \xi_{\bar{\tau}}^{drift}(t)$. جمله دوم از دل افت و خیزهای میکروسکوپی σ_j بیرون می‌آید. که میانگین صفر دارد و انحراف‌های کاتوره‌ای از رفتار سوق تعینی را نشان می‌دهد: $\langle [\xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t)]^2 \rangle - \langle \xi_{\bar{\tau}}(t) \rangle^2 = \langle [\xi_{\bar{\tau}}(t)]^2 \rangle$. به این ترتیب منطقی است که آثار سوق را به این صورت تعبیر کنیم که گویا یک اثر تعینی خارجی دیگری وجود دارد. به عنوان مثال، برطبق معادله لانژوین (۱۳.۱)، یک ذره بروانی با سرعت معلوم v دو نوع نیرو را تجربه می‌کند که هر دو از برهمکنش با ملکول‌های سیال نشات می‌گیرند. از یک سو، فرکانس برخورد ذرات برای $v \neq 0$ غیرمتقارن است. که به صورت میانگین منجر به یک شتاب منفی خالص - می‌شود. از سویی دیگر، کاتوره‌ای بودن برخورد ذرات از طریق نوفه جداگانه‌ای $\xi(t)$ وارد می‌شود که بایاس نشده است.

در نهایت حالتی را در نظر می‌گیریم که سهم افت و خیزها پایا است، $\sigma_j \equiv \sigma$ ، نیز بازه زمانی بستگی در رشته‌ی نوفه‌ای میکروسکوپی δX_j در مقایسه با $\bar{\tau}$ بسیار کوچک است. این شرط تضمینی است برای این که نوفه $\xi_{\bar{\tau}}$ قابل تقریب بر حسب فرآیند وینر است. در این حالت، حد مقیاسی با ثابت پخش $D > 0$ به این صورت خواهد بود: $\xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t) = \gamma \bar{\tau}^{-1} \sqrt{2D} [W(t + \bar{\tau}) - W(t)]$. به عبارتی دیگر، $\xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t)$ یک فرآیند گاوسی است:

$$\begin{aligned} \langle \xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t) \xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t') \rangle &= \frac{2D\gamma^2}{\bar{\tau}} \begin{cases} 0, & |t - t'|, \\ \left(1 - \frac{|t - t'|}{\bar{\tau}}\right), & 0 < |t - t'| < \bar{\tau}, \\ 1, & |t - t'|. \end{cases} \end{aligned} \quad (25.1)$$

در مرحله از هر دو ویژگی مستقل بودن و پایایی نمونه‌های فرآیند وینر استفاده شد. با مقایسه مستقیم با معادله (۱۴.۱)

می‌توان دریافت که برای تمامی اهداف، نوفه‌ی موثر $\xi_{\tau}^{fluct}(t)$ مانند نوفه سفید گاوسی رفتار می‌کند. دقیقاً نوفه سفید نیست بلکه تنها در مقیاس‌های زمانی از مرتبه τ شبیه است.

باید توجه نمود که ویژگی آماری نوفه‌های میکروسکوپی و گسسته δX_j لزوماً گاوسی نیست. آن‌ها مجاز هستند تا با تغییر τ تغییر کنند یا دو به دو به هم وابسته باشند. به موجب قضیه حد مرکزی، آثار تجمعی آن‌ها در زمان‌های بلند، به‌خوبی با فرآیند نوفه سفید گاوسی تقریب زده می‌شود. این امر حضور همیشگی آن‌ها در مدل‌سازی‌های تصادفی را توجیه می‌نماید. تاریخچه قضیه حد مرکزی بازمی‌گردد به مطالعات مویوره^۱ در سال ۱۷۳۳ بر روی توزیع برنولی و لاپلاس در ۱۸۱۲. اولین فرمول‌بندی دقیق برای قضیه در حالت کلی در ۱۹۰۱ توسط لیاپانوف [۶۳] صورت گرفت. همانند دیگر موضوعات مطرح در تئوری احتمالات، زمینه‌های مختلف این قضیه نیز با آغاز قرن بیست و یکم شروع به رشد نمود. سهم عمده در این راستا به میسس^۲، پولیا^۳، لیندبرگ، لوی و کرامر^۴ تعلق دارد [۶۳].

۱.۶ پخش غیر عادی و نوفه: نه گاوسی و نه سفید

روش حذف متغیرهای سریع و قضیه حد مرکزی اساسی را برای تئوری‌های مبتنی بر معادلات لانژوین و فوکر-پلانک فراهم می‌آورند. از طرفی، کمی بررسی دقیق‌تر محدودیت‌های این رهیافت‌ها را نشان می‌دهد. به طور کلی باید در سیستم‌های پیچیده و محیط‌های شامل ناخالصی انتظار شکست تئوریهای کلاسیک پخش و نویز را داشت. چنین رفتاری متفاوت با آنچه معمول است، دینامیک غیرعادی نامیده می‌شود و البته نیازمند طبقه‌بندی جزئی‌تری است.

سیستم‌های دور از حالت تعادل حلقه دوار^۵ آزمایش ساده‌ای که در سال ۱۹۹۳ با استفاده از یک حلقه دوار انجام شد (تصویر ۱۰.۱) [۶۴، ۶۵] نوعی فرآیند پخش را نشان داد که بسیار متفاوت بود از آنچه تا آن زمان توسط تئوری حرکت بروانی اینشتین بررسی شده بود. آب از طریق روزنه‌های I وارد حلقه شده و از طریق حفره‌های O خارج می‌شود. حلقه کاملاً پر از آب می‌شود و مانند جسم صلب شروع به دوران می‌کند (دیواره‌های درونی و بیرونی با هم دوران می‌کنند). پمپاژ سیال درون حلقه یک جریان متلاطم^۶ ایجاد می‌کند. دوربینی تعبیه شده بر روی حلقه شکل‌گیری گرداب‌های متلاطم^۷

^۱ de Moivre

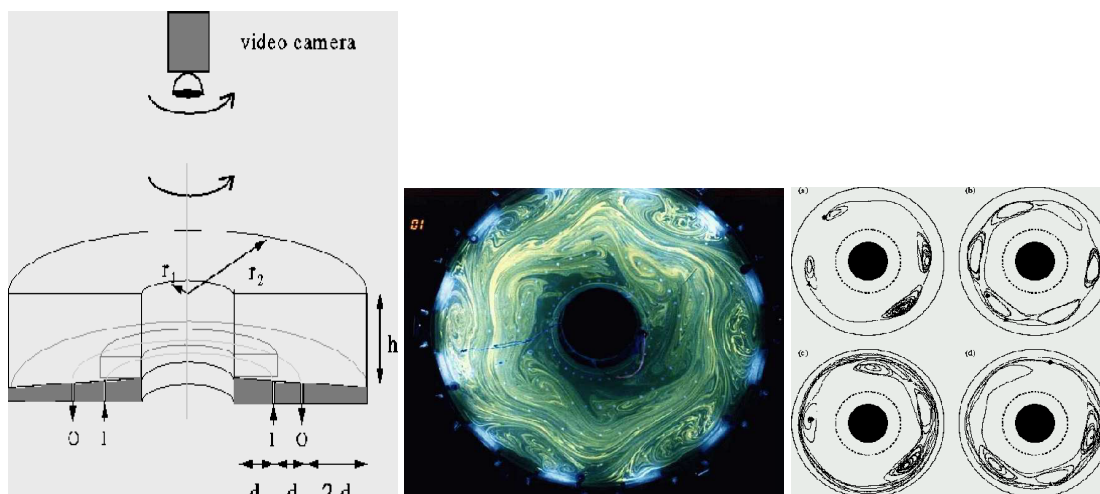
^۲ Mises

^۳ Polya

^۴ Cramer

^۵ The rotating Annulus

^۶ Turbulent Flow



شکل ۱۰.۱: تصویر چپ: حلقه دوار. تصویر میانی: گرداب‌های تشکیل شده درون حلقه دوار که توسط دوربین ضبط شده است. تصویر راست: مدارهای نوعی نشان دهنده‌ی مسیر ذرات درون حلقه دوار [۶۴، ۶۵].

درون حلقه دوار را ضبط می‌نمایند و به این ترتیب امکان ردیابی مسیر ذرات متفاوت تزریق شده به سیال و مشاهده آن‌را فراهم می‌آورد. در حالت معمول پخش که در سیالات نزدیک به تعادل رخ می‌دهد، مسیرهای ذره توسط گام‌های نامنظم اما کوتاهی مشخص می‌شوند که باعث می‌شود مسیرها بی‌نظم اما همگن باشند (تصویر ۵.۱). اما مسیرهای حاصل برای ذرات در یک حلقه دوار به شدت متلاطم که بسیار دور از حالت تعادل است، نوعی مدارهای متفاوت با دو ویژگی بارز و مهم را نشان می‌دهند. در واقع مشاهده می‌شود که گاهی ذرات درون گرداب‌ها به دام افتاده‌اند^۱ و به صورتی غیر معمول زمانی طولانی را در یک ناحیه کوچک سپری نموده‌اند. و یا گاهی ذرات گام‌های بلندی برداشته و با یک قدم مسیر بسیار بلندی (حتی در مواردی به اندازه تمام محیط حلقه) طی نموده یا به بیانی دیگر پروازهای بلندی انجام داده‌اند.

مهاجرت سلول‌ها تصویر (۱۱.۱) مسیر یک تک سلول زیستی را نشان می‌دهد که بر روی زیرلایه‌اش می‌خزد [۶۶]. تقریباً تمام سلول‌ها بدن انسان حتی برای یک مرتبه در عمرشان هم که شده در بازه‌ای از زمان در حرکت هستند. پدیده‌هایی چون رویان زایی^۲، التیام زخم^۳، سیستم ایمنی بدن^۴ و سلول‌های تشکیل تومور متاستاز^۵ از جمله موارد معروفی هستند که بر اساس مهاجرت سلول‌ها استوارند. با مقایسه مسیر مهاجرت این سلول‌ها (۱۱.۱) با یک ذره بروانی (تصویر ۵.۱) ممکن به

^۷ Turbulent Eddies

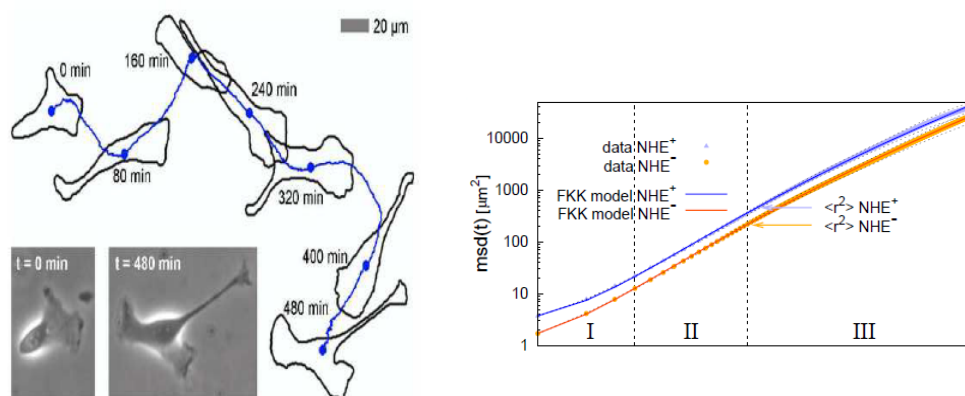
^۱ Trapping

^۲ Embryogenesis

^۳ Wound-Healing

^۴ Immune Defense

^۵ The Formation of Tumor Metastases



شکل ۱۱.۱: تصویر چپ: مسیر حرکت سلول بر روی زیرلایه اش. سلول در طول مسیر خود بارها شکل و جهت حرکتش را تغییر می‌دهد. تصویر درونی تصاویر فاز کنتراست در ابتدا و انتهای مسیرش را نشان می‌دهد. تصویر راست: نمودار تمام لگاریتمی میانگین مربع جابجایی نسبت به زمان برای مسیر حرکت دو نوع سلول متفاوت است [۶۶].

دشواری بتوان تفاوتی بنیادی همانند مورد حلقه دوار را در این جا یافت. آزمایشی که اکنون به آن می‌پردازیم [۶۶]، بر روی دو گونه از سلول‌های تبدیل یافته اپیتیکال کلیوی^۱ ($MDCK - F$) صورت گرفته است: $(NHE+)$ ^۲ و (NHE) ^۳. طبق رابطه (۷.۱) برای ذره بروانی در زمان‌های بلند، میانگین مربع جابجایی متناسب با زمان است، اما شکل (۱۱.۱)، سمت راست) نشان می‌دهد که هر دو نوع سلول متفاوت با این پیش‌بینی رفتار می‌کنند. نخست، سلول‌های (NHE) با بازده کمتری نسبت به $(NHE+)$ حرکت می‌کنند که منجر به MSD کمتری در همه زمان‌ها می‌شود. می‌توان دید که MSD برای هر دو گونه سلول، گذاری را در سه ناحیه دینامیکی بروز می‌دهد. در ناحیه میانی I میانگین مربع جابجایی به بیشترین مقدار افزایش خود می‌رسد و وقتی مربع مسافت سلول بیش از شعاع مربع میانگین خودش می‌شود، شیب نمودار کاهش می‌یابد. از این رو هر دو سلول رفتاری متفاوت از ذره بروانی دارند.

تغییرات جریان بر حسب زمان در نیم رساناهای آمورف اساس کارکرد دستگاه‌های فوتوکپی و پرینت لیزری، ترابرد الکترون‌ها یا حفره‌ها^۴ در نیم‌رساناهای آمورف^۵ و تحت میدان‌الکتریکی است. در اوایل ۱۹۷۰، مشخص شد که نمی‌توان جابجایی این حامل‌های بار را با استفاده از معادله پخش معرفی شده توسط اینشتین توصیف نمود (تصویر ۱۲.۱). مساله

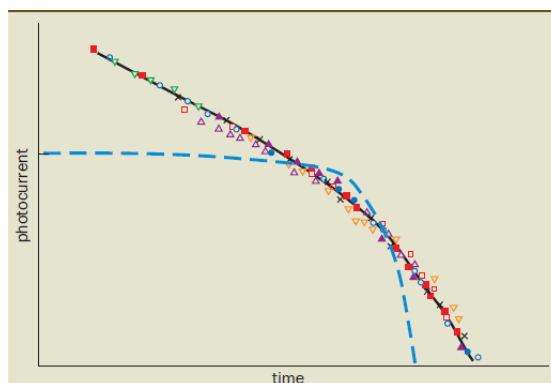
^۱ Transformed Renal Epithelial Madin Darby Canine Kidney

^۲ Wild-Type

^۳ NHE-Deficient

^۴ Transport of Electrons or Holes

^۵ Amorphous Semiconductors



شکل ۱۲.۱: جریان نوری $I(t)$ اندازه‌گیری شده در لایه‌های نازک آمورف که هسته اصلی دستگاه کپی را تشکیل می‌دهد. خط آبی گسسته نشان‌دهنده رفتار مورد انتظار بر اساس پیش‌بینی‌های انجام شده برای ذره بروانی است. یعنی تبعیت از معادله پخش (۴.۱) که شر و مونترال را برانگیخت تا فرآیند را با استفاده از یک توزیع با انتهای پهن برای زمان توجیه کنند [۶۷]. هر دو محور لگاریتمی هستند.

در ۱۹۷۵ توسط هاروی شر^۱ و البیوت مونترال^۲ بیشتر بررسی و مشخص شد. آن‌ها دریافتند که حامل‌ها در طی حرکت در محیط آمورف توسط نقص‌های موضعی در ماده به دام می‌افتند و افت و خیزهای گرمایی آن‌ها را از این دام نجات می‌دهد. این بدان معناست که بازه‌های زمانی که حامل‌ها در این دام‌ها سپری می‌کنند، از یک توزیع گاوسی پیروی نمی‌کنند بلکه همان‌گونه که در فصل بعد خواهیم دید دارای توزیع پهنی در ناحیه انتها هستند. به این ترتیب، ذرات در این حالت کندتر از ذره بروانی پخش می‌شوند.

همان‌طور که تاکنون مشاهده شد، متداول‌ترین روش مشخصه‌یابی فرآیند پخش غیرعادی $X(t)$ براساس رفتار کمیت میانگین مربع جابجایی است،

$$\langle X^2(t) \rangle \simeq t^{2H}. \quad (26.1)$$

در غیاب نیروها و یا قیدهای خارجی و در زمان‌های بسیار بلند، این کمیت برای یک فرآیند پخش کلاسیک عادی نتیجه (۲۶.۱) را می‌دهد با $H = 1/2$ ، همان‌طور که از معادلات اینشتین، اسملوکوفسکی و لانژوین برمی‌آید. بنابراین بستگی خطی، یک شاخصه پخش عادی^۳ است. اما در بسیاری از مشاهدات تجربی از جمله موارد ذکر شده در این بخش، رفتار میانگین مربع جابجایی برای ذرات رابطه خطی با زمان را نشان نمی‌دهد. فرآیندهایی با نمای هارست $0 < H < 1/2$

^۱ Harvey Scher

^۲ Elliot Montroll

^۳ Normal Diffusion

به عنوان زیرپخش^۱ شناخته می‌شوند. مورد $H > 1/2$ به عنوان فرایپخش^۲ خوانده می‌شود و حالت $H = 1$ ، مورد حدی بالیستیک یا موج‌گونه^۳ است.

این نوع پخش با رفتار معرفی شده در معادله‌ی (۲۶.۱)، در طیف وسیعی از پدیده‌ها به چشم می‌خورد؛ از شارش حامل‌ها در نیمه‌رساناهای آمورف [۶۷، ۶۸] گرفته تا حرکت پخشی ردیاب‌های زیرمیکرونی در سلول‌های زیستی [۶۹]، دینامیک ذرات ریز در شارهای آشوب ضعیف [۶۴]، پراکندگی ردیاب‌های شیمیایی در آب‌های زیرزمینی [۷۰] و دینامیک بازارهای سرمایه‌گذاری [۷۱] تنها نمونه‌هایی از حضور این رفتار در دینامیک پدیده‌هاست [۳، ۷۲-۷۵].

در حالت کلی فرآیندهای پخش غیرعادی جهان‌شمول نیستند و منحصر بر اساس رابطه (۲۶.۱) توصیف نمی‌شوند. بلکه ممکن است مکانیزم‌های فیزیکی مختلفی منجر به این رفتار غیرخطی توانی شوند که در ذات خود کاملاً از یکدیگر متمایز باشند. رهیافت‌ها و دیدگاه‌های مختلفی در جهت توصیف پخش غیرعادی مطرح شده است. در این جا به‌طور خلاصه به معرفی چند مورد از آن‌ها می‌پردازیم. از جمله این رهیافت‌ها می‌توان از پروازهای لوی، ول‌گشت زمان پیوسته، حرکت و نوفه‌ی بروانی کسری و حرکت بروانی بازمقیاس شده نام برد.

مسیر به سمت پخش عادی بر مبنای وجود مقیاس زمانی است. ول‌گشت زمان پیوسته^۴ به سیستم‌هایی می‌پردازد که مقیاس‌های زمان‌های واهلش درونی در آن‌ها شدیداً در معرض اتفاقات کاتوره‌ای است. وقتی که مفهوم مقیاس زمانی نوعی برای نوفه قابل تعریف نباشد، اعتبار قضیه حد مرکزی نیز باید دوباره بازنگری شود. این شرایط ممکن است در حالتی رخ دهد که پخش در محیطی بسیار ناهمگن شامل سدها و دام‌های فراوان انجام شود. در حالت بسیار حدی، مقدار انتظاری زمان واهلش بی‌نهایت خواهد بود که منجر به پدیده‌هایی همچون زیرپخش، پیری و شکست ارگودیسیتی می‌شود.

تحت شرایط مناسب، افت و خیزهای نوفه می‌توانند مقادیر حدی بزرگی اختیار کنند. قضیه حد مرکزی نیازمند محدود بودن مقدار واریانس اثر حاصل از نوفه σ^2 است. در صورت ارضا نشدن این شرط، همگرا شدن به سمت حد غیرگاوسی از تبعات آن خواهد بود. پخش حاصل با نام پروازهای لوی^۵ بوسیله آمار دارای انتهای پهن^۶ مشخص می‌شوند. حرکت به شدت ناپیوسته و فرایپخشی است. حیطة کاربرد این حالت یا حرکت‌های نزدیک آن مانند گام‌های لوی^۷، در واقع حرکت‌های

^۱ Subdiffusion

^۲ Supperdiffusion

^۳ Ballistic or Wavelike

^۴ Continuous time random walks

^۵ Levy Flights

^۶ Heavy Tailed

^۷ Levy Wlaks

دینامیکی در محیط‌های فراکتالی یا محیط‌های به شدت آشفته^۱ است.

طیف فرآیندهای پخش غیر عادی بسیار متنوع است و ذکر کامل انواع آن خارج از حیطه این رساله است؛ برای مطالعات بیشتر شامل گام‌های خودمقاطع^۲، حرکت مسدود شده^۳، پخش روی فراکتال‌ها و مدل‌های ناخالصی ...^۴، می‌توان به مراجع [۳، ۷۲-۷۶] مراجعه نمود. در فصل آینده به معرفی برخی مدل‌های پرکاربرد در پخش غیر عادی می‌پردازیم و فرمول‌بندی آن‌ها، که منجر به وارد شدن به حیطه ریاضیات کسری است، معرفی می‌شود.

^۱ Turbulant

^۲ Self Avoiding Walk

^۳ Obstructed Motion

^۴ Quenched Disorder

فصل دوم

مدل‌های پخش غیرعادی

الگوی مشاهده شده در فرآیند پخش در محیط‌های بی‌نظم، عموماً با آنچه از حرکت بروانی انتظار می‌رود متفاوت است. در واقع، مومنت دوم جابجایی‌ها با زمان رابطه‌ی توانی دارد که این رفتار با عنوان پخش غیرعادی شناخته می‌شود. مکانیزم‌های فیزیکی مختلفی منجر به این رفتار توانی می‌شوند. با شناخت دقیق ویژگی‌های آماری این مکانیزم‌ها، می‌توان شناخت بهتری از فرآیند پخش غیرعادی داشت. از جمله مهم‌ترین مدل‌های معرفی شده جهت توصیف پخش غیرعادی عبارتند از ول‌گشت زمان پیوسته ($CTRW$) به عنوان فرآیندی غیر گاوسی و حرکت بروانی بازمقیاس شده (SBM) که از جمله فرآیندهای گاوسی در توصیف پخش غیرعادی است. در این فصل پس از معرفی برخی از مفاهیم و ویژگی‌های سیستم‌های آماری، به مطالعه‌ی دو مدل ذکر شده می‌پردازیم.

۱.۲ آمار پخش غیرعادی

۱.۱.۲ توزیع لوی

اهمیت اساسی توزیع نرمال به علت وجود قضیه حد مرکزی است که خود نتیجه قضیه برنولی، لاپلاس-مویوره و قانون اعداد بزرگ^۱ است. این مفاهیم بعداً توسط پاول لوی تعمیم یافت و بعد از او توزیع‌های نرمال تعمیم یافته ظهور کردند. در مراجع [۷۷-۷۹] می‌توان جزئیات بیشتری در مورد توزیع‌های لوی و قضیه حد مرکزی تعمیم یافته لوی-گدنکو دست

^۱ The Law of Large Numbers

یافت. بر طبق کارهای انجام شده توسط لوی [۷۷]، یک توزیع F توزیعی پایدار^۱ است اگر به ازای دو ثابت c_1 و c_2 ، عدد مثبت ثابت c وجود داشته باشد به قسمی که کمیت X در رابطه زیر،

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 = cX \quad (1.2)$$

همانند متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 (که مستقل بوده و توزیع یکنواخت دارند (iid))، از توزیع F پیروی کند. به بیانی دیگر اگر $\varphi(z)$ ،

$$\varphi(z) \equiv \langle e^{iXz} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iXz} dF(X), \quad (2.2)$$

تابع مشخصه توزیع F باشد، در این صورت F پایدار است اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\varphi(c_1 z) \varphi(c_2 z) = \varphi(cz). \quad (3.2)$$

تعریف دقیق‌تر توسط فلر^۲ [۲۱] ارائه شد. فرض کنید X, X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی (iid) با توزیع مشترک F باشند. در این صورت F پایدار است اگر ثابت‌های $c_n > 0$ و γ_n وجود داشته باشند، به طوری که رابطه زیر برقرار باشد:

$$Y_n \equiv \sum_i X_i \leftrightarrow c_n X + \gamma_n \quad (4.2)$$

که به این معناست که متغیرهای تصادفی هر دو سمت توزیع یکسانی را، F ، دنبال می‌کنند. در نهایت، تابع مشخصه طبق رابطه (۳.۲) رابطه تابعی زیر را ارضا می‌کند،

$$\varphi^n(z) = \varphi(c_n z) e^{i\gamma_n z} \quad (5.2)$$

که حل دقیق دارد و پاسخ به این صورت است،

$$\psi(z) = \log(\varphi(z)) = i\gamma z - c|z|^\alpha \left\{ 1 + i\beta \frac{z}{|z|} \omega(z, \alpha) \right\} \quad (6.2)$$

^۱ Stable

^۲ Feller

و α, β, γ, c مقادیر ثابت هستند (γ می تواند هر مقدار حقیقی داشته باشد، $0 < \alpha \leq 2$ ، $-1 < \beta \leq 1$ و $c > 0$ هستند)

و

$$\omega(z, \alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right), & \text{if } \alpha \neq 1, \\ \frac{\gamma}{\pi} \log(|z|), & \text{if } \alpha = 1. \end{cases} \quad (7.2)$$

α شاخص یا نمای مشخصه لوی^۱ نام دارد. با به کارگیری رابطه (۶.۲) می توان نشان داد که ضریب بهنجارش c_n در رابطه (۳.۲) برابر است با $n^{1/\alpha}$. مقدار حدی $\alpha = 2$ معادل است با توزیع نرمال گاوسی که از قضیه حد مرکزی به دست می آید. به ازای $\beta = 0$ توزیع متقارن است. γ توزیع را انتقال می دهد و c ضریب مقیاسی برای X است. از این رو γ و c پارامترهای اساسی نیستند و با صرف نظر کردن از آنها، تابع مشخصه رابطه زیر را ارضا می کند،

$$|\varphi(z)| = e^{-|z|^\alpha} \quad \alpha \neq 1. \quad (8.2)$$

بنابراین می توان نوشت،

$$\psi = -|z|^\alpha \exp\left\{i \frac{\pi\beta}{4} \text{sign}(z)\right\} \quad (9.2)$$

با پارامتر اصلی β که محدود به این ناحیه می باشد،

$$|\beta| \leq \begin{cases} \alpha, & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ 2 - \alpha, & \text{if } 1 < \alpha < 2. \end{cases} \quad (10.2)$$

با اعمال تبدیل فوریه بر $\varphi(z)$ و از طریق رابطه (۹.۲) تعریف می شود،

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty \exp\left(-ixz - z^\alpha \exp\left\{i \frac{\pi\beta}{4}\right\}\right) dz. \quad (11.2)$$

^۱ Lévy Index or Characteristic Exponent

از این رو،

$$f_{\alpha,\beta}(x) = f_{\alpha,-\beta}(-x) \quad (۱۲.۲)$$

و در نتیجه،

$$f_{\alpha,\circ}(x) = f_{\alpha,\circ}(-x) \quad (۱۳.۲)$$

نسبت به x متقارن است.

قضیه حد مرکزی تعمیم یافته لوی-گدنکو. فرض می‌کنیم برای متغیرهای (iid) X_1, X_2, \dots داریم $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$. اگر توزیع Y_n با بهنجارش مناسب در حد $n \rightarrow \infty$ به یک توزیع F همگرا شود، F پایدار است. به ویژه اگر واریانسش محدود باشد، F گاوسی خواهد بود و از قضیه حد مرکزی تبعیت می‌کند. رفتار مجانبی توزیع لوی پایدار به شکل توانی معکوس است،

$$f_{\alpha,\beta}(x) \sim \frac{A_{\alpha,\beta}}{|x|^{\alpha+1}}, \quad \alpha < 2. \quad (۱۴.۲)$$

برای تمام لوی‌های پایدار با $0 < \alpha < 2$ ، واریانس واگراست،

$$\langle x^2 \rangle \rightarrow \infty. \quad (۱۵.۲)$$

در مقابل، مومنت‌های کسری برای مقادیر مطلق x به ازای هر $0 \leq \delta < \alpha \leq 2$ متناهی هستند،

$$\langle |x|^\delta \rangle < \infty. \quad (۱۶.۲)$$

۲.۱.۲ ارگودیسیتی

برای یک فرآیند پخش میانگین مربع جابجایی (MSD) را می‌توان از دو طریق به ترتیب هنگردی و زمانی به دست آورد:

$$\langle x^2(t) \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i(t) - x_i(t_0)]^2 \quad (17.2)$$

$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{t-\Delta} \int_0^{t-\Delta} [x_i(t' + \Delta) - x_i(t')]^2 dt' \right\}$$

در میانگین زمانی، زمان تاخیری Δ نقش زمان مشاهده t را ایفا می‌کند. بر طبق فرضیه شبه‌ارگودیک، یک سیستم ارگودیک^۱ خوانده می‌شود اگر هر مسیری در زمان محدود بتواند به طور دلخواه به هر نقطه فضای فاز برسد. برای سیستم‌های ارگودیک میانگین‌های زمانی و هنگردی معادل یکدیگر می‌باشند، به عبارتی دیگر، باید برای زمان‌های طولانی داشته باشیم:

$$\langle x^2(\Delta) \rangle \sim \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle. \quad (18.2)$$

سیستم‌هایی دارای شکست ارگودیسیتی، می‌توانند بعد از گذارهای فاز با شکست تقارن شکل گیرند، یا به بیانی دیگر وقتی که بخش‌هایی از فضای فاز در اختیار سیستم قرار نگیرد. بوجاد^۲ اصطلاح شکست ضعیف ارگودیسیتی^۳ را وارد کرد. دینامیک سیستم توسط تابع توزیع زمانی به صورت توانی واگرا شونده، تعیین می‌شود. سیستم‌های با پخش غیرعادی بر طبق مدل ولگشت تصادفی زمان پیوسته، نمونه‌ای از این دست هستند.

ویژگی دیگری که در فرآیندهای غیرارگودیک ضعیف مشاهده می‌شود، این است که میانگین زمانی مشاهده‌پذیرها، حتی برای زمان مشاهده‌ی بسیار بلند، کمیتی تصادفی است و از نمونه‌ای به نمونه‌ی دیگر متفاوت خواهد بود که حول مقدار میانگین خود افت و خیز دارد. معیاری که این پراکندگی‌ها را نشان می‌دهد، پارامتر شکست ارگودیسیتی EB نامیده شده و به این صورت تعریف می‌شود،

$$EB(\Delta) = \frac{\langle (\overline{\delta^2(\Delta)})^2 \rangle - \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle^2}{\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle^2} = \langle \xi^2(\Delta) \rangle - 1. \quad (19.2)$$

^۱ Ergodic

^۲ Bouchaud

^۳ Weak Ergodicity Breaking

که در این رابطه $\langle \xi^2(\Delta) \rangle = \frac{\overline{\delta^2(\Delta)}}{\overline{\delta^2(\Delta)}}$ است. برای حرکت براونی در حد $\Delta/t \rightarrow 0$ این کمیت به صورت خطی با Δ/t به صفر میل می کند [۸۰، ۸۱].

$$EB_{BM}(\Delta) = 4\Delta/(3t). \quad (20.2)$$

۳.۱.۲ زمان اولین عبور

زمان اولین عبور^۱ (FPT) از جمله ویژگی های آماری مهم در پدیده پخش است [۲۱]. وقتی اطلاعات آماری سیستم به اندازه کافی در اختیار باشد، بررسی ویژگی آماری زمان اولین عبور، از جمله کمیت هایی است که برای تعیین نوع فرآیند پخش غیرعادی انجام می شود. در واقع زمان اولین عبور به زمان T_a گفته می شود که ذره در فرآیند پخش (حرکت تصادفی خود) برای اولین بار بعد از حرکت (از مقدار صفر) به یک نقطه یا مقدار خاص a برسد. از آنجا که فرآیند تصادفی است، در اصل چگالی احتمال T_a مورد بررسی قرار می گیرد و می تواند یک شاخصه مهم در تشخیص نوع فرآیند پخش باشد به ویژه برای سیستم های مقید^۲ به یک پتانسیل خاص. در آزمایش های ردیابی تک ذره ای^۳، به راحتی می توان T_a را به صورت مومنت های زمانی، وقتی که ذره یک فاصله معین از نقطه شروع حرکتش را طی می کند، اندازه گیری کرد. همان طور که در مرجع [۸۲] نشان داده شده است، مقیاس بندی برای زمان اولین عبور میانگین نسبت به فاصله از مبدا که از تکرار آماری چنین آزمایشی به دست آمده است، یکی از مشخصات فرآیند پخش مربوط است.

زمان اولین عبور و اصل بازتاب

ممکن است یافتن T_a یا چگالی احتمال آن به نظر مشکل باشد، اما در ۱۸۸۷ آندره^۴ با یک حيله ساده، نشان داد که کار سختی نیست. این حيله اصل بازتاب نامیده می شود. هرچند روش متداول تر رسیدن به توزیع زمان اولین عبور از طریق معادله فوکر-پلانک انجام می شود [۸۳].

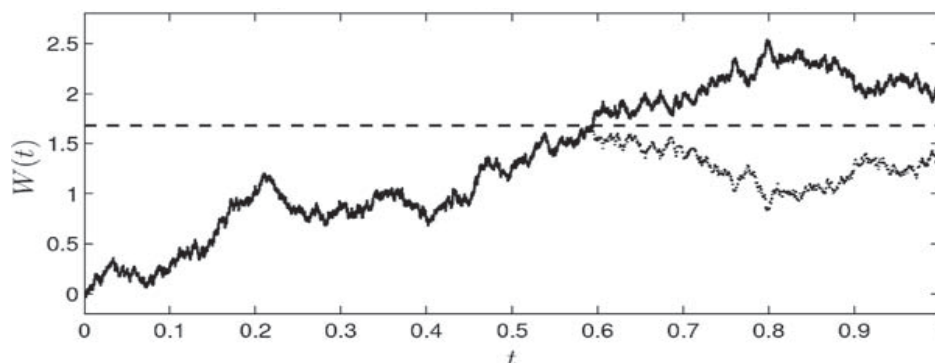
به عنوان مثال، یک فرآیند وینر را در نظر می گیریم که در زمان τ برای اولین بار از مقدار a عبور می کند تصویر (۱.۲).

^۱ First Passage Time

^۲ Confined Systems

^۳ Single Particle Tracking Experiments

^۴ D. André



شکل ۱.۲: مسیر نمونه برای فرآیند وینر که در زمان $t = \tau$ برای اولین بار به مقدار a می‌رسد. همچنین مسیر دیگری نیز نشان داده شده است که تا وقتی به a می‌رسد دقیقاً مانند مسیر اول است، و در ادامه بازتاب مسیر اولی نسبت به محور افق در نقطه a است.

می‌توان بعد از عبور آن از a ، با بازتاب این مسیر نسبت به خط افق در ارتفاع a ، مسیر دیگری یافت. مسیر دوم نیز تا زمان τ همانند اولی است، اما بعد این زمان تغییر می‌کند که در شکل به صورت خط چین نشان داده شده است. حال، از آنجا که فرآیند وینر متقارن است (بالا رفتن همان اندازه محتمل است که پایین رفتن)، احتمال هر دو مسیر یکسان است. این همان اصل بازتاب است و بیان می‌کند که اگر مسیر یک فرآیند تصادفی متقارن را از هر نقطه‌ای منعکس کنیم، مسیر دوم نیز دقیقاً همان احتمال وقوع اولی را دارد.

حال این اصل را استفاده می‌کنیم تا چگالی احتمال برای زمان اولین عبور را بیابیم. فرآیند وینری را در نظر بگیرید که در زمان $t = 0$ از مقدار 0 شروع و برای مدت T جریان داشته است. در این مدت زمان بسته به مسیری که طی نموده به یک بیشینه M_T می‌رسد. حال احتمالی را محاسبه می‌کنیم که M_T بزرگتر یا مساوی a باشد. با بررسی تصویر (۱.۲)، مشاهده می‌شود که بیشینه هر دو فرآیند بزرگتر یا مساوی a است. بنابراین برای هر مسیر نمونه که مقدار نهایی اش بزرگتر از a است، دو مسیر وجود دارد که برای آن $M_T \geq a$. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که،

$$Prob(M_T \geq a) = 2 \times Prob(W(T) \geq a). \quad (21.2)$$

حال محاسبه احتمال این که $W(T)$ بزرگتر از a باشد ساده است، چراکه چگالی احتمال برای $W(T)$ را می‌دانیم. بنابراین،

$$Prob(M_T \geq a) = 2 \times Prob(W(T) \geq a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \int_a^\infty e^{-x^2/(2T)} dx. \quad (22.2)$$

این انتگرال جواب تحلیلی ندارد اما قطعاً با استفاده از روش‌های عددی قابل محاسبه است.

با توجه به نتایج بالا، می‌توان چگالی احتمال زمان اولین عبور از a را یافت. به این منظور صرفاً نیاز است بدانیم که زمان لازم برای فرآیند وینر که بتواند به a برسد، کمتر یا مساوی T است اگر و تنها اگر بیشینه فرآیند وینر در زمان T یعنی M_T بزرگ‌تر از a باشد. در نتیجه،

$$Prob(T_a \leq T) = Prob(M_T \geq a) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi T}} \int_a^{\infty} e^{-x^2/(2T)} dx. \quad (23.2)$$

بنابراین، احتمال $T_a \leq T$ تابع توزیع $F(T)$ برای T_a است، و چگالی احتمال برای T_a ، $f(T)$ است،

$$f(T) = \frac{dF(T)}{dT} = \frac{d}{dT} \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi T}} \int_a^{\infty} e^{-x^2/(2T)} dx \right]. \quad (24.2)$$

و این روش پایه‌است برای یافتن زمان اولین عبور در مورد فرآیندهای پخش غیرعادی که در ادامه بیشتر به آن‌ها می‌پردازیم.

۴.۱.۲ اثر تحولات گذشته

فرض کنید که چشمک زدن یک تک نقطه کوانتومی^۱ تابشی را بین حالت گسیل نور و خاموش آن مشاهده می‌کنیم [۸۴]. با وجود این که این آزمایش گذارهای سریع میان حالت‌های روشن و خاموش را نشان می‌دهد، می‌توان روشن و خاموش‌هایی با زمان‌های بسیار بلند نیز مشاهده نمود. بعد از گذشت زمان مشاهده‌ی به اندازه کافی بلند t ، دوره این رخدادها با t افزایش می‌یابد [۸۴]. اتفاق مشابهی در حرکت شبکه‌های پتاسیم در غشاهای پلاسمای سلول‌های زنده^۲ [۸۵] یا در نفوذ ردیاب‌های زیرمیکرونی در مش اکتین متقابل وابسته^۳ [۸۶] دیده می‌شود: دوره‌های سکون بلند و بلندتر.

در سیستم‌های پایا، همبستگی زمانی میان دو زمان $t = t_1$ و $t = t_2$ تابعی از تفاضل آن‌هاست $f(|t_1 - t_2|)$. اما در سیستم‌های غیرپایا، این وابستگی زمانی شکلی پیچیده‌تر دارد، مثلاً می‌تواند به صورت $f(t_2/t_1)$ باشد [۸۷]. در این شرایط غیرپایا، نمی‌توان مبدا زمانی را به صورت دلخواه انتخاب کرد. در این جا، گذشته سیستم از اهمیت بالایی برخوردار است؛ چرا که مشاهده‌پذیرهای فیزیکی وابستگی صریح به بازه زمانی t_a بین لحظه‌ی اولیه آماده‌سازی سیستم و لحظه شروع ثبت داده‌ها دارند. در نتیجه، اندازه‌گیری یک کمیت مشخص برای سیستم بر روی بازه زمانی $[0, t]$ بسیار متفاوت خواهد

^۱ Quantum Dot

^۲ Potassium Channels in the Plasma Membrane of Living Cells

^۳ Submicron Tracers in a Cross-Linked Actin Mesh

بود با نتیجه برای بازه $[t_a, t + t_a]$. به عنوان مثال، در یک ولگشت زمان پیوسته‌ی زیرپخشی که در ادامه معرفی خواهد شد، با گذشت زمان، ذره برای برداشتن یک گام جدید، با زمان انتظارهای بزرگ و بزرگ‌تری روبرو خواهد بود. با مشاهده ذره، خواهیم دید که در زمان‌های بسیار بلند در دام‌های بزرگی به دام افتاده است. در این صورت، آمار حاکم بر سیستم کاملاً متفاوت با حالتی است که از دینامیک ذره در این بازه صرف‌نظر شود. اولین بار این پدیده به عنوان یکی از ویژگی‌های اساسی سیستم‌های شیشه‌ای^۱ [۸۸] مطرح شد. در بعضی آزمایش‌ها می‌توان t_a را تنظیم کرد مانند: اندازه‌گیری زمان حرکت حامل‌های بار در نیم‌رساناهای پلیمری که در آنجا دینامیک سیستم با وارد کردن ضربه‌ای توسط پالس نوری به حامل‌ها آغاز می‌شود [۸۹]. اما همواره این امکان وجود ندارد؛ برای نمونه، در حرکت ردیاب‌ها در سلول‌های زیستی همیشه نمی‌توان به دقت t_a را تعیین نمود. در این حالت بسیار مهم است که فرم تابعی اثر t_a را بدانیم.

۲.۲ حرکت بروانی بازمقیاس شده

تاکنون با استفاده از معادلات تعمیم یافته پخش، تلاش‌های زیادی برای مدل کردن پخش غیرعادی صورت گرفته است که توانسته‌اند توصیفی ریاضیاتی برای فرآیند مذکور فراهم آورند. علی‌رغم مدل‌های مختلف پیشنهاد شده، همچنان نیازمند درک عمیق‌تر مکانیزم ایجاد کننده آن‌ها هستیم. در این میان مدل‌های گاوسی، که با توجه به معادله لانژوین مشخص می‌شوند، در تحلیل پخش غیرعادی نقش بسزایی ایفا می‌کنند. از جمله، حرکت بروانی کسری مندلبروت-ون نس^۲ (FBM) است که از معادله لانژوین $\dot{x} = \zeta_{fgn}(t)$ پیروی می‌کند؛ $\zeta_{fgn}(t)$ نشان دهنده نوفه گاوسی کسری است با کوواریانس $\langle \zeta_{fgn}(t_1) \zeta_{fgn}(t_2) \rangle \simeq \alpha(\alpha - 1) |t_1 - t_2|^{\alpha-2}$ که برای به ترتیب زیر و فرایپخش، همبستگی بلند برد منفی و مثبت نشان می‌دهد. FBM و حرکت معادله لانژوین کسری وابسته آن، جهت بررسی مساله حرکت در محیط‌های ویسکو الاستیک^۳ به کار می‌روند [۹۰].

اما نوع دوم از مدل‌های گاوسی برای پخش غیرعادی که در این بخش بیشتر بر آن توجه داریم، مدل حرکت بروانی بازمقیاس شده^۴ (SBM) است [۹۱-۹۴]. این مدل به سادگی با بازمقیاس کردن زمان در حرکت بروانی $x(t)$ به دست می‌آید،

$$t \rightarrow t_* = t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (25.2)$$

^۱ Glassy Systems

^۲ Mandelbrot-van Ness Fractional Brownian motion

^۳ Viscoelastic

^۴ Scaled Brownian Motion

حرکت بازمقیاس شده بروانی $x_*(t) \equiv x(t_*)$ ، فرآیندی گاوسی با میانگین صفر و تابع همبستگی،

$$\langle x(t_*)x(s_*) \rangle = t_* \wedge s_* = t^\alpha \wedge s^\alpha = \langle x_*(t)x_*(s) \rangle \quad (26.2)$$

است؛ \wedge نشان دهنده کمینه میان دو مقدار می‌باشد. $X_*(t)$ با استفاده از نوفه سفید $\eta(t)$ نیز تعریف می‌شود:

$$x_*(t) = \int_0^t \sqrt{2K(u)}\eta(u)du, \quad (27.2)$$

در این رابطه $K(t) = \alpha K_\alpha^* t^{(\alpha-1)}$ ضریب وابسته به زمان است و $\eta(t)$ رابطه $\langle \eta(t)\eta(s) \rangle = \delta(t-s)$ را ارضا می‌کند. فرم معادله دیفرانسیل مربوط به (۲۷.۲) به این صورت است،

$$\frac{dx_*(t)}{dt} = \sqrt{2K(t)}\eta(t). \quad (28.2)$$

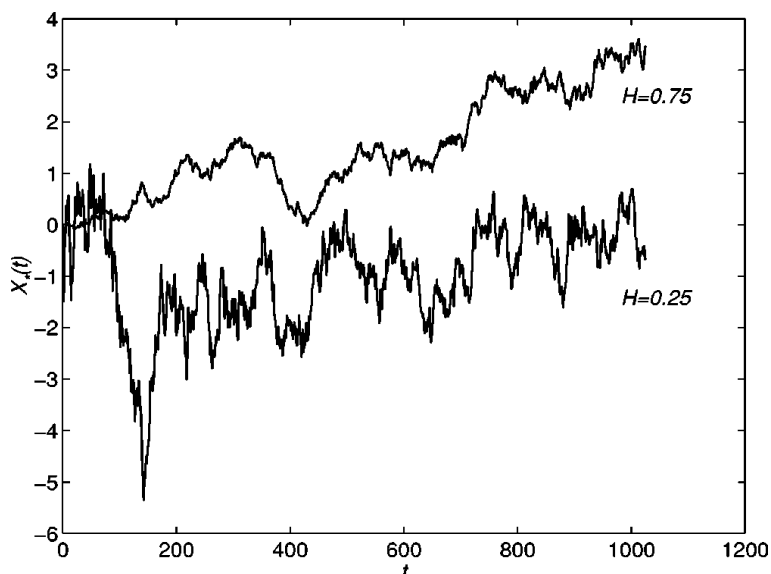
می‌توان نشان داد که واریانس $x_*(t)$ رابطه (۲۶.۱) را ارضا می‌کند.

(SBM) خواص اساسی حرکت بروانی را داراست. (SBM) درست مانند حرکت بروانی، یک فرآیند گاوسی مارکوف^۱ است چراکه برای $t > 0$ بازمقیاس کردن $t \rightarrow t^\alpha$ با $\alpha > 0$ ، ترتیب زمانی و در نتیجه خصلت مارکوفی را حفظ می‌کند. نیز با استفاده از تابع توزیع احتمال و با بررسی معادله چاپمن-کولموگروف مربوط، می‌توان مارکوف بودن (SBM) را تحقیق نمود. (SBM) فرآیندی خودمتشابه با نمای مقیاسی $\alpha/2$ است. برای $b > 0$ داریم،

$$\langle x_*(bt)x_*(bs) \rangle = \langle x([bt]^\alpha)x([bs]^\alpha) \rangle = b^\alpha \langle x_*(t)x_*(s) \rangle, \quad (29.2)$$

که در این رابطه از ویژگی خودمتشابهی در حرکت بروانی $x(bt) = b^{1/2}x(t)$ استفاده شده است. همین‌طور می‌توان نشان داد که نموهای (SBM) بر روی بازه‌های ناهمپوشان، همانند حرکت بروانی معمولی مستقل از هم هستند. مسیرهای شبیه‌سازی شده نمونه‌ی حرکت بروانی بازمقیاس شده، در تصویر (۲.۲) دیده می‌شود. برای $H = 0.75$ ، حرکت $x_*(t)$ تسریع شده‌ی بروانی و برای $H = 0.25$ حرکت کند شده را نشان می‌دهد.

^۱ Markov



شکل ۲.۲: مسیر حرکت بروانی بازمقیاس شده برای دو نمای $H = 0.75$ و $H = 0.25$ [۹۱].

معادله پخش حاکم بر حرکت بروانی بازمقیاس شده به این صورت است،

$$\frac{\partial P_*(x, t)}{\partial t} = \alpha K_\alpha^* t^{(\alpha-1)} \frac{\partial^\alpha P_*(x, t)}{\partial x^\alpha} = K(t) \frac{\partial^\alpha P_*(x, t)}{\partial x^\alpha} \quad (30.2)$$

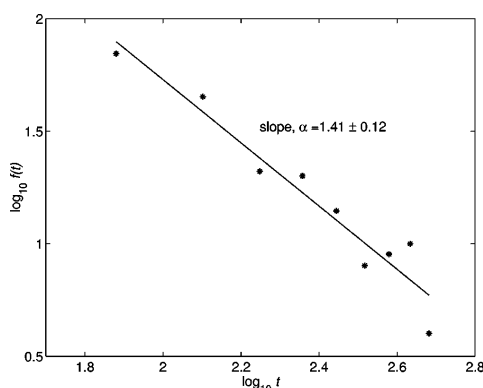
این معادله تحت شرط اولیه تابع دلتای دیراک $P_*(x, 0) = \delta(x)$ دارای پاسخ،

$$\begin{aligned} P(x, t_*) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha K_\alpha^* \pi t_*}} \exp \left[-\frac{x^\alpha}{\alpha K_\alpha^* t_*} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha K_\alpha^* \pi t^\alpha}} \exp \left[-\frac{x^\alpha}{\alpha K_\alpha^* t^\alpha} \right] \equiv P_*(x, t). \end{aligned} \quad (31.2)$$

است. pdf در رابطه (۳۱.۲) تحت رابطه بازمقیاسی $x \rightarrow b^{\alpha/\alpha} x$ و $t \rightarrow bt$ خودمتشابه است، بنابراین،

$$P_*(b^{\alpha/\alpha} x, bt) = b^{\alpha/\alpha} P_*(x, t). \quad (32.2)$$

می‌توان نشان داد که FBM نیز pdf مشابهی دارد.



شکل ۳.۲: تخمین نمای α توزیع زمان اولین عبور $f(t) \sim t^{-\alpha}$ ، که برای حرکت بروانی بازمقیاس شده داریم $\alpha = H + 1$ [۹۱].

رفتار FPT در فرآیند پخش SBM

همان‌گونه که قبلاً در بخش (۳.۱.۲) بیان شد، یکی از مساله‌های مورد توجه در فرآیندهای تصادفی تعیین زمان اولین عبور آنها از یک مقدار معین است. FPT یک کمیت تصادفی است و برای نمودهای مختلف یک فرآیند متفاوت است. تنها می‌توان FPT را برای تعداد معدودی از فرآیندها از جمله حرکت بروانی به دقت تعیین کرد. در این بخش به بحث در مورد FPT برای حرکت بروانی بازمقیاس شده می‌پردازیم.

در مورد SBM، با به‌کارگیری روش بیان شده در بخش (۳.۱.۲)، تابع توزیع برای FPT را پیدا می‌کنیم. زمان T_a برای اولین بار رسیدن $x_*(t)$ به مقدار a برابر t خواهد بود اگر $M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} x_*(s)$ در این زمان حداقل مقدار a را داشته باشد. از این رو برای $t > 0$

$$\begin{aligned} P\{M(t) \geq a\} &= P\{T_a \leq t\} = \mathbb{P}\{X_*(t) \geq a\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{K_\alpha^* \pi t_*}} \int_a^\infty \exp\left[-\frac{x^2}{4t_*}\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{K_\alpha^* \pi}} \int_{a/\sqrt{t_*}}^\infty \exp\left[-\frac{y^2}{4}\right] dy. \end{aligned} \quad (33.2)$$

با تغییر متغیر $x^2/t_* = a^2/s$ ، تابع توزیع برای زمان اولین عبور به دست می‌آید،

$$F(t) = P\{T_a \leq t\} = \frac{a}{\sqrt{K_\alpha^* \pi}} \int_0^{t_*} s^{-3/2} \exp\left[-\frac{a^2}{4s}\right] ds. \quad (34.2)$$

بدین ترتیب، چگالی توزیع $f(t)$ برای T_a را خواهیم داشت،

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{Ha}{\sqrt{K_\alpha^* \pi t^{H+1}}} \exp\left[-\frac{a^2}{4t^{2H}}\right]. \quad (35.2)$$

برای $H = 1/2$ ، نتیجه مربوط به حرکت بروانی معمولی به دست خواهد آمد. با میل کردن $t \rightarrow \infty$ ، $f(t)$ به صورت $t^{-(H+1)}$ افت می‌کند. این رفتار در تصویر (۳.۲) دیده می‌شود. این تصویر نتایج حاصل FPT برای ۱۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی شده برای $H = 0.4$ را نشان می‌دهد. مقدار تخمینی $H = 0.4 \pm 0.12$ با وجود تعداد کم نمونه‌ها توافق خوبی با مقدار محاسبه شده دارد.

ارگودیسیتی در فرآیند بخش SBM

با توجه به غیرپایا بودن SBM ، انتظار رفتار غیر ارگودیک وجود دارد. به طوری که می‌توان دید، از معادله دیفرانسیل (۲۸.۲) برطبق (۱۷.۲) میانگین زمانی برای MSD به این صورت متفاوت از میانگین هنگردی به دست می‌آید،

$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle = \frac{2K_\alpha^* t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} \times \frac{\left[1 - \left(\frac{\Delta}{t}\right)^{1+\alpha} - \left(1 - \frac{\Delta}{t}\right)^{1+\alpha}\right]}{t - \Delta} \quad (36.2)$$

که در حد $t \gg \Delta$ ، رفتار خطی زیر را به دست می‌آوریم،

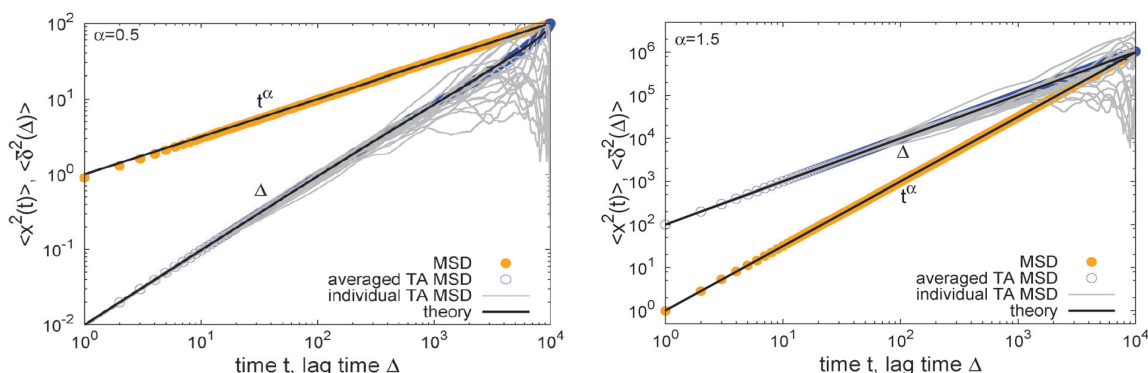
$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle \sim 2K_\alpha^* \frac{\Delta}{t^{1-\alpha}}. \quad (37.2)$$

این نتیجه، غیرارگودیک بودن فرآیند را نشان می‌دهد که در مرجع ([۸۰]) بیان شده،

$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle \neq \langle x^2(\Delta) \rangle. \quad (38.2)$$

وقتی Δ به سمت زمان اندازه‌گیری یا زمان مشاهده t میل می‌کند، با استفاده از بسط $\frac{\Delta}{t} \simeq 1 + \varepsilon$ برای صورت حدی رابطه بالا، به نتیجه زیر می‌رسیم،

$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle \sim 2K_\alpha^* t^\alpha - \frac{\alpha K_\alpha^*}{t^{1-\alpha}}(t - \Delta) + \frac{\alpha(\alpha - 1)K_\alpha^*}{4t^{2-\alpha}}(t - \Delta)^2 \quad (39.2)$$



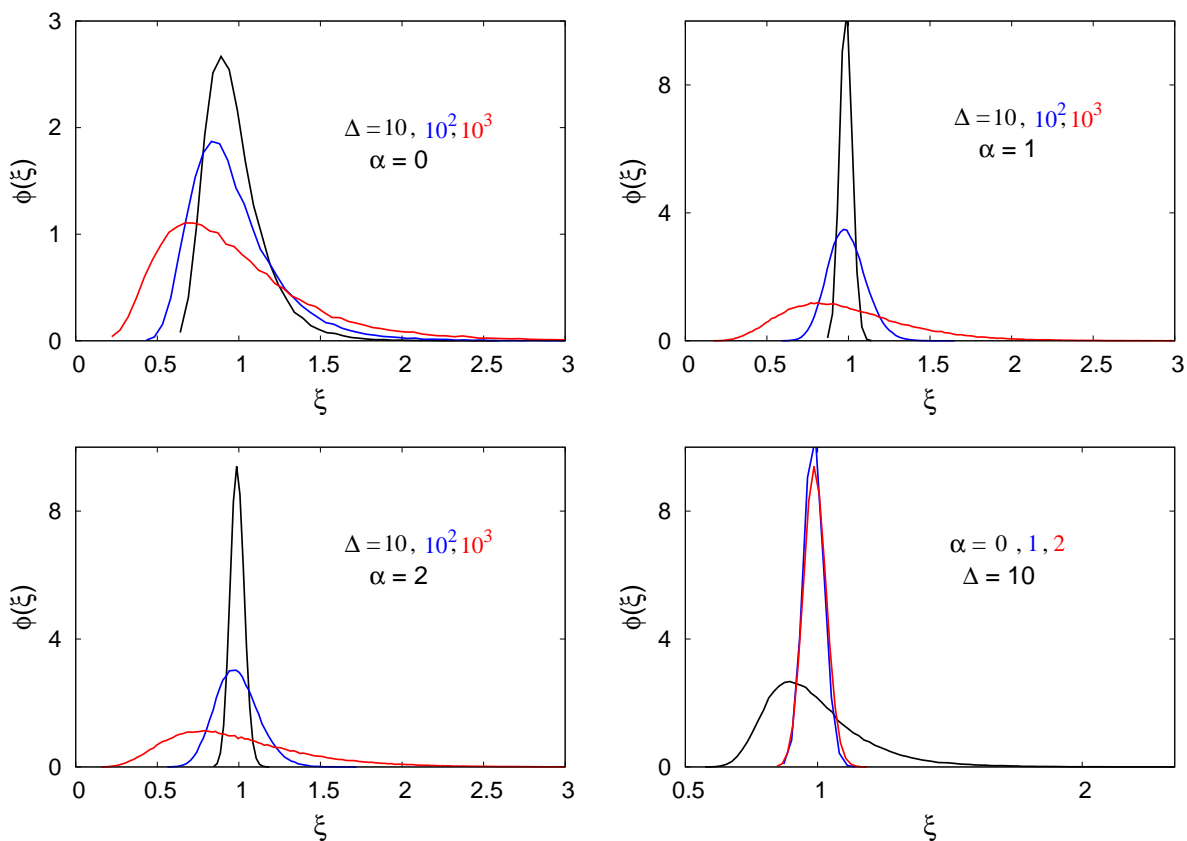
شکل ۴.۲: مقایسه میانگین زمانی و هنگردی MSD برای $\alpha = 1/2$ (چپ) و $\alpha = 3/2$ (راست) حاصل از شبیه‌سازی و نتیجه تحلیلی [۹۴]. MSD برای چندین مسیر مختلف نیز رسم شده است.

در شکل (۴.۲) نتایج شبیه‌سازی برای مسیرهای مختلف SBM برای دو حالت زیرپخش ($\alpha = 1/2$) و فراپخش ($\alpha = 3/2$) دیده می‌شود که توافق بسیار خوبی با نتیجه تحلیلی دارند. نکته دیگر در این‌جا پراکندگی بسیار ضعیف مسیرهای مجزا نسبت به یکدیگر و در نتیجه نسبت به مسیر میانگین است. این یک ویژگی با اهمیت است که برای تمییز دادن فرایندها به کار می‌رود؛ به عنوان مثال، برای تشخیص FBM از $CTRW$ [۹۶، ۹۷].

پارامتر شکست ارگودیسیتی برای SBM همان‌طور که در بخش (۲.۱.۲) بیان شد، میانگین زمانی MSD برای مسیرهای مختلف با یکدیگر و با مقدار میانگین تفاوت دارند. در شکل (۴.۲) این انحرافات برای نمونه‌های حاصل از شبیه‌سازی برای SBM مشاهده می‌شوند. اطلاعات آماری پارامتر شکست ارگودیسیتی در شناخت مدل‌های مختلف پخش غیرعادی دارای اهمیت فراوانی است. برخلاف $CTRW$ این پارامتر برای SBM نیز همانند حرکت بروانی در حد $\Delta/t \rightarrow 0$ به صفر میل می‌کند. شکل (۳.۴) توزیع مربوط به نسبت میانگین‌های زمانی به مقدار میانگین آن‌ها را، $\frac{\overline{\delta^2(\Delta)}}{\langle \delta^2(\Delta) \rangle}$ ، برای فرآیند SBM نشان می‌دهد. می‌توان پهن‌شدگی بیشتر و برهم خوردن تقارن نسبت به حالا گاوسی را به‌ازای Δ ‌های بزرگ‌تر مشاهده نمود.

در محاسبه‌ی پارامتر شکست ارگودیسیتی برای SBM در صورت رابطه نیازمند یافتن مومنت چهارم میانگین زمانی هستیم،

$$\left\langle \left(\overline{\delta^2(\Delta)} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{t-\Delta} \int_0^{t-\Delta} dt_1 \int_0^{t-\Delta} dt_2 \left\langle (x^2(t_1 + \Delta) - x^2(t_1))^2 (x^2(t_2 + \Delta) - x^2(t_2))^2 \right\rangle. \quad (4.0.2)$$



شکل ۵.۲: توزیع $\phi(\xi)$ برای $\frac{\overline{\delta^2(\Delta)}}{\langle \delta^2(\Delta) \rangle}$ برای نمایهای مختلف. می‌توان مشاهده نمود که برای Δ های بزرگ‌تر توزیع پهن‌تر شده و تقارن این توزیع از بین می‌رود. برای α های بزرگ پهنای توزیع کاهش می‌یابد اما همچنان عدم تقارن توزیع مشاهده می‌شود. زمان مشاهده در این شکل $t = 10^4$ و تعداد نمونه‌های بکار رفته برای میانگین‌گیری $N = 10^3$ است [۹۵].

با به کار بردن قضیه ویک^۱ [۹۸] انتگرال ده در (۴۰.۲) را می توان به صورت،

$$\begin{aligned} & \langle (x(t_1 + \Delta) - x(t_1))^2 (x(t_2 + \Delta) - x(t_2))^2 \rangle = \\ & \langle (x(t_1 + \Delta) - x(t_1))^2 \rangle \langle (x(t_2 + \Delta) - x(t_2))^2 \rangle + 2 \langle (x(t_1 + \Delta) - x(t_1))(x(t_2 + \Delta) - x(t_2)) \rangle^2. \end{aligned} \quad (41.2)$$

نوشت. جمله اول در این عبارت معادل است با $\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle^2$ ؛ در نتیجه به رابطه ی زیر برای صورت عبارت مربوط به EB در (۱۹.۲) یعنی \mathcal{N} می رسیم،

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\Delta) &= \langle (\overline{\delta^2(\Delta)})^2 \rangle - \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle^2 \\ &= \frac{2}{(t - \Delta)^2} \int_0^{t-\Delta} dt_1 \int_0^{t-\Delta} dt_2 \langle (x(t_1 + \Delta) - x(t_1))(x(t_2 + \Delta) - x(t_2)) \rangle^2. \end{aligned} \quad (42.2)$$

و با استفاده از رابطه کوواریانس برای SBM ، یعنی $\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \langle x(\min[t_1, t_2]) \rangle^2$ خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\Delta) &= \langle (\overline{\delta^2(\Delta)})^2 \rangle - \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle^2 \\ &= \frac{4}{(t - \Delta)^2} \int_0^{t-\Delta} dt_1 \int_{t_1}^{t-\Delta} dt_2 \langle (x(t_1 + \Delta) - x(t_1))(x(t_2 + \Delta) - x(t_2)) \rangle^2. \end{aligned} \quad (43.2)$$

دوباره با استفاده از عبارت کوواریانس برای SBM و همچنین فرض $t_1 < t_2$ خواهیم داشت،

$$\mathcal{N}(\Delta) = \frac{4}{(t - \Delta)^2} \int_0^{t-\Delta} dt_1 \int_{t_1}^{t-\Delta} dt_2 \left[\langle (x^2(t_1 + \Delta)) \rangle - \langle x(t_1 + \Delta)x(t_2) \rangle \right]^2. \quad (44.2)$$

با اعمال تغییر متغیر $\tau' = t_2 - t_1$ ، به این عبارت برای \mathcal{N} خواهیم رسید،

$$\mathcal{N}(\Delta) = \frac{4}{(t - \Delta)^2} \int_0^{t-\Delta} dt_1 \int_0^{t-\Delta-t_1} d\tau' \left[\langle (x^2(t_1 + \Delta)) \rangle - \langle x(t_1 + \Delta)x(t_1 + \tau') \rangle \right]^2. \quad (45.2)$$

^۱ Wick-Isserlis Theorem

در این مرحله ترتیب دو انتگرال را جابجا می‌کنیم و بر اساس رابطه کوواریانس خواهیم داشت،

$$\mathcal{N}(\Delta) = \frac{\Psi}{(t-\Delta)^2} \int_0^\Delta d\tau' \int_0^{t-\Delta-\tau'} dt_1 \left[\langle x^2(t_1 + \Delta) \rangle - \langle x^2(t_1 + \tau') \rangle \right]^2. \quad (46.2)$$

حال متغیرهای جدید $x' = t_1/\Delta$ و $y' = \tau'/\Delta$ را معرفی می‌کنیم. برای مقدار داخل انتگرال می‌توان از رابطه‌ی میانگین هنگردی برای SBM یعنی $\langle x^2(t) \rangle = 2K_\alpha t^\alpha$ استفاده کرد. بدین ترتیب خواهیم داشت،

$$\mathcal{N}(\Delta) = \frac{16K_\alpha^2 \Delta^{2\alpha+2}}{(t-\Delta)^2} \int_0^1 dy' \int_0^{t/\Delta-1-y'} dx' \left[(x'+1)^{2\alpha} - 2(x'+1)^\alpha (x'+y')^\alpha + (x'+y')^{2\alpha} \right]. \quad (47.2)$$

جهت محاسبه‌ی انتگرال، ناحیه‌ی انتگرال‌گیری بر روی متغیر x' را به دو ناحیه‌ی مجزا تقسیم می‌کنیم،

$$\int_0^1 dy' \int_0^{t/\Delta-2} dx' + \int_0^1 dy' \int_{t/\Delta-2}^{t/\Delta-1-y'} dx' = \int_0^{t/\Delta-2} dx' \int_0^1 dy' + \int_{t/\Delta-2}^{t/\Delta-1} dx' \int_0^{t/\Delta-1-x'} dy'. \quad (48.2)$$

و نهایتاً عبارت موجود در صورت EB در رابطه‌ی (۱۹.۲) به این صورت حاصل می‌شود،

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\Delta, \tau) = \frac{16K_\alpha^2 \Delta^{2\alpha+2}}{(t-\Delta)^2} & \left[\frac{(\tau-1)^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} + \frac{(3\alpha+1)(\tau-1)^{2\alpha+2}}{2(\alpha+1)^2(2\alpha+1)} - \frac{2\tau^{\alpha+1}(\tau-1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\tau^{2\alpha+2}}{2(\alpha+1)(2\alpha+1)} - \frac{(2\alpha^2 + \alpha + 1)}{2(\alpha+1)^2(2\alpha+1)} + \frac{2}{\alpha+1} \int_0^{\tau-1} dx' (x')^{\alpha+1} (x'+1)^\alpha \right], \quad (49.2) \end{aligned}$$

انتگرال باقی‌مانده در این عبارت را می‌توان برحسب تابع بتای ناکامل بیان نمود،

$$I_1(\tau) = \int_0^{\tau-1} dx' (x')^{\alpha+1} (x'+1)^\alpha = (-1)^{-\alpha} B[-\tau+1, 2+\alpha, 1+\alpha]. \quad (50.2)$$

همچنین عبارت موجود در منخرج رابطه‌ی (۱۹.۲) در واقع مربع میانگین زمانی است که در رابطه‌ی (۱۷.۲) معرفی شد. از این رو به‌سادگی قابل محاسبه است که نتیجه به این صورت خواهد بود،

$$\mathcal{D}(\Delta, \tau) = \left[\frac{2K_\alpha \Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(t-\Delta)} (\tau^{\alpha+1} - 1 - (\tau-1)^{\alpha+1}) \right]^2 \quad (51.2)$$

اکنون عبارت حاصل برای پارامتر شکست ارگودیسیتی را در حالات حدی مختلف به ازای نماهای متفاوت مورد بررسی قرار می‌دهیم. به عنوان اولین مورد، EB به ازای $\alpha = 1$ و برای $1 \ll \Delta/t$ به سمت عبارت مربوط به حرکت بروانی (۲۰.۲) میل می‌کند و نشان می‌دهد که SBM همچون حرکت بروانی در این حد ارگودیک است.

بازه $0 < \alpha < 1/2$ نتیجه در این بازه، با استفاده از بسط زیر [۹۹]،

$$\int x^p(x+1)^q dx = \frac{x^{p+1}(x+1)^q}{p+q+1} + \frac{q}{p+q+1} \int x^p(x+1)^{q-1} dx, \quad (52.2)$$

از رابطه‌ی (۵۰.۲) در عبارت کلی حاصل برای EB به دست می‌آید. با سه مرتبه اعمال این عبارت بر انتگرال (۵۰.۲) از توان انتگرال ده کاسته می‌شود و در حد $\tau \rightarrow \infty$ همگرا می‌شود. در نتیجه به عبارت دقیق زیر می‌رسیم،

$$I_1(\tau) = \frac{(\tau-1)^{\alpha+2}\tau^\alpha}{2(\alpha+1)} + \frac{\alpha(\tau-1)^{\alpha+2}\tau^{\alpha-1}}{2(\alpha+1)(2\alpha+1)} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\tau-1)^{\alpha+2}\tau^{\alpha-2}}{4\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{4\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)} \int_0^{\tau-1} (x')^{\alpha+1}(x'+1)^{\alpha-3} dx'. \quad (53.2)$$

در حد $1 \ll \Delta/t$ ، می‌توان حد بالای انتگرال را به سمت بی‌نهایت میل داد، $(\tau-1) \rightarrow \infty$ ، و انتگرال باقی‌مانده را برحسب تابع بتای کامل بیان نمود،

$$\int_0^\infty (x')^{\alpha+1}(x'+1)^{\alpha-3} dx' = B(\alpha+2, 1-2\alpha).$$

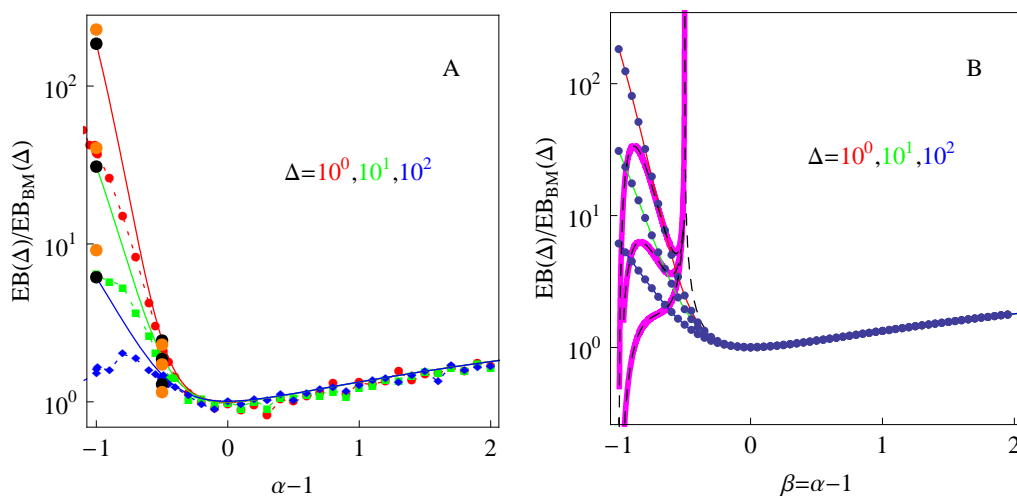
. بدین طریق به یک رابطه‌ی مقیاسی برای پارامتر شکست ارگودیسیتی،

$$EB(\alpha, \Delta) \approx 4C(\alpha)(\Delta/t)^{2\alpha}, \quad (54.2)$$

با ضریب،

$$C(\alpha) = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)B(\alpha+2, 1-2\alpha) - (2\alpha^2 + \alpha + 1)}{2(\alpha+1)^2(2\alpha+1)}. \quad (55.2)$$

می‌رسیم. این رابطه‌ی مقیاسی برای (Δ/t) های نزدیک صفر و مقادیر $1/2, \alpha \neq 0$ برقرار است. طبق شکل (۶.۲) که نتایج تئوری و شبیه‌سازی را برای پارامتر شکست ارگودیسیتی نشان می‌دهد، می‌توان دید که در بازه‌ی $0 < \alpha < 1/2$ پارامتر



شکل ۶.۲: چپ) پارامتر شکست ارگودیستی برای SBM بر حسب α . نتایج حاصل از شبیه‌سازی توسط نقاط نشان داده شده است. خطوط کامل رنگی نتیجه تحلیلی حاصل از معادلات (۴۹.۲) و (۵۱.۲) هستند. رنگ‌های مختلف برای نمایش Δ های مختلف بکار رفته‌اند $10^0, 10^1, 10^2$. $\Delta = 10^0$ و $\alpha = 0$ و $\alpha = 1/2$ با دایر سیاه رنگ بزرگ‌تر نشان داده شده‌اند. بازه زمانی مشاهده $t = 10^4$ و تعداد مسیرهای نمونه‌ی بکار رفته برای هر نما $N = 10^3$ است. راست) نتایج تحلیلی دقیق و حدی EB . منحنی‌های قرمز، سبز و آبی رنگ نشان دهنده‌ی حل دقیق رابطه (۴۹.۲) هستند. خط چین در ناحیه $\alpha < 1/2$ معادل است با نتیجه (۵۶.۲) و منحنی خط چین در ناحیه $0 < \alpha < 1/2$ نتایج حاصل از مرجع ([۹۳]) هستند. خطوط بنفش رنگ در بازه $0 < \alpha < 1/2$ طبق رابطه (۵۴.۲) برای زمان تاخیری ثابت رسم شده‌اند. نقاط مشکی بزرگ، از محاسبه انتگرال رابطه (۴۹.۲) با استفاده از متمتیکا، حاصل شده است [۹۵].

EB تابع حساسی نسبت به Δ است. و برخلاف حرکت بروانی، در این جا مقیاس جهان‌شمولی مانند Δ/t برای EB وجود ندارد.

بازه $\alpha > 1/2$ در این بازه و در حد Δ/t های کوچک، برای عبارت مربوط به مخرج EB در (۵۱.۲) خواهیم داشت $D(\tau) \sim 4\tau^{2\alpha}$ ؛ درحالی‌که عبارت مربوط به صورت، در حد τ بزرگ، با اعمال دو مرتبه رابطه‌ی (۵۲.۲) در (۵۳.۲) و بعد از حذف شدن اولین سه جمله به دست می‌آید $N(\tau) \sim 16\alpha^2 \tau^{2\alpha-1} / [3(2\alpha-1)]$. در نهایت برای EB داریم،

$$\lim_{\Delta/t \rightarrow 0} EB(\Delta) \approx \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} \frac{\Delta}{t}. \quad (56.2)$$

نزدیک $\alpha = 1/2$ باید با احتیاط عمل کرد، ابتدا باید بسط حول α انجام گیرد سپس حد $\tau \gg 1$ اعمال شود. رابطه (۵۶.۲) نشان می‌دهد که SBM همانند مورد حرکت بروانی نسبت به Δ/T خطی است اما با ضریبی وابسته به نمای α به صورت $\alpha^2 / (2\alpha - 1)$.

بازه $\alpha = 0$ جهت بررسی پارامتر EB در نمای $\alpha = 0$ که به عنوان "حرکت بروانی بازمقیاس شده‌ی به شدت آهسته"^۱ شناخته می‌شود [۱۰۰]، رابطه‌های (۴۹.۲) و (۵۱.۲) را با کمک $x^\alpha = e^{\alpha \log(x)}$ برای α های کوچک بسط می‌دهیم. در مورد انتگرال موجود در این رابطه که در (۵۰.۲) نشان داده شده است، ابتدا انتگرال ده را بر اساس توان‌های α بسط داده سپس انتگرال بر روی تابع حاصل را در بازه‌ی $\int_0^{t-\Delta} dt$ محاسبه می‌کنیم. در نتیجه، اولین دو جمله از مرتبه‌ی α ساده می‌شوند. با تقسیم کردن جملات با مرتبه‌ی α^2 در صورت و مخرج و بسط نتیجه‌ی حاصل در Δ های کوچک $\Delta/t \ll 1$ به عبارت زیر خواهیم رسید،

$$\lim_{\Delta/t \rightarrow 0} EB_{\text{USBM}}(\Delta) \approx \frac{4(\pi^2/6 - 1)}{(\log[t/\Delta] + 1)^2}. \quad (57.2)$$

مشاهده می‌شود که در این مورد EB بستگی لگاریتمی به Δ/t دارد که ناشی از بستگی مقیاسی MSD و میانگین زمانی MSD به زمان تاخیری و پخشی است.

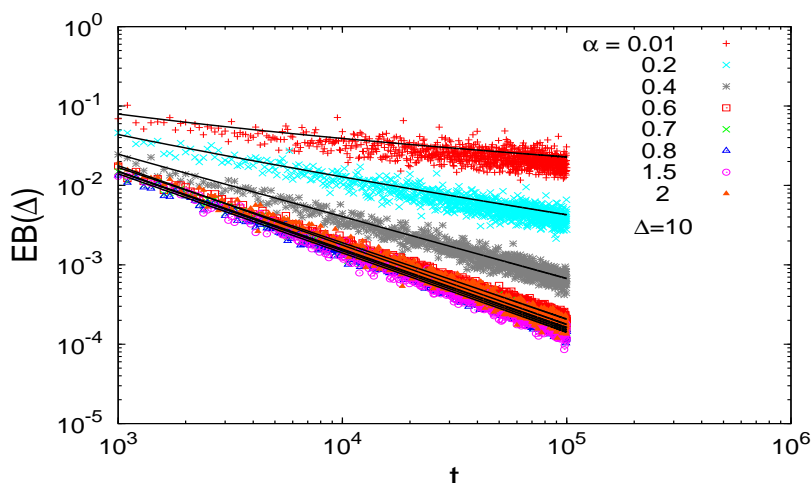
بازه $\alpha = 1/2$ حال به مورد $\alpha = 1/2$ می‌پردازیم. همانند حالت $\alpha = 0$ ، عبارات (۴۹.۲) و (۵۱.۲) را در نزدیکی $\alpha = 1/2$ بسط می‌دهیم. بدین منظور ابتدا انتگرال ده را بر اساس توان‌های $(\alpha - 1/2)$ بسط داده، سپس انتگرال تابع حاصل را بر بازه‌ی $[0, t - \Delta]$ محاسبه می‌نماییم. جملات غالب صورت و مخرج از مرتبه‌ی $(\alpha - 1/2)$ در حد $\Delta/t \rightarrow 0$ نتیجه‌ی،

$$\lim_{\Delta/t \rightarrow 0} EB_{\alpha=1/2}(\Delta) = \frac{\Delta}{3t} [\log(T/\Delta) + 2 \log(2) - 5/6]. \quad (58.2)$$

را دربردارند. مشاهده می‌شود که در مقایسه با حرکت بروانی، وابستگی لگاریتمی به Δ/t برای EB ظاهر می‌شود. با توجه به شکل الف در (۶.۲)، می‌توان دید که نتیجه‌ی (۵۸.۲) بسیار به مقادیر حاصل از رابطه (۴۹.۲) نزدیک هستند (نقاط بزرگ سیاه رنگ در $\alpha = 1/2$). برای مقادیر میانی Δ/t جملات ثابت موجود در نتیجه‌ی (۵۸.۲) نقش چشمگیرتری ایفا می‌کنند که در شکل الف در (۶.۲) مشاهده می‌شود.

شکل (۷.۲) رفتار مقیاسی حاصل از شبیه‌سازی EB را نسبت به زمان مشاهده برای نماهای $1/2 < \alpha < 0$ به صورت $1/t^\alpha$ و برای نماهای $\alpha < 1/2$ به صورت $1/t$ نشان می‌دهد. خطوط سیاه رنگ نتایج حاصل از تئوری (۵۴.۲) و (۵۶.۲) هستند.

^۱ Ultraslow Scaled Brownian Motion



شکل ۷.۲: پارامتر EB برای SBM برحسب زمان مشاهده t . خطوط کامل نتایج تحلیلی معادله (۴۹.۲) و نقاط نتایج شبیه‌سازی را نمایش می‌دهند. پارامترها: $\Delta = 10$ و $N = 10^3$ [۹۵].

حرکت بروانی بازمقیاس شده مقید

از ویژگی‌های فیزیکی مهم یک فرآیند تصادفی، پاسخ آن به نیروهای خارجی یا قیدهای فضایی است. به عنوان مثال، حرکت ذرات بر روی بدنه سلول‌ها که محدودیت فضایی دارند یا وقتی حرکت ذرات با کمک انبرک‌های نوری ردیابی می‌شود، این انبرک یک نیروی بازگرداننده هوکی^۱ به ذرات وارد می‌کند. در این‌جا به بررسی اثر پتانسیل هارمونیک به عنوان یک نمونه مهم و کاربردی $V(x) \propto \frac{1}{2}kx^2$ (با k ثابت) می‌پردازیم. معادله دیفرانسیل تصادفی حاکم بر رفتار SBM مقید

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t) + \sqrt{2\alpha K_{\alpha}^* t^{\alpha-1}} \times \eta(t) \quad (۵۹.۲)$$

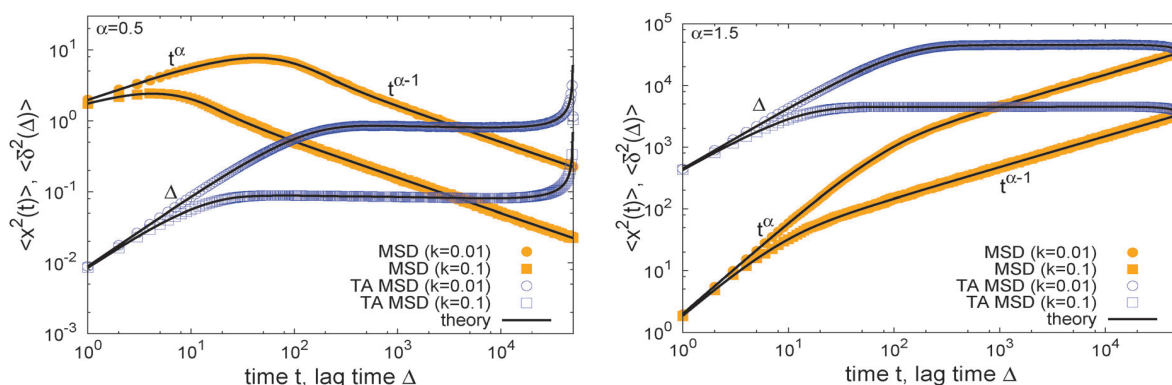
است. در این‌جا نیز $\eta(t)$ نوفه سفید گاوسی با میانگین صفر را نشان می‌دهد. کوواریانس در این حالت مقید با فرض $t_1 < t_2$ برحسب تابع کومر به دست می‌آید،

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = 2K_{\alpha}^* t_1^{\alpha} e^{-k(t_1+t_2)} M(\alpha, \alpha + 1, 2kt_1). \quad (۶۰.۲)$$

بر اساس این نتایج، میانگین هنگردی MSD برای حالت مقید به دست می‌آید،

$$\langle x^2(t) \rangle = 2K_{\alpha}^* t^{\alpha} e^{-2kt} M(\alpha, \alpha + 1, 2kt). \quad (۶۱.۲)$$

^۱ Hookean Restoring Force



شکل ۸.۲: میانگین زمانی و هنگردی MSD برای $\alpha = 1/2$ (چپ) و $\alpha = 3/2$ (راست) حاصل شبیه‌سازی و نتیجه تحلیلی برای SBM مقید تحت پتانسیل هارمونیک برای دو شدت مختلف از ثابت k [۹۴].

که طبق در بازه‌های زمانی کوچک $t \ll 1/k$ رفتار زیرپخش ذره آزاد را نشان می‌دهد و برای زمان‌های بلند رابطه مقیاسی،

$$\langle x^2(t) \rangle \sim \alpha K_\alpha^* k^{-1} t^{\alpha-1} \quad (۶۲.۲)$$

حاصل می‌شود. برای حالت زیرپخش ($0 < \alpha < 1$)، MSD به صورت توانی به صفر میل می‌کند، درحالی‌که برای فرایزش ($1 < \alpha < 2$) به صورت نامحدود رشد می‌کند.

اما میانگین زمانی MSD برای SBM در حالت مقید بر اساس توابع کومر به این صورت خواهد بود،

$$\begin{aligned} \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle &= \frac{\Upsilon K_\alpha}{(1+\alpha)} (t-\Delta)^\alpha e^{-\Upsilon k(t-\Delta)} \times M(\alpha+1, \alpha+\Upsilon, \Upsilon k(t-\Delta)) \\ &+ \frac{\Upsilon K_\alpha}{(1+\alpha)(t-\Delta)} \left[t^{1+\alpha} e^{-\Upsilon kt} M(\alpha+1, \alpha+\Upsilon, \Upsilon kt) \right. \\ &\quad \left. - \Delta^{1+\alpha} e^{-\Upsilon k\Delta} M(\alpha+1, \alpha+\Upsilon, \Upsilon k\Delta) \right] \\ &- \frac{\Upsilon K_\alpha}{(1+\alpha)} (t-\Delta)^\alpha e^{-\Upsilon kt+k\Delta} \times M(\alpha+1, \alpha+\Upsilon, \Upsilon k(t-\Delta)) \end{aligned} \quad (۶۳.۲)$$

با استفاده از بسط تابع کومر برای مقادیر بزرگ،

$$M(\alpha, \alpha+1, z) \sim \alpha \frac{\exp(z)}{z}, \quad (۶۴.۲)$$

برای حد $\Delta \gg t$ نتیجه مرجع ([۹۴]) را به دست خواهیم آورد،

$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle \sim \frac{K_\alpha}{k} \left[\frac{t^\alpha - \Delta^\alpha}{t - \Delta} + (t - \Delta)^{\alpha-1} (1 - 2e^{-k\Delta}) \right]. \quad (۶۵.۲)$$

که یک ناحیه تخت را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در فرآیند *SBM* حالت مقید، در حالیکه میانگین زمانی *MSD* رفتار توانی دارد، میانگین هنگردی به حالت اشباع می‌رسد و در نتیجه فرآیندی غیرارگودیک است. شکل (۸.۲) میانگین‌های هنگردی و زمانی *MSD* حاصل از نتایج تئوری و نیز شبیه‌سازی را نشان می‌دهد.

۳.۲ ول گشت زمان پیوسته

ول گشت زمان پیوسته همان‌طور که از نام آن پیداست، بر مبنای ایده ول گشت میکروسکوپیک تعریف می‌شود. موقعیت مکانی ذره $X(n)$ مجموع طول گام‌های تصادفی است که به‌صورت یکنواخت و مستقل از یکدیگر توزیع شده‌اند $\delta X_n = X(n) - X(n-1)$ ، تابع چگالی احتمال مشترک میان طول گام‌ها $\lambda(\delta x)$ است. نکته مهم در مطالعه حد مقیاسی، معرفی یک مقیاس زمانی میکروسکوپیک τ است، و این نشان دهنده زمان مورد نیاز است تا اثر نوفه از مرتبه δX_n شود. اما در بسیاری از سیستم‌ها اثرات نوفه با یک نرخ ثابت و تعینی وارد نمی‌شود (به عنوان مثال برخورد با ملکول‌های حلال یا برخورد امواج منتشر شده با نقاط پراکننده‌ی دارای توزیع تصادفی).

CTRW مشخصاً برای توضیح تصادفی بودن این مقیاس زمانی طراحی شده است. در هر گام ول گشت، طول تصادفی گام δX_j یک زمان انتظار تصادفی δT_n به همراه دارد. این زمان‌های تصادفی خود توزیع یکنواخت و مستقلی دارند که از دل یک تابع چگالی احتمال مشترک $\psi(\delta t)$ بیرون می‌آیند. برای ول گشت‌های معمولی، مختصه زمانی از طریق رابطه تعینی $t = n\tau$ با تعداد گام‌ها در ارتباط است. در مقابل، برای *CTRW* زمان واقعی یا همان زمان مشاهده در آزمایشگاه که توسط آزمایشگر ثبت می‌شود، مجموع زمان انتظارهای تصادفی $T(n) = \sum_{j=1}^n \delta T_j$ است. باید دانست که تمایز اساسی میان این زمان $T(n)$ ، و تعداد گام‌ها $X(n)$ که با نام زمان درونی فرآیند تصادفی نیز شناخته می‌شود، وجود دارد.

درحالی‌که این مفهوم جدید تصادفی بودن مقیاس زمانی نوفه، در بسیاری موارد استفاده از رهیافت ول گشت را توجیه می‌نماید، اما تحلیل مساله را پیچیده می‌کند. اکنون سوال این است که آیا این یک دیدگاه ارزشمند است یا نه. به‌طور شهودی، انتظار بر این است که در زمان‌هایی به بلندی زمان انتظار میانگین $\langle \delta T_j \rangle$ ، افت و خیزهای حول میانگین بی‌اهمیت باشند. به عبارتی دیگر، نتیجه حدی *CTRW* معادل حد ول گشت معمولی با مقیاس ثابت $\tau = \langle \delta T_j \rangle$ است.

اما سوالی که برای یک آماری‌دان مطرح می‌شود، این است که چه می‌شود اگر $\langle \delta T_j \rangle$ بی‌نهایت شود؟ با وجود پیچیدگی‌های

موجود در یک سیستم نوفه‌ای نوعی، مشخص نیست که حد بالایی برای مقیاس زمان‌های واهلش وجود داشته باشد، یا این که بتوان یک مقیاس میانگین تعریف کرد حتی اگر این مقیاس در مقابله با مقیاس مشاهده کوچک باشد. چگالی احتمال زمان انتظار، برای مطالعه زمان انتظار میانگین بی‌نهایت، توابع با انتهای پهن^۱ هستند با رفتار مجانبی زیر برای $\delta t \gg \tau$,

$$\psi(\delta t) \sim B_\alpha \tau^\alpha (\delta t)^{-1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (۶۶.۲)$$

که در آن $B_\alpha = 1/|\Gamma(-\alpha)|$ و در باقی متن τ مقیاس زمانی میکروسکوپی نوعی است. تمام ممان‌های $\langle (\delta T_j)^q \rangle$ با $q \geq \alpha$ واگرا می‌شوند که این شامل مقدار میانگین نیز می‌شود. در ادامه به بررسی این دسته از فرآیندهای $CTRW$ و حدهای مقیاسی درگیر می‌پردازیم.

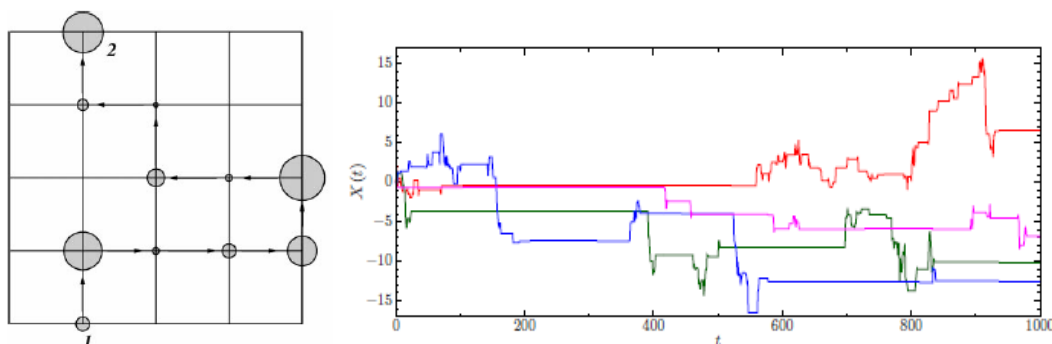
۱.۳.۲ پرواز در زمان

در این بخش مختصراً به جنبه پدیده‌شناختی $CTRW$ می‌پردازیم. برای این که مکانیزم ایجاد کننده مقیاس‌های زمانی دارای توزیع پهن را که انحراف از رفتار ولگشت متعارف را موجب می‌شود، به درستی دریابیم بهتر است ابتدا به مورد غیر این حالت توجه کنیم.

به عنوان یک مثال ساده، $\psi(\delta t)$ را چگالی احتمال زمان‌های انتظار δT_j با توزیع یکنواخت و مستقل در نظر می‌گیریم که هر دو مقدار میانگین $\langle \delta T_j \rangle = \tau$ و واریانس $\langle (\delta T_j)^2 \rangle - \tau^2 = \omega$ متناهی هستند. زمان‌های انتظار می‌توانند گسسته و غیرتصادفی باشد، یا پواسونی. از آنجا که زمان مشاهده در آزمایشگاه $T(n)$ مجموع متغیرهای تصادفی δT_j با توزیع یکنواخت و مستقل است، قضیه حد مرکزی برقرار است. بنابراین برای n های بزرگ توزیع $T(n)$ گاوسی خواهد بود. میانگین به صورت خطی با n افزایش می‌یابد، $\langle \delta T(n) \rangle = \tau n$. اما افت و خیزها حول میانگین، به صورت ریشه مجذور زمان $\sqrt{\langle T^2(n) \rangle - \tau^2 n^2} = \omega \sqrt{n}$ افزایش می‌یابد. در واقع در این مورد، افت و خیزها برای n بزرگ بی‌اثر می‌باشد و می‌توان از تقریب $T(n) = \tau n$ یا $\delta T_j = \tau$ استفاده کرد.

حال برمی‌گردیم به بررسی زمان انتظارهایی با توزیعی که انتهای پهن دارند به شکل (۶۶.۲) که خارج از محدوده اعتبار قضیه حد مرکزی است. زیرا متوسط و مقدار میانگین آن‌ها واگرا می‌شود و τ صرفاً یک مقیاس زمانی نوعی است. زمان انتظارهای δT_j باید محدود به مقادیر مثبت باشند. چنین متغیرهای تصادفی و نیز توزیع مربوط به آن‌ها کاملاً یا از یک

^۱ Heavy-Tailed



شکل ۹.۲: مسیر حرکت ذرات در ولگشت زمان پیوسته $CTRW$. حرکت پیوسته در فضای مکان، برای دوره‌هایی از زمان که از توزیع بی‌مقیاس پیروی می‌کنند، متوقف می‌شود. این شرایط، حرکت را نسبت به حالت ذره بروانی آهسته‌تر می‌کند. زمان‌های انتظار با توزیعی که انتهای پهن دارند، بنابراین در همه مقیاس‌های زمانی ظاهر می‌شوند؛ اما دویه‌دو مستقل هستند.

جهت $skewed$ ^۱ هستند. گندنکو^۲ و کولموگروف [۷۹] به بررسی متغیرهای تصادفی $skewed$ با توزیع پهن پرداختند. پارامتر شبه‌پیوسته $s = n\tau$ جهت سنجش زمان داخلی برای فرآیند $T(s)$ در حالت حدی معرفی می‌شود. مشخص شد که حد مقیاسی ظاهر شده، یک حرکت لوی یک جهته پایای α است، $T(s) = L_{\alpha}^{+}(s)$ در ادامه پروازهای لوی با جزئیات بیشتر معرفی خواهند شد). یا به عبارتی دیگر، زمان مشاهده در فرآیند $CTRW$ پرواز لوی است در راستای مثبت.

پروازهای یک جهته‌ای که در این جا رخ می‌دهند، اشتراک‌های زیادی با مورد متقارن دارند. همان‌طور که از شکل (۹.۲) پیداست؛ درحالی‌که پروازهای لوی دارای جابجایی‌های بلند است، مسیرهای $CTRW$ با زمان انتظارهای طولانی مشخص می‌شوند.

۴.۲ معادله پخش برای ولگشت تصادفی زمان پیوسته

مدل ولگشت تصادفی زمان پیوسته $CTRW$ ، تعمیم ولگشت تصادفی منظم است. در مقابل مدل‌های قدیمی در $CTRW$ ، طول قدم‌ها x و زمان‌های انتظار t برای هر قدم از یکدیگر مستقل بوده و از تابع توزیع احتمال $\psi(x, t)$ پیروی می‌کند. در حالتی که طول قدم‌ها و زمان انتظار مستقل از یکدیگر باشند ψ به این صورت جدا می‌شود: $\psi(x, t) = \lambda(x)w(t)$ و در غیر این صورت داریم $\psi(x, t) = p(x|t)w(t) = p(t|x)\lambda(x)$ ؛ به این معنا که برداشتن قدمی با طول مشخص، نیاز به زمان انتظار معینی دارد. رژیم‌های مختلف $CTRW$ بر اساس دو کمیت مشخصه‌ی زمان انتظار میانگین T و واریانس طول

^۱ one-sided or totally skewed

^۲ Gnedenko

قدمها \sum^2 تعیین می‌شوند. این دو کمیت به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\lambda(x) = \int_0^{\infty} dt \psi(x, t) \quad (67.2)$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x, t).$$

برای مقادیر محدود این دو کمیت مشخصه، در حد زمان طولانی، قضیه حد مرکزی برقرار است و در نتیجه پخش عادی داریم. در ادامه چند امکان مختلف برای زمان مشخصه انتظار و واریانس طول قدمها را بررسی خواهیم کرد. فرآیند $CTRW$ را می‌توان از طریق شاه معادله‌ی زیر توصیف کرد [۱۰۴]،

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} dt' \eta'(x', t') \psi(x - x', t - t') + \delta(x) \delta(t). \quad (68.2)$$

این رابطه تابع چگالی احتمال pdf رسیدن به مکان x در زمان t ، $\eta(x, t)$ ، را به احتمال رسیدن به مکان x' در زمان t' ، $\eta'(x', t')$ ، ارتباط می‌دهد. جمله دوم در این عبارت نشان دهنده شرایط اولیه است. در نتیجه تابع چگالی احتمال $W(x, t)$ برای بودن در مکان r در زمان t به این صورت خواهد بود:

$$W(r, t) = \int_0^t dt' \eta'(x, t') \Psi(t - t') \quad (69.2)$$

یا به عبارتی، احتمال رسیدن به x در زمان t' و حرکت نکردن از آن به بعد. که در این‌جا:

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^t dt' w(t') \quad (70.2)$$

احتمال گام برداشتن در بازه‌ی زمانی $(0, t)$ است. در فضای لاپلاس- فوریه، pdf برای $W(x, t)$ از رابطه جبری زیر پیروی می‌کند [۱۰۴]،

$$W(k, u) = \frac{1 - w(u)}{u} \frac{W_0(k)}{1 - \psi(k, u)} \quad (71.2)$$

که $W_0(k)$ تبدیل فوریه مکان اولیه است.

۱.۴.۲ استراحت‌های طولانی

: معادله پخش کسری که زیرپخش را توصیف می‌کند اگر زمان مشخصه انتظار T واگرا، اما واریانس طول گام‌ها محدود شود، فرآیند مربوط ولگشت تصادفی زمان کسری خوانده می‌شود که با عنوان استراحت‌های طولانی^۱ ضریب پخش تعمیم یافته K_α در این جا به این صورت تعریف می‌شود $K_\alpha \equiv \sigma^2/\tau^\alpha$ که دارای بعد $cm^2 s^{-\alpha}$ است. فرم بسته جواب‌های معادله (۴؟) از طریق توابع فاکس نشان داده می‌شود [۱۱۵]:

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_\alpha t^\alpha}} H_{1,2}^{\alpha,0} \left[\frac{x^2}{4K_\alpha t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (1-\alpha/2, \alpha) \\ (0, 1), (\frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \right] \quad (۸۵.۲)$$

در حد زمان‌های طولانی این تابع، کندتر از حالت پخش عادی میرا می‌شود. پس می‌بینیم که ذره در مسیر خود، با احتمال غیرصفر، زمان انتظارهای بسیار طولانی را تجربه خواهد کرد. این امر برای فرآیند مشاهده در بازه زمانی محدود در شبیه‌سازی‌ها، ایجاب می‌کند که ذره از لحاظ عملی در نقاطی به دام افتد. بنابراین هنگردی از ذرات در ولگشت تمایل به حالت‌های منجمدی دارند که ذرات زیادی در آن‌ها در حال سکون قرار دارند. به بیان ریاضی، $CTRW$ رشد غیرایستا دارد و فرآیند پیری نشان می‌دهد، در واقع نتیجه یک اندازه‌گیری به زمان انجام آن بستگی دارد. $CTRW$ شکست ضعیف ارگودیسیتی را نشان می‌دهد. به این معنا که میانگین زمانی و هنگردی کمیت‌ها همانند مربع جابجایی رفتار متفاوتی بروز می‌دهند: اگر مجموعه‌ای از مسیرهای $CTRW$ مورد بررسی قرار گیرد، درمی‌یابیم که میانگین زمانی واریانس طول گام‌ها با زمان به صورت خطی تغییر می‌کند در صورتی که میانگین هنگردی آن رفتار مقیاسی غیرخطی با زمان دارد. ضریب پخش حاصل از مورد اول، در میان هنگرد مسیرها، متغیری تصادفی است. در حالت کلی، در سیستم‌های دارای شکست ضعیف ارگودیسیتی، میانگین زمانی کمیت‌ها توزیع پهنی را حول میانگین هنگردی آن‌ها نشان می‌دهند.

۲.۴.۲ قدم‌های بلند: پروازهای لوی

در مقابل حالت قبلی، شرایطی وجود دارد که زمان مشخصه انتظار T محدود می‌باشد که از توزیع پواسونی پیروی می‌کند و واریانس طول قدم‌ها واگرا می‌شود که با استفاده از توزیع لوی مدل می‌شود و با عنوان پروازهای لوی شناخته می‌شود^۲، یا به عبارتی:

$$\lambda(k) = \exp(-\sigma^\mu |k|^\mu) \sim 1 - \sigma^\mu |k|^\mu. \quad (۸۶.۲)$$

^۲ Levy Flights



شکل ۱۰.۲: مقایسه مسیر در حرکت براونی (چپ) و گشت لوی با شاخص $\mu = 1/5$. در حالی که هر دو مسیر از نظر آماری خود متشابه هستند، مسیر گشت لوی دارای بعد فراکتالی است، خوشه‌های شکل گرفته با گام‌های کوتاه را توسط قدم‌های بلند به یکدیگر متصل می‌کند.

برای $1 < \mu < 2$ ، در حد $|x| \gg \sigma$ رفتار مجانبی به این صورت

$$\lambda(x) = A_\mu \sigma^{-\mu} |x|^{-1-\mu}. \quad (۸۷.۲)$$

نشان می‌دهد. به دلیل محدود بودن T ، فرآیند مارکوفی است. با قرار دادن (۸۶.۲) در (۷۱.۲)، انتشارگر در فضای لاپلاس فوریه به دست می‌آید که با اعمال عکس تبدیل لاپلاس و فوریه در این رابطه، معادله دیفرانسیل کسری زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K_{-\infty}^\mu D_x^\mu W(x, t) \quad (۸۸.۲)$$

عملگر مشتق کسری وایل $-D_x^\mu$ در فصل بعد معرفی می‌شود. ثابت پخش تعمیم یافته در این مورد برابر است با: $K^\mu \equiv \sigma^\mu / \tau$ که بعد $[K_\alpha] = cm^\alpha s^{-1}$ دارد. با تبدیل فوریه، انتشارگر را به دست می‌آوریم:

$$W(k, t) = \exp(-K^\mu t |k|^\mu) \quad (۸۹.۲)$$

نتیجه حاصل، تابع مشخصه توزیع متقارن و مرکزی لوی است و برای مدل کردن پروازهای لوی به کار می‌رود. در شکل (۲.۴.۲) مسیر یک ذره در ولگشت تصادفی (سمت چپ) با گام‌های محدود در مقایسه با پرواز لوی با همان تعداد گام نشان داده شده است. در پرواز لوی، به دلیل خصلت مجانبی تابع توزیع احتمال طول قدم‌ها، گام‌های بلند می‌توانند با احتمال بیشتری نسبت به حالت تابع توزیع گاوسی رخ دهند. خصلت مقیاسی pdf طول قدم‌ها، که در (۸۷.۲) دیده می‌شود، باعث

ویژگی خوشگی^۱ در پرواز لوی می شود. به عبارتی دیگر حرکت های موضعی توسط گام های بلند با همه مقیاس های طولی قطع می شوند؛ در حقیقت می توان به مسیر پروازهای لوی بعد فراکتالی $d_f = \mu$ [۱۱۶، ۱۱۷] نسبت داد. در مقابل مسیر سمت چپ با $\sum^2 < \infty$ ، تمام فضای دو بعدی را کاملاً پر می کند و همه گام ها تقریباً در یک مرتبه قرار دارند. با استفاده از توابع فاکس، می توان به صورت تحلیلی جواب های معادله دیفرانسیل کسری (۸۸.۲) را به دست آورد [۱۱۸، ۱۱۹]:

$$W(x, t) = \frac{1}{\mu|x|} H_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(1, 1)} \left[\frac{|x|}{(K^\mu t)^{1/\mu}} \left| \begin{matrix} (1, 1/\mu), (1, \frac{1}{2}) \\ (1, 1), (1, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right. \right] \quad (90.2)$$

این فرم بسته نمایش قانون پایدار لوی است و در حد $\mu \rightarrow 2$ پاسخ های کلاسیک گاوسی حاصل می شود. همان طور که از (۹۰.۲) انتظار می رود، رفتار مجانبی توانی نوعی پروازهای لوی استنباط می شود [۱۲۰، ۱۲۱]:

$$W(r, t) \sim \frac{K^\mu t}{|x|^{1+\mu}}, \quad \mu < 2 \quad (91.2)$$

به دلیل وجود این ویژگی، میانگین مربع جابجایی ها واگرا می شود:

$$\langle x^2(t) \rangle \rightarrow \infty. \quad (92.2)$$

این نتیجه برای سیستم های فیزیکی که ذرات جرم دار هستند، مشکل ساز است، چراکه برای این ذرات سرعت انتشار محدودی وجود دارد که گام های نامتناهی آنی را غیرممکن می سازد.

^۱ Clustering Nature

۳.۴.۲ رقابت میان استراحت‌های طولانی و گام‌های بلند

همان‌طور که اشاره شد، در مورد قبلی با مشکل واگرا شدن واریانس طول قدم‌ها مواجه شدیم. یک راه برخورد با این مساله محاسبه پهنای pdf برای $W(x, t)$ به جای واریانس آن است؛ رویکرد دیگر استفاده از این تعریف است [۱۲۱]:

$$\langle x^\nu(t) \rangle_L \sim \int_{L_1 t^{1/\mu}}^{L_2 t^{1/\mu}} dx x^\nu W(x, t) \sim t^{\nu/\mu} \quad (93.2)$$

که بر طبق آن ذره در یک جعبه فرضی در حال گسترش در نظر گرفته می‌شود و این منجر به رفتار $t^{\nu/\mu} \sim$ می‌شود. در (۹۳.۲) قطع‌های^۱ انتگرال وابسته به زمان هستند. دیواره‌های جعبه بازه‌ی

$$\Delta(t) = (L_1 - L_2)^{1/\mu} \quad (94.2)$$

را پوشش می‌دهند که با زمان افزایش می‌یابد. مقدار محدودی از احتمال در این ناحیه قرار گرفته است. با این فرض می‌توان ولگشتی را تصور کرد که زمان انتظار و طول قدم‌های آن از تابع توزیع‌های بلند برد پیروی می‌کنند و T و \sum^2 هر دو واگرا می‌شوند و به معادله دیفرانسیل کسری زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = {}_0 D_t^{1-\alpha} K_\alpha^\mu \nabla^\mu W(x, t). \quad (95.2)$$

با ثابت پخش $K_\alpha^\mu \equiv \sigma^\mu / \tau^\alpha$. در این رابطه ∇^μ عملگر کسری ریز است که معرفی می‌شود. این بار کمیت $\langle x^\nu(t) \rangle_L$ را تعریف می‌کنیم که میانگین مربع جابجایی مجازی نامیده می‌شود و این‌گونه رفتار زمانی نشان می‌دهد:

$$\langle x^\nu(t) \rangle_L \sim t^{\nu\alpha/\mu} \quad (96.2)$$

که با توجه به مقادیر α و μ زیرپخش یا فراپخش رخ می‌دهد.

^۱ Cut-Offs

فصل سوم

ریاضیات کسری

ریاضیات کسری حوزه‌ای از ریاضیات است که از تعریف‌های متداول برای عملگرهای مشتق و انتگرال حاصل می‌شود، درست همانند تابع توانی که به ازای مقادیر غیر صحیح، از تعریف این تابع برای مقادیر صحیح حاصل می‌شود. جهت واضح شدن مطلب، مفهوم فیزیکی تابع توانی را در نظر بگیرید. طبق آنچه در دبیرستان آموخته‌ایم، تابع توانی به ازای یک عدد صحیح، نمادی برای نشان دادن ضرب مکرر یک عدد صحیح در خودش است. این تعبیر در نگاه اول ساده به نظر می‌رسد، اما اگر تابع نمایی را به ازای عددی غیر صحیح در نظر بگیریم، با مشکل مواجه خواهیم شد. درحالی‌که عبارت $x^3 = x \cdot x \cdot x$ کاملاً قابل درک است، چگونه می‌توان معنای فیزیکی $x^{3/4}$ یا حتی x^π را بیان کرد؛ ضرب $3/4$ یا π مرتبه‌ی یک عدد در خودش قابل درک نیست هر چند که این عبارت به ازای هر x مقدار معینی دارد که توسط بسط سری‌ها و حتی ماشین حساب قابل بررسی و تعیین است. حال به همین شیوه، مشتق و انتگرال را بررسی می‌کنیم. هر چند که ماهیت پیچیده‌تر و متفاوتی دارند، اما هنوز می‌توان به‌خوبی معنای آن‌ها را بیان نمود. اگر به شرایط این عملگرها کاملاً مسلط باشیم، ایده‌ی تعمیم‌شان دشوار نخواهد بود. با اعمال چند شرط بر روی آن‌ها (مانند پیوستگی تابع)، می‌توان برای n مرتبه انتگرال هم همان تفسیر n مرتبه ضرب را داشت. اما دوباره این پرسش می‌تواند مطرح شود که، اگر n غیر صحیح باشد چه می‌شود. در این مورد هم ممکن است تصور شود که تبیین معنای فیزیکی کاری دشوار است، اما خواهیم دید که عملگرهای مشتق و انتگرال از مرتبه‌ی کسری نیز از دل تعریف عملگرهای متناظر آن‌ها در ریاضیات معمولی به‌دست می‌آیند و در بسیاری از معادله‌ها و مسایل به‌چشم می‌خورند.



شکل ۱.۳: جوزف لیوویل، ریاضیدان فرانسوی (۱۸۰۹-۱۸۸۲).

۱.۳ منشاء محاسبات کسری

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه غیر صحیح به هیچ وجه مفهومی جدید نیست. علاقه‌مندی به مفاهیم آن تقریباً هم‌زمان با شناخته شدن محاسبات کلاسیک به چشم می‌خورد. به طوری که این ایده در یادداشت‌های میان لایبنیتز^۱ و هوییتال^۲ مطرح می‌شود. در این نامه که در سال ۱۶۹۵ ارسال شده است، هوییتال از لایبنیتز سوال می‌کند که چه می‌شود اگر در تعریف مشتق مرتبه‌ی n ام یک تابع که به صورت،

$$\frac{D^n f(x)}{Dx^n} \quad (۱.۳)$$

بیان می‌شود، $n = \frac{1}{p}$ باشد. لایبنیتز پاسخ می‌دهد که این تناقض آشکاری است که روزی نتایج مفیدی از آن حاصل می‌شود و به محاسباتی در این زمینه پرداخت. و به این ترتیب با این مکاتبه‌ها ریاضیات کسری متولد شد. و هرچند امروزه کاربردهای فراوانی از این ریاضیات را می‌بینیم اما تناقضی مشاهده نمی‌شود. مطالعه‌های کمابیش سیستماتیک بیشتر در ابتدا و نیمه‌ی قرن نوزدهم توسط لیوویل^۳ (۱۸۳۲) [۱۲۹]، اویلر^۴ (۱۷۳۰) [۱۳۰]، فوریه^۵، لاگرانژ^۶ (۱۷۷۲)، لاکرویکس^۷

^۱ Leibniz

^۲ L'Hopital

^۳ Liouville

^۴ Euler

^۵ Fourier

^۶ Lagrange

^۷ Lacroix



شکل ۲.۳: جرج برنارد ریمان، فیزیکدان و ریاضیدان آلمانی (۱۸۲۶-۱۸۶۶).

(۱۸۱۹)، ریمان^۱ (۱۸۴۷) [۱۳۱] و هولمگرن^۲ (۱۸۶۴) صورت گرفت، حتی در سال‌های اخیر نیز افرادی در این حیطه سهمیم بوده‌اند.

لیوویل اولین شخصی بود که توابع را برحسب توابع نمایی بسط داد و مشتق مرتبه q چنین بسطی را با وارد آوردن عملگر بر یکایک جملات تعریف کرد، به گونه‌ای که گویا q یک عدد صحیح مثبت است. ریمان تعریف متفاوتی ارائه کرد شامل یک انتگرال معین که قابلیت کاربرد در مورد سری‌های توانی با نمای غیر صحیح را دارا بود. ظاهراً گروانوالد^۳ و کراگ^۴ اولین بار نتایج ریمان و لیوویل را به فرمی یکپارچه تبدیل کردند. گروانوالد که از محدودیت‌های موجود بر رهیافت لیوویل آشفته شده بود، به عنوان نقطه شروع، مشتق را به صورت حد یک تفاضل کسری^۵ تعریف کرد و به فرمول انتگرال معین برای مشتق مرتبه q ام رسید. کراگ با شروع از فرمول انتگرال کوشی برای مشتق مرتبه صحیح، نشان داد که انتگرال معین ریمان باید این‌گونه تفسیر شود که دارای یک حد پایین محدود است؛ در صورتی که در تعریف لیوویل هیچ حد پایین محدود مشخصی ظاهر نمی‌شود و این معادل است با این که حد پایین منفی بی‌نهایت است.

به موازات این تعاریف تئوری، به‌کارگیری محاسبه‌های کسری در مسائل مختلف نیز آغاز شده بود. اولین این‌ها در ۱۸۲۳ توسط آبل^۶ انجام شد که در آن حل معادله انتگرالی برای تاتوکرون^۷ از طریق یک تبدیل انتگرالی به یک مشتق

^۱ Riemann

^۲ Holmgren

^۳ Grunwald

^۴ Krug

^۵ The limit of a difference quotient

^۶ Abel

^۷ Tautochrone

از مرتبه ۱/۲ ممکن بود. محاسبه‌های عملیاتی هوویساید^۱ (۱۸۹۳، ۱۸۹۲ و ۱۹۲۰) که برای حل مسائلی مشخص در تئوری الکترومغناطیس گسترش یافت، مهم‌ترین گام بعدی در کاربرد مشتق با مرتبه کلی بود؛ وی مشتق‌گیری کسری را در بررسی تئوری خطوط انتقال بکار برد. گمانت^۲ (۱۹۳۶) این مفهوم را در مسائل کشسانی مورد استفاده قرار داد. در قرن اخیر، تلاش‌های عمده‌ای هم در تئوری و هم در کاربرد محاسبات کسری صورت گرفته است. وایل^۳ (۱۹۱۷)، هاردی^۴ (۱۹۱۷)، کوبر^۵ (۱۹۴۰) و کاتنر^۶ (۱۹۵۳) برخی از خواص تا حدی ویژه اما طبیعی انتگرال-مشتق‌های توابع خاص متعلق به کلاس‌های لبسک^۷ و لیفشیتز^۸ را آزمودند.

با وجود این که حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری همانند جبر معمولی قدمتی به اندازه‌ی سه قرن دارد، اما تا چند سال گذشته، در میان جامعه‌ی علمی و مهندسی محبوبیت زیادی نداشته است. زیبایی این بحث در این است که مشتقات (و انتگرال‌های) کسری یک خاصیت (یا کمیت) موضعی (یا نقطه‌ای) نیستند؛ از این رو می‌توانند ویژگی‌هایی نظیر حافظه و غیرموضعییت را وارد کنند و شاید بتوان گفت که این عملگرها واقعیت طبیعت را بهتر توصیف می‌کنند و زبان گویاتری برای آن هستند. تاکنون این حیطة بیشتر مورد توجه ریاضیدان‌ها بوده است و تنها در چندین سال اخیر در برخی از حوزه‌های مهندسی، علوم و اقتصاد وارد شده است. با پیشرفت‌هایی که در این حیطة و کاربردهای آن در حال صورت گرفتن است، این امکان وجود دارد که در آینده حوزه‌ی کاملی را شکل دهد که ریاضیات معمولی تنها بخشی از آن باشند.

برای نشان دادن قدرت این علم در توصیف کامل طبیعت به بیان یک نمونه می‌پردازیم. به عنوان مثال، مشتق معمولی نسبت به زمان $\frac{d}{dt}$ نشان دهنده‌ی نرخ اتلاف یا انباشت است؛ یا به عبارتی تفاضل نرخ اتلاف و انباشت در یک فضای بسیار کوچک و محدود. حال اگر در این فضای کوچک سدی وجود داشته باشد که ذرات مورد بررسی را به دام اندازد به گونه‌ای که مدتی در آنجا متوقف شوند، یا نواحی ممنوعه‌ای وجود داشته باشد که ورود ذرات به آن ناحیه ممکن نباشد، دیگر مشتق معمولی $\frac{d}{dt}$ مفهوم نرخ اتلاف یا انباشت را نمی‌رساند. در این صورت این مشتق کسری $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ با مرتبه‌ی $\alpha \in \mathbb{R}$ است که می‌تواند فرا/زیر^۹ نرخ انباشت یا اتلاف را نشان دهد.

^۱ Heaviside

^۲ Gemant

^۳ Weyl

^۴ Hardy

^۵ Kober

^۶ Kuttner

^۷ Lebesgue

^۸ Lipschitz

^۹ Super/Sub Rate

۲.۳ معادلات کسری و غیرموضعی

بسیاری از مسائل فیزیک و مهندسی، شامل معادلات شرودینگر، ماکسول، نیوتون، شارش گرمای فوریه، حرکت براونی، سیستم‌های بیوفیزیکی و... را می‌توان به صورت مسائل شرط اولیه برای معادلات تحول دینامیکی به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\frac{d}{dt}f(t) = Bf(t) \quad (۲.۳)$$

که $t \in \mathbb{R}$ نشانگر زمان و B عملگر در فضای باناخ است. این معادله کلاسیک تحول، در بردارنده‌ی مفاهیم پایه‌ای بازگشت‌پذیری، موضعی و تقارن است. نیازی نیست که این معادله از مرتبه یک روی زمان باشد، بلکه می‌تواند به عنوان مثال معادله موج برای تابع g باشد:

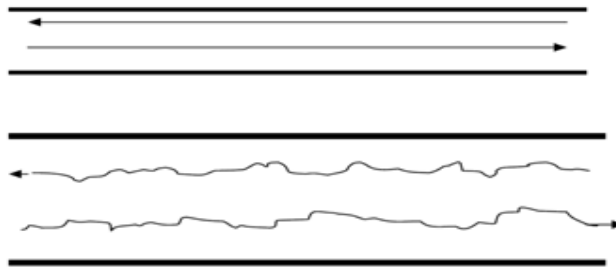
$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}. \quad (۳.۳)$$

به عنوان نمونه، خطوط انتقال بدون اتلاف، دارای خودالقایی متوالی و ظرفیت موازی در واحد، را در نظر می‌گیریم. در این صورت، $g(x, t) = v(x, t)$ ، اختلاف ولتاژ در هر یاخته واحد است و $C^2 = (LC)^{-1}$ ، معادله موج زیر را خواهیم داشت:

$$\partial_{tt}^2 v = (LC)^{-1} \partial_{xx}^2 v. \quad (۴.۳)$$

بسته به مقدار اولیه، $f(0) = f$ ، مساله پیش‌رو، یافتن حالت یا مشاهده‌پذیر $f(t)$ در زمان‌های بعدی است. تعمیم معادله تحول به معادلات دیفرانسیل کسری، نتیجه زیر را دربردارد:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = Bf(t) \quad (۵.۳)$$



شکل ۳.۳: نمای حرکت خودروها در جاده از دید ماکروسکوپی و میکروسکوپی.

در این جا، با توجه به مرتبه کسری (یا حتی مختلط) مشتقات، سوالات بنیادی در مورد رفتار غیرموضعی، تقارن و پایستگی در ذهن مطرح می‌شود. فرض کنیم که تمام تحولات سیستم فیزیکی برگشت‌ناپذیر باشند. بازگشت‌پذیری یک ایده آل سازی است؛ اعتبار و کاربرد آن بستگی به میزان مجزا بودن سیستم از گذشته و محیط پیرامونش دارد. مرتبه مشتق کسری تاثیر گذشته را تعیین و طبقه‌بندی می‌کند. مشتق کسری بر اساس انتگرال کسری حاصل می‌شود و بدین معناست که عملگری با خصلت ناموضعی بوده و نیاز به اطلاعات زمان‌های قبل سیستم دارد. برای مرتبه واحد در مشتقات کسری (یا مرتبه صحیح یک) حافظه‌ی سیستم کمترین تاثیر را دارد، به این مفهوم که برای بررسی آن فقط اطلاعات زمان حال مورد نیاز است. مقادیر کوچک α نشان دهنده‌ی تاثیر بالای گذشته یا حافظه‌ی سیستم است. خواهیم دید که این امر در تعریف گروانوالد-لتینکوف نیز وارد شده است، هرچقدر مرتبه مشتق‌گیری کوچک‌تر باشد، وزن جملات زمان‌های قبلی بیشتر می‌شود.

یک آزمایش ذهنی در این قسمت، با طرح یک آزمایش ذهنی کمی ارتباط میان محاسبات کسری و فرآیندهای فیزیکی از جمله پخش را تفصیل خواهیم داد. اگر از داخل یک هواپیما به جاده‌های یک شهر نگاه کنیم، حرکت ترافیک خودروها را مشاهده خواهیم کرد، طوری که گویا هر خودرو بر روی یک خط مستقیم حرکت می‌کند. بنابراین به عنوان یک ناظر، منحنی سرعت یک خودرو را به سادگی با گرفتن مشتق صحیح از مرتبه یک برای جابجایی به دست می‌آوریم که آن را به صورت یک خط راست خواهیم یافت. در شکل (۳.۳) دو خط مستقیم موازی، منحنی سرعت خودروهای در حال حرکت در دو مسیر رو به بالا و پایین جاده را نشان می‌دهند، چنان‌که در مقیاس ماکروسکوپی دیده می‌شود.

اما از نمایی نزدیک‌تر، حرکت پیوسته‌ی همین خودرو را مشاهده می‌کنیم؛ می‌بینیم که برای عبور از موانع و ناهمواری‌های موجود در جاده، در مسیری نامستقیم (زیگزاگی) حرکت می‌کند. منحنی داخلی در تصویر (۳.۳) این مساله را نشان می‌دهد. منحنی سرعت خودروهای متحرک در دو مسیر، دیگر دو خط موازی با یکدیگر نیستند، اما یک مسیر پیوسته مشتق‌ناپذیر را دنبال می‌کنند. در این جا، این سوال مطرح می‌شود که $\frac{dx}{dt}$ تصویر واقعی سرعت خودروها را می‌دهد یا $\frac{d^{1+\alpha}x}{dt^{1+\alpha}}$ با $0 < \alpha < 1$ ، نمایش واقعی حرکت زیگزیگی خودرو است. حال مساله بعد سرعت که در این آزمایش ذهنی به صورت

مشتق کسری جابجایی وارد شده است، موضوع سوالی دیگر است. در مفهوم معمولی که از زمان می‌شناسیم، $\frac{dx}{dt}$ نشان دهنده سرعت و $\frac{d^2x}{dt^2}$ بیان‌گر شتاب است، اما درک معنای $\frac{d^{\lambda}x}{dt^{\lambda}}$ دشوار است. شاید بتوان این مشتق کسری را که بین سرعت و شتاب است، به عنوان سرعت در مقیاس زمانی تبدیل یافته تعبیر کرد. الگوی حرکت زیگزاگی که در آزمایش ذهنی مطرح شد، منحنی فراکتالی خوانده می‌شود، یک تابع پیوسته و مشتق‌ناپذیر. رابطه بعد فراکتالی و محاسبات کسری زمینه مطالعات گسترده‌ای در عصر حاضر است. دیدگاه ماکروسکوپیکی که در بالا مطرح شد، استدلالی برای توضیح ناپیوستگی و تکینگی در طبیعت، در محاسبات با مرتبه صحیح می‌دهد. این که آیا محاسبات کسری می‌تواند ابزاری برای توصیف ناپیوستگی و تکینگی باشد، سوالی مهم است. در این فصل، مشتق و انتگرال کسری را به صورت اجمالی معرفی خواهیم نمود. مشتق کسری از طریق انتگرال کسری تعریف می‌شود که انتگرال کسری $J_t^\alpha f(t)$ ، خود کانولوشن یک تابع توانی، $\phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ ، و تابع $f(t)$ است. فرض کنید در آزمایش ذهنی ما، $f(t)$ سرعت خودروهای متحرک و $\phi_\alpha(t)$ نشان دهنده‌ی جریان بازه‌های زمانی باشد. در حد $\alpha \rightarrow 1$ تابع توانی معادل با تابع هوویساید می‌شود:

$$\phi_\alpha(t) = H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (6.3)$$

و این مفهوم را دارا است که با گذشت زمان، بازه‌های زمانی همواره واحد خواهند ماند. این شرایط را می‌توان این گونه نیز تعبیر کرد که فاصله‌های زمانی یکنواخت هستند و سرعت آن‌ها صفر است. بنابراین در هر لحظه بازه‌های زمانی بدون تغییر خواهند بود. در این حالت فاصله مکانی را به این صورت به دست می‌آوریم:

$${}^{\circ}D_t^{-\lambda} f(t) = \int_0^t f(t) dt. \quad (7.3)$$

که همان روش معمولی تخمین طول است. این سیستم دارای جریان همگن زمان می‌باشد. با توجه به بحث بالا، می‌توان نتیجه گرفت که وقتی $\alpha < 1$ باشد، کانولوشن سرعت و یک تابع توانی یا به عبارتی انتگرال کسری سرعت، جابجایی مکانی را می‌دهد. بنابراین در این مورد خاص، بازه‌ی زمانی همواره واحد نیست و دارای سرعت متغیر است. یا جریان زمان یکنواخت نیست. شاید بتوان این طور گفت که در سیستم‌های دارای ناهمگنی، گویا حرکت ذرات ناهمگنی در جریان زمان دارد.

۳.۳ توابع خاص

درک مفاهیم و به کارگیری محاسبات کسری، با معرفی و بررسی برخی از تعاریف و تابع‌های ریاضی بسیار مهم اما ساده‌ی حاضر در این حوزه از ریاضیات، مشخص‌تر می‌شود. از این جمله عبارتند از تابع گاما، تابع بتا، تبدیل لاپلاس، تابع میتاگ-فلر و ...، که در ادامه معرفی مختصری از این مفاهیم فراهم شده است. همچنین، انواع مشتق و انتگرالهایی کسری معرفی شده و به بررسی معادلات انتگرال-دیفرانسیل با مرتبه کسری پرداخته می‌شوند.

۱.۳.۳ تابع گاما

همان‌گونه که در ادامه آشکار خواهد شد، تابع گاما^۱، اساساً با ریاضیات کسری گره خورده است. تعبیر ساده‌ی این تابع، تعمیم تابع فاکتوریل^۲ برای همه‌ی مقادیر حقیقی است. تعریف این تابع توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{z-1} du, \quad z \in \mathbb{R} \quad (۸.۳)$$

زیبایی این تابع در ویژگی‌های آن نهفته است. نخست، چنان‌که در رابطه‌ی (۹.۳) دیده می‌شود مقدار تابع برای هر کمیتی، برابر است با حاصل ضرب خود کمیت در مقدار تابع به ازای یک واحد کمتر از عدد مورد نظر:

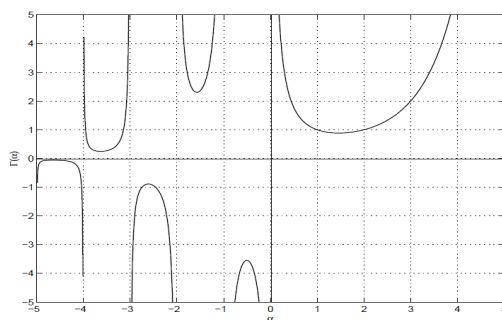
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{N}_+, \quad \Gamma(z+1) = (z)! \quad (۹.۳)$$

این رابطه با استفاده از انتگرال جزء به جزء اثبات می‌شود. نتیجه‌ی این تعریف برای عددهای صحیح، تعریف تابع فاکتوریل است. همچنین با محاسبه‌ی انتگرال فوق می‌توان نشان داد $\Gamma(1) = 1$. مشکل (۴.۳) تابع گاما را برای صفر و پیرامون آن نشان می‌دهد. توجه کنید که در عددهای صحیح منفی مقدار تابع به بی‌نهایت میل می‌کند اما هنوز در مقادیر غیرصحیح منفی تعریف می‌شود. همچنین با استفاده از تابع گاما می‌توان تابع $\phi(t)$ را نیز تعریف کرد، که در بخش‌های بعدی خواهیم دید که در نشان دادن شکل‌های مختلف انتگرال کسری کاربرد فراوانی دارد. $\phi(t)$ با رابطه‌ی (۳۰.۳) تعریف می‌شود.

$$\phi_{\alpha}(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (۱۰.۳)$$

^۱ Gamma function

^۲ Factorial function



شکل ۴.۳: تابع گاما

نیز با کمک این تابع، برای تعمیم ضرائب دوجمله‌ای^۱ خواهیم داشت،

$$\binom{z}{\nu} = \frac{z!}{\nu!(z-\nu)!} = \frac{\Gamma(1+z)}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+z-\nu)}. \quad (11.3)$$

۲.۳.۳ تابع بتا

تابع بتا^۲ یا به عبارتی دیگر انتگرال اویلر نوع اول، در محاسبه‌های کسری از اهمیت بالایی برخوردار است. جواب این تابع نه تنها از طریق تابع گامای چندگانه تعریف می‌شود، که شبیه به انتگرال/مشتق بسیاری از توابع از جمله چند جمله‌ای‌هایی به صورت t^a و توابع میتاگ-لفلر (در ادامه معرفی خواهد شد) است. معادله‌ی (۱۲.۳) انتگرال بتا و جواب آن را بر اساس تابع گاما نشان می‌دهد.

$$B(p, q) = \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q, p); \quad p, q \in \mathbb{R}_+. \quad (12.3)$$

^۱ Binomial Coefficients

^۲ Beta function

۳.۳.۳ تبدیل لاپلاس و کانولوشن

تبدیل لاپلاس^۱ نوعی تبدیل تابعی است که در یافتن جواب معادله‌های دیفرانسیل پیچیده کاربرد دارد [۱۱۰، ۱۱۱]. با استفاده از این تبدیل می‌توان به جای حل کردن یک معادله دیفرانسیل با مشتق‌هایی از مرتبه‌های مختلف، مساله را به فضایی برد که جواب‌ها خود به صورت جبری در آن وجود دارند. این تبدیل بدین شکل بیان می‌شود:

$$\mathcal{L}[f(t)] := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \tilde{f}(s). \quad (۱۳.۳)$$

در صورتی تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ وجود دارد که انتگرال (۱۳.۳) همگرا باشد. لازمی ارضای این شرط این است که نرخ رشد تابع $f(t)$ سریع‌تر از نرخ نزول تابع نمایی e^{-st} نباشد.

همچنین تبدیل لاپلاس کانولوشن دو تابع نیز عبارتی است با کاربردهای فراوان. کانولوشن دو تابع با استفاده از رابطه‌ی،

$$f(t) * g(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = g(t) * f(t) \quad (۱۴.۳)$$

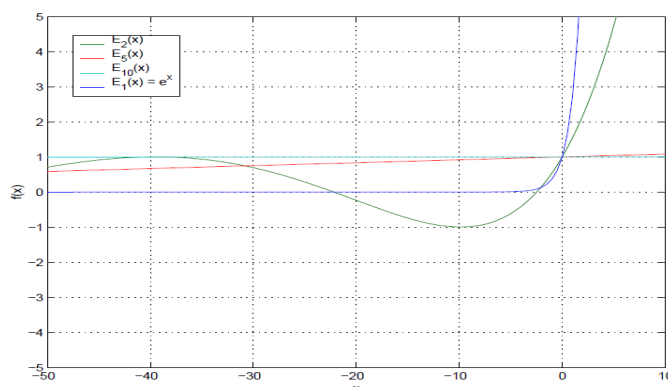
به دست می‌آید و در فضای t تعیین آن کار پیچیده‌ای است، اما در فضای لاپلاس (s) نتیجه تنها حاصل ضرب تبدیل لاپلاس دو تابع می‌شود، چنان‌که در رابطه‌ی (۱۵.۳) دیده می‌شود.

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] := \tilde{f}(s)\tilde{g}(s). \quad (۱۵.۳)$$

یک ویژگی مهم دیگر تبدیل لاپلاس که باید به آن اشاره داشت، تبدیل لاپلاس مشتق با مرتبه‌ی صحیح n برای تابع $f(t)$ است که در (۱۶.۳) داده شده است.

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (۱۶.۳)$$

^۱ Laplace Transformation



شکل ۵.۳: تابع میتاگ- لفلر تک متغیره، به ازای مقادیر مختلف α .

۴.۳.۳ تابع میتاگ- لفلر

تابع میتاگ- لفلر^۱ تابعی است که به صورت گسترده‌ای در ریاضیات کسری مورد استفاده قرار می‌گیرد. ویژگی‌های ساختاری این تابع اولین بار در ۱۹۰۳ توسط میتاگ- لفلر معرفی شد [۱۳۲]، از این رو با نام وی شناخته می‌شود. همان‌طور که تابع نمایی در جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل با مرتبه‌ی صحیح ظاهر می‌شود، این تابع هم نقش مشابهی را در معادله‌های دیفرانسیل با مرتبه‌ی غیرصحیح ایفا می‌کند. تابع نمایی نیز یک فرم بسیار خاص (یکی از مجموعه‌های نامحدود) این تابع پرکاربرد است. شکل استاندارد تابع توسط رابطه‌ی (۱۷.۳) داده می‌شود.

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0. \quad (17.3)$$

تابع نمایی معادل است با حالت $\alpha = 1$. شکل (۵.۳) تابع میتاگ- لفلر را برای مقادیر مختلف α نشان می‌دهد. بسیاری از توابع معروف و شناخته شده حالت خاصی از این تابع هستند، به عنوان نمونه،

$$E_2(-z^2) = \cos(z), \quad E_{1/2}(z^{1/2}) = e^z \left(1 + \operatorname{erf}(z^{1/2})\right). \quad (18.3)$$

رابطه دوم با بکارگیری تابع خطا^۲،

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \quad (19.3)$$

^۱ The Mittag- Leffler Function

^۲ Error Function

بیان شده است. همچنین صورت کلی تر تابع میتاگ- لفلر با دو متغیر نیز به این شکل تعریف می شود [۱۳۳]:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (20.3)$$

این شکل تابع نیز تعمیم پرکاربردی از تابع نمایی است که توابع ساده‌ی زیادی، حالت خاص آن هستند. از جمله می توان به موارد،

$$E_{1,1}(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad E_{2,2}(z) = \frac{\sinh(z)}{z}, \quad (21.3)$$

اشاره نمود.

۵.۳.۳ توابع فوق هندسی

توابع فوق هندسی^۱ که تعریف بسیاری از توابع را به عنوان حالت خاص دربردارند به صورت،

$${}_pF_q(a_i; b_i; z) = \frac{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)}{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_i + n) z^n}{\Gamma(b_j + n) n!}, \quad (22.3)$$

است. مشتق این تابع از رابطه زیر پیروی می کند،

$$\left(\frac{d}{dz}\right) {}_pF_q(a_i; b_i; z) = \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j)} {}_pF_q(a_i + 1; b_i + 1; z). \quad (23.3)$$

سری های فوق هندسی^۲ ... ${}_1F_1(a; b; z)$ معروف به توابع کومر^۳ [۱۱۵، ۹۴]، صورت خاصی از این توابع هستند.

^۱ Hypergeometric Functions

^۲ Confluent Hypergeometric Series

^۳ Kummer function

۴.۳ تعریف و استخراج عملگرهای کسری

تاریخچه‌ی ریاضیات کسری روال گام به گامی را در معرفی عملگرهای مشتق و انتگرال کسری نشان می‌دهد. به این ترتیب در طی زمان، عملگرهای مختلفی وارد شده‌اند که دارای ویژگی‌ها و کاربردهای منحصر به خود هستند. در این بخش، به معرفی برخی از مهم‌ترین این عملگرها می‌پردازیم؛ از جمله آن‌ها، انتگرال ریمان-لیوویل به عنوان اصلی‌ترین شکل تعریف انتگرال کسری و مشتق‌های ریمان-لیوویل، کاپوتو و گروانوالد-لتنیکوف هستند.

۱.۴.۳ عملگر انتگرال کسری

در مقدمه عنوان شد که مفهوم عملگرهای مشتق و انتگرال کسری^۱، تعمیمی بر مشتق و انتگرال مرتبه‌ی صحیح است، درست به همان طریقی که تابع نمایی کسری تعمیم تابع نمایی با آرگومان صحیح است. برای مورد دوم، این تعمیم با استفاده از نمایش تابع انجام می‌گیرد. در حالی که ضرب یک عدد به تعداد ناصحیحی در خودش مفهوم ندارد، هیچ مانعی بر سر قرار دادن آرگومان غیر صحیح در تابع وجود ندارد. به همین ترتیب، صورت رایج نمایش انتگرال کسری را می‌توان از شکل عمومی انتگرال‌های مکرر یک تابع به دست آورد. این رهیافت با نام رهیافت ریمان-لیوویل^۲ شناخته شده است. رابطه‌ی (۲۴.۳) نشان دهنده‌ی فرمول منسوب به کوشی^۳ برای به دست آوردن انتگرال مرتبه‌ی n تابع $f(t)$ است.

$$\int \dots \int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \quad (24.3)$$

جهت مختصرنویسی، عملگر J^n را به صورتی که در (۲۵.۳) آمده، معرفی می‌کنیم.

$$J^n f(t) := f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad (25.3)$$

اما معمولاً رایج است که از نمادگذاری D^{-n} به جای J^n استفاده شود. n در رابطه‌ی (۲۴.۳) حتماً باید مقداری صحیح داشته باشد و این به سبب وجود تابع فاکتوریل است که برای مقدارهای غیر صحیح تعریف نمی‌شود. اما تابع گاما که بسط تحلیلی فاکتوریل برای همه عددهای حقیقی است، می‌تواند با توجه به رابطه‌ی (۹.۳) به جای فاکتوریل در تعریف انتگرال

^۱ Fractional Integral and Derivative Operator

^۲ Riemann Liouville

^۳ Cauchy

قرار گیرد. بنابراین، با این جایگزینی می‌توان رابطه‌ی (۲۵.۳) را برای همه‌ی عددهای حقیقی به صورت (۲۶.۳) بنویسیم.

$$J^\alpha f(t) := f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (26.3)$$

ویژگی‌ها

این تعریف انتگرال کسری ویژگی‌هایی دارد که در هنگام حل معادله‌هایی با مشتق‌ها و انتگرال‌های کسری اهمیت آن‌ها بارز خواهد بود. ابتدا انتگرال مرتبه‌ی $\alpha = 0$ را به عنوان عملگر همانی در نظر می‌گیریم،

$$J^0 f(t) = f(t). \quad (27.3)$$

همچنین با توجه به ماهیت انتگرال بر اساس تعریف آن، و اصل‌هایی که این تعریف از آن‌ها به دست آمده، و به همان صورتی که رابطه‌ی^۱ برای اعداد صحیح،

$$J^n J^m = J^{m+n} = J^m J^n, \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (28.3)$$

برقرار است، برای مرتبه‌های غیر صحیح نیز ارضا می‌شود،

$$J^\alpha J^\beta = J^{\beta+\alpha} = J^\beta J^\alpha, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (29.3)$$

شرطی که باید برای برقراری درستی این ویژگی و سایر ویژگی‌های مشابه آن ارضا شود، علی^۲ بودن تابع $f(t)$ است، به عبارتی دیگر مقدار تابع $f(t)$ باید برای $t \leq 0$ صفر باشد.

^۱ Semigroup Property

^۲ causality

ویژگی دیگر انتگرال ریمان- لیوویل با معرفی تابع ϕ_α در (۳۰.۳) مشخص می‌شود،

$$\phi_\alpha = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Rightarrow \phi_\alpha(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)_+^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (30.3)$$

که t_+ نشان دهنده صفر بودن تابع برای مقدارهای $t \leq 0$ است و (۳۰.۳) یک تابع علی است. از تعریف کانولوشن در رابطه‌ی (۱۴.۳) می‌توان به نتیجه زیر رسید،

$$J^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (31.3)$$

در این جا تبدیل لاپلاس انتگرال کسری ریمان- لیوویل را به دست خواهیم آورد. در رابطه‌ی (۳۰.۳) نشان دادیم که می‌توان انتگرال کسری را به صورت کانولوشن دو تابع، ϕ_α و $f(t)$ بیان کرد. تبدیل لاپلاس $t^{\alpha-1}$ به این صورت می‌باشد:

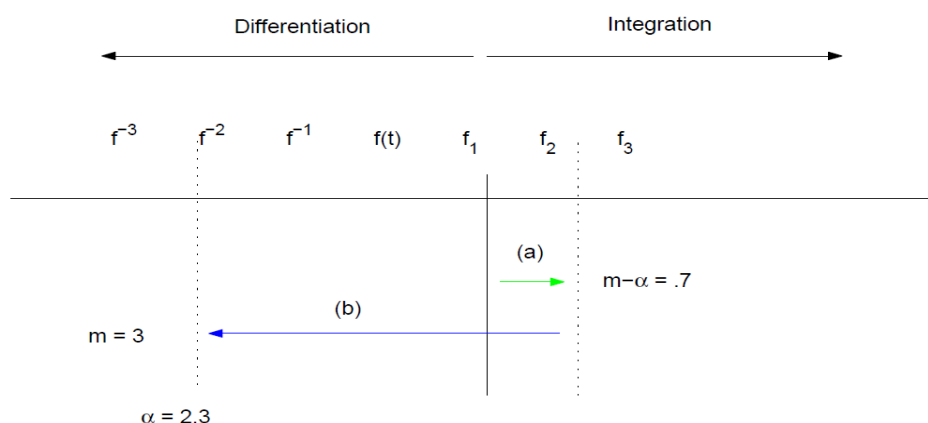
$$\mathcal{L}[t^{\alpha-1}] = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \quad (32.3)$$

با توجه به رابطه‌ی انتگرال کسری و کانولوشن که در (۳۰.۳) دیده می‌شود، و نیز تبدیل لاپلاس کانولوشن در (۱۴.۳)، تبدیل لاپلاس انتگرال کسری به دست خواهد آمد،

$$\mathcal{L}[J^\alpha] = s^{-\alpha} \tilde{f}(s). \quad (33.3)$$

مثالی برای انتگرال کسری به عنوان نمونه‌ای از انتگرال کسری، انتگرال $J^\nu x^\mu$ را برای $\nu > 0$ ، $\mu > -1$ محاسبه می‌کنیم. با توجه به تعریف:

$$\begin{aligned} J^\nu x^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^\mu dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\nu-1} x^{\nu-1} t^\mu dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-u)^{\nu-1} x^{\nu-1} (xu)^\mu x du, \quad (u = \frac{t}{x}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu+\mu} \int_0^1 (1-u)^{\nu-1} u^\mu du \end{aligned}$$



شکل ۶.۳: نمایی شماتیک از مشتق مرتبه $\alpha = ۲/۳$ با به کارگیری روش ریمان-لیوویل. در مرحله اول، انتگرالی از مرتبه $\nu = ۳ - ۲/۳ = ۰.۷$ انجام می‌شود، سپس مشتق صحیحی از مرتبه ۳ محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu+\mu} B(\mu+1, \nu) \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} x^{\nu+\mu}. \end{aligned} \quad (۳۴.۳)$$

مشاهده می‌شود که انتگرال کسری تابع توانی، یک تابع توانی است.

۲.۴.۳ مشتق‌های کسری

عملگرهای مشتق ریمان-لیوویل و کاپوتو

مشتقی از مرتبه $\frac{1}{p}$ ، $\alpha \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. حال عدد صحیح m را با شرط $m - 1 < \alpha < m$ انتخاب می‌کنیم. با استفاده از این عددها، دو راه برای تعریف مشتق‌گیری وجود دارد. روند انجام مشتق‌گیری در روش اول که ریمان-لیوویل^۱ نام دارد در شکل (۶.۳) نشان داده شده است.

$$D^\alpha f(x) = D^m [J^\nu f(x)], \quad m = [\alpha] + 1. \quad (۳۵.۳)$$

توضیح این روند بسیار ساده است. اولین مرحله بعد از پیدا کردن عدد صحیح مناسب، m ، این است که انتگرال مرتبه‌ی $\nu = m - \alpha = ۰.۷$ تابع را به دست آوریم؛ در این شکل $\alpha = ۲/۳$ است. سپس در مرحله‌ی دوم، مشتق مرتبه‌ی $m = ۳$

^۱ Riemann-Liouville Fractional Differentiation

تابع حاصل را محاسبه می‌نماییم. به این ترتیب به مشتق مرتبه‌ی α تابع مورد نظر رسیدیم. نمایش ریاضی این روش در رابطه‌ی زیر بیان شده است:

$$D^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \left[\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases} \quad (36.3)$$

مثالی برای انجام مشتق کسری ریمان-لیوویل فرض کنید که می‌خواهیم مشتق کسری از مرتبه $0 < \alpha < 1$ تابع $f(x) = x^\mu$ را محاسبه کنیم. در این صورت $m = 1$ خواهد بود. بنابراین،

$$\begin{aligned} D^\alpha f(x) &= D^{(1)} \left[J^{(1-\alpha)} f(x) \right] \\ &= D^{(1)} \left[J^{(1-\alpha)} x^\mu \right] \\ &= D^{(1)} \left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma((\mu-\alpha+1)+1)} x^{\mu-\alpha+1} \right] \\ &= (\mu-\alpha+1) \frac{\Gamma(\mu+1)}{(\mu-\alpha+1)\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} x^{\mu-\alpha}. \end{aligned} \quad (37.3)$$

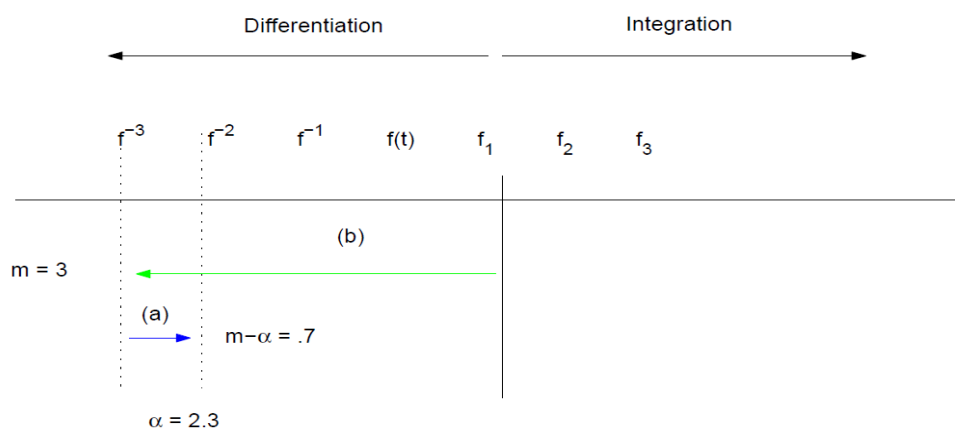
در رسیدن از خط دوم به سوم از نتیجه (۳۴.۳) استفاده شده است. می‌بینیم که طبق تعریف بالا برخلاف انتظار، مشتق عدد ثابت ($\mu = 0$)، صفر نیست، بلکه تابعی توانی است. این یکی از ویژگی‌های مهم عملگرهای کسری است. محدودیتی که بر تعریف ریمان-لیوویل وارد است، تکینگی آن در سر بازها است.

روش دوم که کاپوتو^۱ نام دارد نیز به صورت شماتیکی در تصویر (۷.۳) دیده می‌شود. روش کاپوتو نیز از همان دو مرحله‌ی مورد استفاده در روش ریمان-لیوویل برای رسیدن به همان نتیجه بهره می‌گیرد، با این تفاوت که ترتیب آن‌ها را وارونه می‌کند.

$${}^c D^\alpha f(x) = J^{m-\nu} [D^m f(x)], \quad m = [\alpha] + 1. \quad (38.3)$$

c نشان دهنده عملگر کاپوتو است. در واقع، ابتدا مشتقی از مرتبه‌ی صحیح m ، سپس انتگرال‌گیری کسری از مرتبه‌ی

^۱ Fractional Differentiation Caputo



شکل ۷.۳: نمایی شماتیک از مشتق مرتبه $\alpha = 2/3$ با به کارگیری روش کاپوتو. در مرحله اول، مشتق صحیحی از مرتبه ۳ محاسبه، سپس انتگرالی از مرتبه $3 - 2/3 = 7/3$ انجام می‌شود.

$m - \alpha$ را انجام می‌دهد. طبق این تعریف خواهیم داشت:

$${}^c D^\alpha f(t) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left[\int_0^t \frac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], & m-1 < \alpha < m, \\ \frac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases} \quad (39.3)$$

کاپوتو در تعریف خود برای عملگر مشتق کسری، شرط صفر بودن مشتق عدد ثابت را وارد کرد،

$${}^c D_t^\alpha x^0 = 0, \quad (40.3)$$

که نسبت به حالت همانند برای مشتق ریمان-لیوویل بیشتر قابل درک است. به سادگی می‌توان نشان داد که تعریف کاپوتو همان تعریف ریمان-لیوویل است که تکینگی سر بازه‌ی آن حذف شده است.

$${}^c D_t^\alpha f(t) = {}_b D_t^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (t-b)^k \right]. \quad (41.3)$$

در این جا شاخص‌های t و b ، به ترتیب ابتدا و انتهای بازه‌ی مورد نظر در مشتق‌گیری را نشان می‌دهند. با این نوع مشتق که نقطه شروع بازه مشخص است و انتهای بازه متغیر، مشتق چپ گفته می‌شود. بالعکس اگر نقطه شروع متغیر و انتهای بازه مشخص باشد، مشتق راست نام دارد.

ویژگی‌ها

ابتدا تبدیل لاپلاس این دو عملگر را معرفی می‌کنیم. در بخش ویژگی‌های عملگر انتگرال کسری، تبدیل لاپلاس این عملگر بیان شد (۳۳.۳). با استفاده از این تعریف، تبدیل لاپلاس عملگر مشتق کسری ریمان-لیوویل به دست خواهد آمد. این عملگر را می‌توان به این صورت نوشت،

$$D^\alpha f(t) = g^{(m)}(t), \quad , \quad g(t) = J^{(m-\alpha)} f(t), \quad m-1 \leq \alpha < m. \quad (42.3)$$

با استفاده از تعریف (۱۶.۳) و نیز رابطه‌ی تبدیل لاپلاس انتگرال کسری (۳۳.۳)، خواهیم داشت،

$$\mathcal{L}[D^\alpha f(t)] = s^m \tilde{g}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k g^{(m-k-1)}(0) = s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k D^{(\alpha-k-1)} f(0). \quad (43.3)$$

مشاهده می‌شود که شرط اولیه لازم برای همه‌ی k تا $n-1$ جمله، وجود مشتق کسری تابع $f(t)$ است. برای عملگر مشتق کسری کاپوتو، با نوشتن مشتق به این صورت شروع می‌کنیم،

$${}^c D^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} g(t), \quad g(t) = f^{(m)}(t), \quad m-1 \leq \alpha < m. \quad (44.3)$$

حال با استفاده از (۳۳.۳)، برای تبدیل لاپلاس خواهیم داشت،

$$\mathcal{L}[{}^c D^\alpha f(t)] = s^{-(m-\alpha)} \tilde{g}(s) = s^\alpha \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \quad (45.3)$$

در این رابطه، مرتبه‌ی α در مشتق تابع $f(t)$ ظاهر نمی‌شود، بلکه در عبارت ضریب آن یعنی در $s^{\alpha-k-1}$ وارد می‌شود؛ بر خلاف جایگاه آن در تعریف ریمان-لیوویل. بنابراین، مشتق‌هایی با مرتبه‌ی صحیح (برای نمونه $f(t), f^{(1)}, f^{(2)}, \dots$) به‌عنوان شرایط اولیه به کار می‌روند که تعبیر و تفسیر فیزیکی مناسب‌تر و راحت‌تری دارند.

در برخی شرایط، تعریف کاپوتو برای مشتق کسری بسیار محدود کننده‌تر از تعریف ریمان-لیوویل است. قبلاً اشاره شد که تابع $f(t)$ باید تابعی علی باشد، یعنی در $t \leq 0$ مقدار صفر داشته باشد. برای تعریف ریمان-لیوویل، مادامی که تابع اولیه‌ی t این شرط را ارضا کند، به عنوان یک ضرورت برای تمام عددهای صحیح دیگر از مرتبه‌ی $\alpha > 0$ نیز برقرار می‌باشد و از این رو مشکلی پیش نخواهد آمد. اما در تعریف کاپوتو، از آن‌جا که از تابع $f(t)$ ، m بار مشتق گرفته می‌شود، نه تنها باید $f(0) = 0$ را داشته باشیم، که باید شرط $f^{(1)} = f^{(2)}, \dots, f^{(m)} = 0$ نیز ارضا شود. در دنیای ریاضیات این شرط محدود

کننده‌ی وارد بر تعریف کاپوتو آن را ضعیف می‌کند، و این سوال را مطرح می‌کند که چنین تعریفی چه ضرورتی دارد. پاسخ این سوال به هنگام حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی غیر صحیح آشکار می‌شود. از نظر ریاضی، می‌توان با داشتن شرایط اولیه با استفاده از تعریف ریمان-لیوویل جواب این معادلات را به دست آورد. اما شرایط اولیه در این حالت، مشتقی با مرتبه‌ی کسری است. همچنین، همانطور که قبلا در (۳۷.۳) نشان داده شد، مشتق کسری یک ثابت در این تعریف صفر نیست و از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید،

$$D^\alpha C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. \quad (46.3)$$

اما از نظر فیزیکی، ویژگی‌های تعریف ریمان-لیوویل مشکلات اساسی ایجاد می‌کند. درحالی‌که با تفسیرهای دنیای فیزیک در معادلات مرتبه‌ی صحیح آشنا هستیم، درک عملی زیادی از دنیا در معادلات کسری نداریم. در واقع ابزار ریاضی ما فراتر از مرزهای درک ما قدم گذاشته‌اند. اما در تعریف کاپوتو، ما می‌توانیم ارتباطی میان آنچه که امکان دارد و آنچه که عملی است، بیابیم. عملگر مشتق کاپوتو با یک جابجایی که در تعریف خود داشت، این امکان را فراهم می‌آورد که از شرایط اولیه با مرتبه‌ی صحیح در معادلات دیفرانسیل کسری استفاده گردد. علاوه بر این همان‌گونه که بیان شد، مشتق کسری کاپوتو عدد ثابت مقدار صفر دارد. به سادگی می‌توان نشان داد که عملگر کاپوتو نسبت به عملگر ریمان-لیوویل کاربردی‌تر است.

عملگر انتگرال- دیفرانسیل گروانوالد- لتنیکوف

برخلاف رهیافتی که با انجام انتگرال‌های پیاپی منجر به عملگر ریمان-لیوویل شد، عملگر کسری دیگر به نام گروانوالد- لتنیکوف^۱، با رویکرد مشتق‌گیری وارد می‌شود. به این جهت، از تعریف بنیادین عملگر مشتق شروع می‌کنیم،

$$f^{(1)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (47.3)$$

با اعمال دوباره‌ی این رابطه، به تعریف مشتق دوم تابع می‌رسیم،

$$f^{(2)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(1)}(x+h) - f^{(1)}(x)}{h}$$

^۱ Grunwald-Letnikov Differ-Integral

$$= \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_1+h_2) - f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x+h_2) - f(x)}{h}}{h_1}. \quad (48.3)$$

با انتخاب مقدار یکسان h ، به عبارتی $h_1 = h_2 = h$ ، عبارت بالا به این صورت ساده خواهد شد،

$$f^{(2)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}. \quad (49.3)$$

برای نشان دادن مشتق مرتبه n ام، عملگر D^n معرفی می‌شود،

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} f(x - mh). \quad (50.3)$$

می‌توان این عبارت را به مقدارهای غیر صحیح $\alpha \in \mathbb{R}$ به جای n نیز تعمیم داد، البته به این شرط که ضریب دو جمله‌ای را به جای تابع فاکتوریل برحسب تابع گاما (۱۱.۳) بیان کرد. همچنین حد بالای سری (که دیگر مقدار صحیح نیست) به صورت $\frac{t-a}{h}$ به بینهایت میل می‌کند (در این جا t و a به ترتیب حدود بالا و پایین مشتق‌گیری هستند). در نتیجه به تعریف تعمیم یافته‌ی مشتق کسری گروانوالد-لتنیکوف می‌رسیم،

$${}^{GL}D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m! \Gamma(\alpha-m+1)} f(x - mh). \quad (51.3)$$

تعریف گروانوالد-لتنیکوف برای مشتق کسری به صورت یک سری ویژگی غیرموضعی بودن عملگر را به خوبی نشان می‌دهد. برخلاف مشتق‌های مرتبه صحیح، در این جا برای محاسبه مشتق نیازمند مقادیر تابع در تمام نقاط همسایه هستیم.

همان گونه که با استفاده از تعریف انتگرال کسری ریمان-لیوویل، عملگرهای مشتق کسری تعریف شدند، نیز می‌توان تعریف مشتق کسری گروانوالد-لتنیکوف را برای بیان انتگرال کسری گروانوالد-لتنیکوف استفاده کرد. صورت طبیعی‌تر برای تعریف این رابطه این است که مشتقی از مرتبه منفی، $-\alpha$ ، تعریف شود. اگر بخواهیم رابطه‌ی (۱۱.۵) را به عنوان تعریف مرجع نگاه کنیم، مشکل مهمی که با آن مواجه خواهیم بود این است که $\binom{-n}{m}$ با استفاده از تابع فاکتوریل تعریف نمی‌شود. اگر این دو جمله‌ای را بسط دهیم، خواهیم داشت،

$$\binom{-n}{m} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)(-n-3)\dots(-n-m+1)}{m!} \quad (52.3)$$

می‌توان رابطه بالا را به این صورت نوشت،

$$\binom{-n}{m} = (-1)^m \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m-1)}{m!} = (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}. \quad (53.3)$$

$$\binom{-n}{m} = (-1)^m \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\dots(n+m-1)}{m!} = (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}. \quad (54.3)$$

با استفاده از تابع گاما می‌توان تابع فاکتوریل در (۵۴.۳) را برای عددهای حقیقی منفی تعمیم داد. از این رو،

$$\binom{-\alpha}{m} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)m!}. \quad (55.3)$$

اکنون با به کار بردن (۵۵.۳) می‌توان (۵۱.۳) را برای $-\alpha$ بازنویسی نمود و به انتگرال کسری گروانوالد-لتنیکوف می‌رسیم.

$${}^{GL}D^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^\alpha \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\alpha)} f(x-mh). \quad (56.3)$$

تا کنون، دو نوع فرمول‌بندی برای بیان عملگرها در ریاضیات کسری ارائه شده است، که به ترتیب توسط ریمان و لیوویل و همچنین گروانوالد و لتنیکوف پیشنهاد شده‌اند. بیان چند فرمول‌بندی متفاوت برای یک مفهوم این سوال را به ذهن می‌آورد که آیا این شکل‌های مختلف با یکدیگر معادلند. پاسخ کوتاه به این سوال مثبت است. هرچند که اثبات ریاضی دقیق این موضوع نیاز به صرف وقت زیادی دارد و در مرجع‌های [۱۳۴، ۱۲۲] با تفصیل بیشتری با این موضوع پرداخته شده است. اما به عنوان یک راه‌کار در این زمینه، می‌توان توابع را در صورت امکان به صورت سری بسط داد و تعریف‌های مختلف مشتق کسری را بر آن‌ها اعمال نمود و نتیجه را با هم مقایسه کرد. با توجه به ساختار این عملگرها، تعریف ریمان-لیوویل انتگرال و مشتق کسری توابع، برای یافتن جواب‌های تحلیلی توابع ساده (نظیر $x^a, e^x, \sin(x)t\dots$) به کار می‌رود. و در مقابل، تعریف گروانوالد-لتنیکوف برای بررسی‌های عددی مناسب است. بنابراین، راحت‌ترین و سریع‌ترین راه جهت بررسی معادل بودن این دو تعریف، مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و عددی حاصل از دو روش است.

۳.۴.۳ معادله‌های انتگرالی کسری

نوع اول

اولین نوع معادله‌های انتگرال کسری به شکلی است که رابطه (۵۷.۳) نشان می‌دهد،

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = f(t), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (57.3)$$

که می‌توان این رابطه را به شکل زیر نیز نوشت،

$$J^\alpha u(t) = f(t). \quad (58.3)$$

جواب این نوع معادله‌ها به سادگی به دست می‌آید و به این شکل است،

$$u(t) = D^\alpha f(t). \quad (59.3)$$

ممکن است برای حل این معادله‌ی انتگرالی، استفاده از مشتق کسری کاپوتو به ذهن برسد، اما باید توجه داشت که همیشه و تحت هر شرایطی رابطه‌ی $D^\alpha J^\alpha f(t) = f(t)$ برقرار نمی‌باشد. در ادامه با استفاده از تبدیل لاپلاس نشان داده خواهد شد که اگر عملگر کاپوتو برای حل معادله‌ی (؟؟) به کار رود، یک جمله‌ی دیگر نیز در پاسخ بالا ظاهر خواهد شد. در فضای لاپلاس، معادله‌های انتگرالی نوع اول فرم زیر را پیدا می‌کنند،

$$J^\alpha u(t) = \phi_\alpha(t) * u(t) \implies \mathcal{L}[\phi_\alpha(t) * u(t)] = \frac{\tilde{u}(s)}{s^\alpha} \quad (60.3)$$

از نظر جبری، می‌توان نتیجه‌ی (۶۰.۳) را به دو صورت بازنویسی کرد،

$$\tilde{u}(s) = s^\alpha \tilde{f}(s) \implies s \left[\frac{\tilde{f}(s)}{s^{1-\alpha}} \right] \quad (61.3)$$

یا

$$\tilde{u}(s) = s^\alpha \tilde{f}(s) \implies \frac{1}{s^{1-\alpha}} [s \tilde{f}(s) - f(0)] + \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}}. \quad (62.3)$$

با برگرداندن شکل اول به فضای زمان، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم،

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = f(t), \quad (63.3)$$

که معادل است با جواب حاصل از حل معادله با به‌کارگیری عملگر ریمان-لیوویل. با اعمال تبدیل به فضای زمان شکل دوم، نیز نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود،

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(1)}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = f(t) + f(0) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad (64.3)$$

جمله‌ی اول این عبارت مشتق کاپوتو است، اما همان‌گونه که قبلاً نیز اشاره شد، یک جمله‌ی وابسته به مقدار تابع در $t = 0$ ظاهر شده است.

نوع دوم

معادله‌های انتگرالی نوع دوم به این صورت هستند،

$$u(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = f(t) \implies (1 + \lambda J^\alpha)u(t) = f(t) \quad (65.3)$$

پاسخ (۶۵.۳) به این صورت است،

$$u(t) = (1 - \lambda J^\alpha)^{-1} f(t) = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n J^{\alpha n}\right) f(t) = f(t) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \Phi_{\alpha n}\right) * f(t). \quad (66.3)$$

با استفاده از (۱۷.۳) می‌توان نشان داد که،

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (67.3)$$

با به دست آوردن مشتق مرتبه‌ی اول (۶۷.۳)، جمله‌ی اول بسطِ $E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ حذف می‌شود و نتیجه‌ی حاصل در (۶۶.۳) به دست می‌آید. از این رو، نتیجه‌ی حل معادله‌ی انتگرالی نوع دوم را به این شکل خواهیم داشت،

$$u(t) = f(t) + \frac{d}{dt} [E_\alpha(-\lambda t^\alpha)] * f(t) \quad (۶۸.۳)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس نیز به همین نتیجه می‌رسیم. با انجام تبدیل لاپلاس روی (۶۵.۳) شروع می‌کنیم،

$$\mathcal{L}[(1 + \lambda)^\alpha u(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \rightarrow \left[1 + \frac{\lambda}{s^\alpha}\right] \tilde{u}(s) = \tilde{f}(s). \quad (۶۹.۳)$$

معادله‌ی (۶۹.۳) را می‌توان به صورت‌های مختلف بازنویسی کرد، اما یک حالت خاص ما را به شکل پاسخ حاصل در رابطه‌ی (۶۸.۳) می‌رساند.

$$\tilde{u}(s) = \left[s \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} - 1 \right] \tilde{f}(s) + \tilde{f}(s). \quad (۷۰.۳)$$

در گام بعدی معادله‌ی (۷۰.۳) به فضای معمولی خود تابع بازگردانده می‌شود. بدین منظور باید از فرم تبدیل لاپلاس برای صورت خاصی از تابع میتاگ- لفلر، رابطه‌ی (۷۱.۳) استفاده نمود.

$$\mathcal{L}[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)] = \frac{s^\alpha}{s^\alpha + \lambda}. \quad (۷۱.۳)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۶.۳)، به راحتی می‌توان دید، آنچه که در سمت چپ رابطه‌ی (۷۰.۳) در داخل براکت قرار دارد، چیزی جز تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه‌ی اول سمت چپ رابطه‌ی (۷۱.۳) نیست؛ به عبارتی دیگر،

$$\mathcal{L}\left[E_\alpha^{(1)}(-\lambda t^\alpha)\right] = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda} - 1. \quad (۷۲.۳)$$

با استفاده از تعریف کانولوشن لاپلاس در (۱۴.۳)، دیده می‌شود که چگونه معکوس رابطه‌ی (۷۰.۳) منجر به همان نتیجه‌ی (۶۷.۳) می‌شود.

۴.۴.۳ معادله‌های دیفرانسیلی کسری

در معادله‌های دیفرانسیل معمول خطی کلاسیک، عموماً دو نوع معادله زیر مورد توجه بیشتری هستند، که در مرجع [۱۲۳] از آن‌ها به‌عنوان معادله‌های واهلش و نوسان^۱ یاد شده،

$$\begin{aligned} u'(t) &= -u(t) + q(t) \\ u''(t) &= -u(t) + q(t). \end{aligned} \quad (۷۳.۳)$$

وقتی در مورد این دو معادله صحبت می‌کنیم، از آن‌ها به ترتیب به عنوان معادله‌های دیفرانسیل مرتبه‌ی اول و دوم یاد می‌کنیم. این تمایز دو معادله را در ریاضیات کسری نیز می‌توان با اختصاص عنوان فرم واهلش کسری و نوسانگر کسری نشان داد. در معادلات دسته اول، مرتبه‌ی معادله دیفرانسیل $1 < \alpha \leq 2$ می‌باشد و طبق انتظار مرتبه‌ی دسته دوم $1 < \alpha \leq 2$ می‌باشد.

اما برخلاف معادله‌های با مرتبه‌ی صحیح، پاسخ این دو معادله‌ی مرتبه‌ی اول و دوم کاملاً مستقل و از هم متفاوت نیستند، بلکه به هم ارتباط داشته و در هم تنیده‌اند. از این رو نیازی به جدا کردن این دو معادله از یکدیگر برای بررسی جواب‌های آن‌ها وجود ندارد. معادله‌ی دیفرانسیل معمولی کسری خطی را می‌توان به یک شکل کلی زیر بیان کرد،

$$D_*^\alpha u(t) = D^\alpha \left(u(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(\circ) \right) = -u(t) + q(t), \quad m-1 < \alpha \leq m. \quad (۷۴.۳)$$

یادآوری می‌کنیم که در این‌جا از عملگر مشتق کاپوتو استفاده شده است. همان‌گونه که قبلاً نیز گفته شد، با به‌کار بردن این عملگر، شرایط اولیه با مرتبه‌ی صحیح مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مستقیم‌ترین روش برای حل معادله‌ی (۷۴.۳)، استفاده از تبدیل لاپلاس است. با توجه به رابطه‌ی (۴۵.۳)، می‌توان (۷۴.۳) را به‌صورت زیر بازنویسی نمود،

$$s^\alpha \tilde{u}(s) = \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} u^{(k)}(\circ) = -\tilde{u}(s) + \tilde{q}(s) \implies \tilde{u}(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1} u^{(k)}(\circ) + \frac{1}{s^\alpha + 1} \quad (۷۵.۳)$$

^۱ The Relaxation and Oscillation Forms

می‌توان جمله‌های داخل سری را جمع زد،

$$\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha}+1} = \frac{1}{s^{\alpha}} \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1} = \mathcal{L} [J^k E_{\alpha}(-t^{\alpha})] \quad (۷۶.۳)$$

همچنین،

$$\frac{1}{s^{\alpha}+1} = -\left(s \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1} - 1\right) = \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} [E_{\alpha}(-t^{\alpha})] \right] \quad (۷۷.۳)$$

سرانجام با استفاده از رابطه‌های (۷۶.۳) و (۷۷.۳)، برای تعریف تبدیل لاپلاس معکوس، می‌توان رابطه‌ی (۷۵.۳) را به عبارتی برای $u(t)$ تبدیل کرد، و در نهایت جواب معادله دیفرانسیل معمولی کسری را به این شکل به دست آورد،

$$u(t) = \sum_{k=0}^{m-1} J^k E_{\alpha}(-t^{\alpha}) u^{(k)}(0) - q(t) * E'_{\alpha}(-t^{\alpha}). \quad (۷۸.۳)$$

فصل چهارم

حرکت بروانی بازمقیاس شده در حضور تحولات گذشته سیستم

۱.۴ اثر تحولات گذشته سیستم بر SBM نامقید

۱.۱.۴ خواص ارگودیسیتی

میانگین هنگردی MSD تابع خود همبستگی مکانی فرآیند SBM طبق رابطه،

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = 2K_\alpha^* \min(t_1, t_2)^\alpha. \quad (1.4)$$

بیان می‌شود که به کمک آن و با بکارگیری صورت انتگرالی معادله SBM از (۲۷.۲)، می‌توان نشان داد MSD برای SBM رابطه توانی با زمان t دارد،

$$\langle x^2(t) \rangle = 2K_\alpha^* t^\alpha. \quad (2.4)$$

برای حالتی که اندازه گیری از زمان $t_a > 0$ شروع شده و تا t ادامه داشته، به این صورت خواهد بود،

$$\begin{aligned} \langle x^\gamma(t) \rangle_a &= \gamma \alpha K_\alpha^* \int_{t_a}^{t+t_a} dt_1 \int_{t_a}^{t+t_a} dt_2 t_1^{\frac{(\alpha-1)}{\gamma}} t_2^{\frac{(\alpha-1)}{\gamma}} \delta(t_1 - t_2) \\ &= \gamma \alpha K_\alpha \int_{t_a}^{t+t_a} dt_1 t_1^{(\alpha-1)} = \gamma K_\alpha [(t+t_a)^\alpha - t_a^\alpha]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

در به دست آوردن این نتیجه از رابطه (۱.۴) استفاده شده است. در واقع مقدار مربوط به بازه زمانی $(0, t_a)$ از (۲.۴) کم شده است. نتیجه فوق به ازای مقادیر حدی متفاوت t_a ، یک گذار از رفتار توانی (مربوط به $t_a = 0$) به رفتار خطی برای $t_a \gg t$ (همرفتار با حرکت براونی) نشان می دهد،

$$\langle x^\gamma(t) \rangle_a = \begin{cases} \gamma \alpha K_\alpha^* t_a^{\alpha-1} t, & t_a \gg t \\ \gamma K_\alpha^* t^\alpha, & t \gg t_a \end{cases} \quad (4.4)$$

هرچند که حضور یک ضریب توانی برای t_a های خیلی بزرگ، نشانی از غیرعادی بودن فرآیند را با خود به همراه دارد. نتیجه حاصل در حضور t_a ، همانند نتایج مشاهده شده برای فرآیند زیرپخشی CTRW است [۱۳۶، ۱۳۵].

میانگین زمانی MSD به همین ترتیب اثر بازه زمانی آماده سازی سیستم، $(0, t_a)$ بر میانگین زمانی MSD (رابطه ((۱۷.۲))،

$$\langle \overline{\delta_a^\gamma(\Delta)} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{t-\Delta} \int_{t_a}^{t+t_a-\Delta} [x(t'+\Delta) - x(t')]^\gamma dt' \right\}, \quad (5.4)$$

در محدوده انتگرال گیری وارد می شود،

$$\begin{aligned} \langle \overline{\delta_a^\gamma(\Delta)} \rangle &= \int_{t_a}^{t+t_a-\Delta} dt' \frac{\langle [x(t'+\Delta) - x(t')]^\gamma \rangle}{t-\Delta} \\ &= \int_{t_a}^{t+t_a-\Delta} dt' \frac{(\langle x(t'+\Delta)x(t'+\Delta) \rangle - \gamma \langle x(t'+\Delta)x(t') \rangle + \langle x(t')x(t') \rangle)}{t-\Delta}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

با بکارگیری (۲۷.۲) در حل انتگرال بالا، خواهیم داشت،

$$\langle \overline{\delta_a^2(\Delta)} \rangle = \frac{2K_\alpha^*}{(\alpha+1)(t-\Delta)} \left[(t+t_a)^{\alpha+1} - (t_a+\Delta)^{\alpha+1} - (t+t_a-\Delta)^{\alpha+1} + t_a^{\alpha+1} \right]. \quad (۷.۴)$$

در حد $t_a \rightarrow 0$ ، رابطه (۳۷.۲) بازیابی می‌شود که حکایت از غیر ارگودیک بودن فرآیند دارد.

با بسط نتیجه (۷.۴) در حد بازه‌های زمانی Δ بسیار کوچک، $\Delta \ll t, t_a$ ، نتیجه جالبی مشاهده می‌شود که در مورد فرآیند زیرپخش *CTRW* با وارد کردن نقش گذشته سیستم نیز وجود داشت [۱۳۶]،

$$\langle \overline{\delta_a^2(\Delta)} \rangle \sim \Lambda_\alpha(t_a/t) \times \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle, \quad (۸.۴)$$

می‌توان دید، سهمی که از حضور t_a ناشی می‌شود به صورت یک ضریب جداگانه بر عبارتی که رابطه خطی نسبت به Δ را نشان می‌دهد، اثر می‌گذارد،

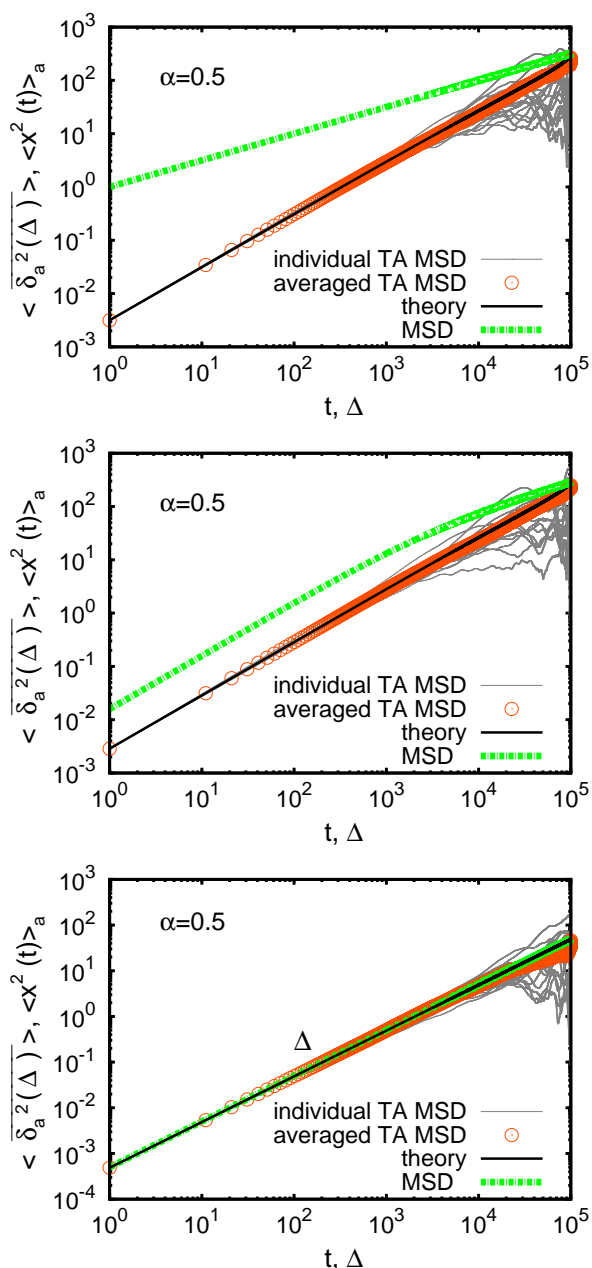
$$\Lambda_\alpha(z) = (1+z)^\alpha - (z)^\alpha. \quad (۹.۴)$$

در ناحیه حدی $t_a \gg t$ ، میانگین زمانی (۷.۴) رابطه خطی با Δ نشان می‌دهد،

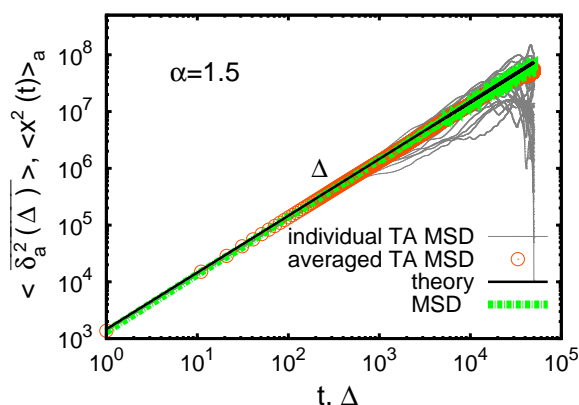
$$\langle \overline{\delta_a^2(\Delta)} \rangle = 2\alpha K_\alpha^* t_a^{\alpha-1} \Delta, \quad (۱۰.۴)$$

که همسان رفتار میانگین مربع جابجایی *MSD* است. به این ترتیب ارگودیسیتی با حضور t_a دوباره برقرار شده است. شکل (۱۰.۴) رفتار میانگین هنگردی و زمانی *MSD* را نشان می‌دهد. برای $t_a = 0$ شکست ارگودیسیتی به وضوح از نمودار اول مشاهده می‌شود؛ در حالی که *MSD* رفتار توانی نسبت به زمان دارد $\langle x^2(t) \rangle \simeq t^\alpha$ (خط‌چین سبز رنگ)، میانگین زمانی رفتاری (خط سیاه) خطی $\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle \simeq \Delta$ نشان می‌دهد.

در نمودار میانی که به ازای t_a های ضعیف است، می‌بینیم که میانگین هنگردی تغییر رفتار شدیدی به سمت میانگین زمانی بروز می‌دهد در حالی که میانگین زمانی تقریباً بدون تغییر است. میانگین هنگردی در t_a تغییر نما می‌دهد. در ادامه با افزایش زمان میان آماده‌سازی سیستم و شروع اندازه‌گیری، در حد رژیم t_a بسیار قوی، میانگین هنگردی کاملاً بر میانگین زمانی منطبق می‌شود. مشاهده می‌شود که با وارد کردن اثر گذشته سیستم، آمار فرآیند *SBM* از لحاظ ارگودیسیتی تغییر می‌کند. در این رژیم t_a بسیار بزرگ، رفتار ارگودیک مشابهی برای نمای $\alpha = 3/2$ که معادل فرایزش است، نیز در شکل



شکل ۱.۴: میانگین هنگردی و میانگین زمانی MSD برای نمای $\alpha = 1/2$. خط‌های خاکستری رنگ، MSD برای 20 نمونه به‌دست آمده از شبیه‌سازی حاصل از معادله لانژوین (۲۸.۲)، برای زمان مشاهده $t = 10^5$ را نشان می‌دهد. دایره‌ها نشان دهنده میانگین بر روی این 20 نمونه هستند. خط سیاه: نتیجه تئوری (۷.۴) برای میانگین زمانی MSD . خط سبز: نتیجه تحلیلی برای میانگین هنگردی (۳.۴) است. نتایج برای سه حالت: الف) بدون در نظر گرفتن نقش گذشته سیستم ($t_a = 0$)، ب) اثر ضعیف گذشته ($t_a = 10^3$) و ج) اثر بسیار شدید گذشته ($t_a = 10^6$) ارائه شده‌اند. در همه محاسبات این بخش ضریب ثابت $K_\alpha^* = 1/2$ در نظر گرفته شده است [۱۰۱].



شکل ۲.۴: میانگین هنگردی و میانگین زمانی *MSD* برای نمای $\alpha = 3/2$ در حد t_a بسیار قوی $t_a = 10^6$ با زمان مشاهده $t = 10^5$ [۱۰۱].

(۱.۱.۴) مشاهده می‌شود.

پارامتر شکست ارگودیسیتی با در نظر گرفتن نقش گذشته سیستم در این بخش به مطالعه‌ی خواص ارگودیسیتی *SBM* با وارد کردن دینامیک سیستم در بازه‌ی t_a می‌پردازیم. برای میانگین زمانی‌های مختلف پراکندگی حول مقدار میانگین آن‌ها که از تئوری و شبیه‌سازی برای نماها و t_a ‌های مختلف حاصل شده، در شکل (۳.۴) نشان داده شده است. در این حالت پارامتر شکست ارگودیسیتی به صورت زیر تعریف می‌شود،

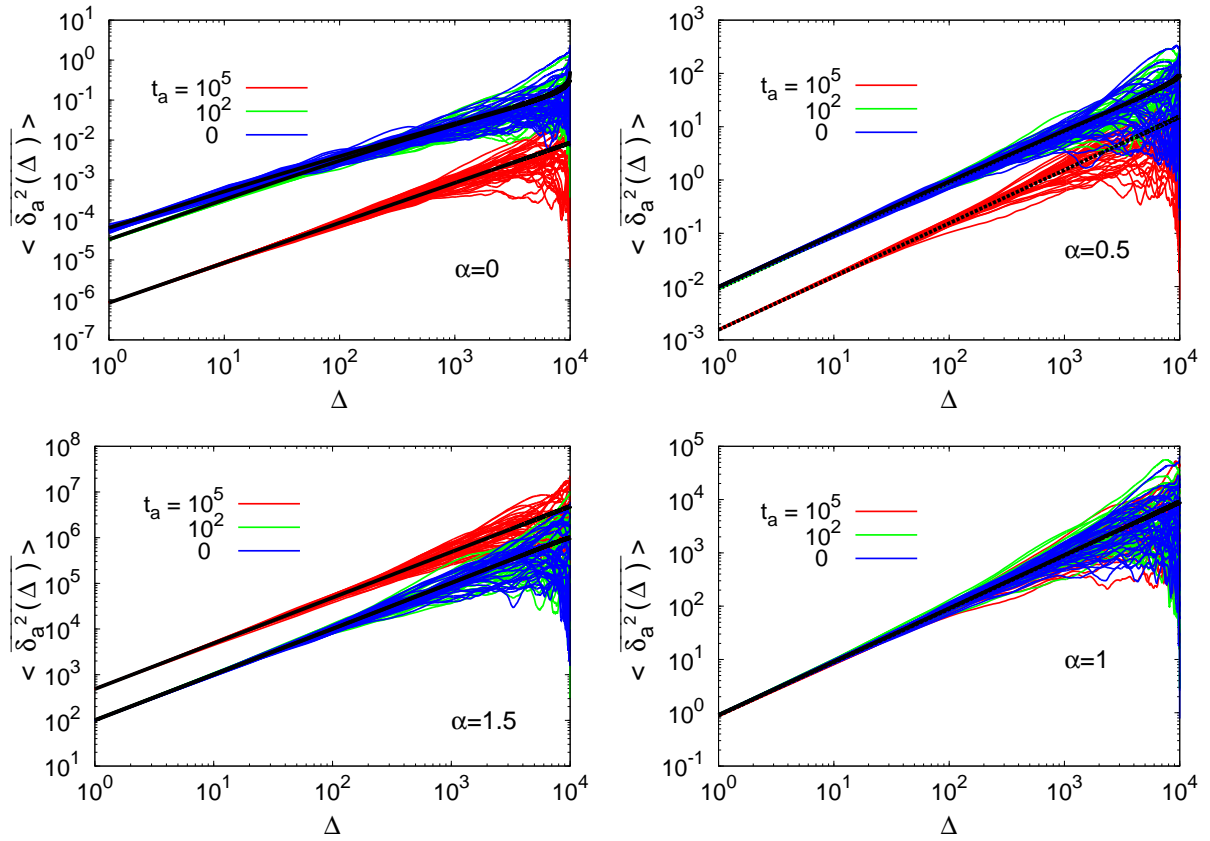
$$EB_a(\Delta) = \frac{\langle \overline{\delta_a^2(\Delta)} \rangle - \langle \delta_a^2(\Delta) \rangle}{\langle \delta_a^2(\Delta) \rangle} \quad (۱۱.۴)$$

با جایگذاری از (۵.۴) و انجام محاسبات مشابه (۴۰.۲) تا (۴۴.۲) که برای مورد *SBM* بدون در نظر گرفتن نقش گذشته در فصل دوم ارائه شد، برای صورت عبارت فوق خواهیم داشت،

$$\mathcal{N}_a(\Delta) = \frac{4}{(t-\Delta)^2} \int_{t_a}^{t+t_a-\Delta} dt_1 \int_{t_1}^{t+t_a-\Delta} dt_2 \left[\langle x^2(t_1 + \Delta) \rangle - \langle x(t_1 + \Delta)x(t_2) \rangle \right]^2 \quad (۱۲.۴)$$

جهت محاسبه انتگرال، تغییر متغیر $\tau' = t_2 - t_1$ را اعمال کرده و با استفاده از رابطه کوواریانس خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \frac{4}{(t-\Delta)^2} \int_{t_a}^{t+t_a-\Delta} dt_1 \int_0^{t+t_a-\Delta-t_1} d\tau' \left[\langle x^2(t_1 + \Delta) \rangle - \langle x(t_1 + \Delta)x(t_1 + \tau') \rangle \right]^2 \\ &= \frac{4}{(t-\Delta)^2} \int_0^\Delta d\tau' \int_{t_a}^{t+t_a-\Delta-\tau'} dt_1 \left[\langle x^2(t_1 + \Delta) \rangle - \langle x^2(t_1 + \tau') \rangle \right]^2 \end{aligned}$$



شکل ۳.۴: میانگین زمانی *MSD* برای *SBM* بر حسب Δ برای t_a ها و نماهای مختلف $0 \leq \alpha \leq 2$. زمان مشاهده $t = 10^4$ و در نظر گرفته شده اند $t_a = 0, 10^2, 10^5$. [۱۰۱].

(۱۳.۴)

با استفاده از $\langle x^\nu(t) \rangle = \nu K_\alpha t^\alpha$ و تغییر متغیر $x = \frac{t}{\Delta}, y = \frac{t'}{\Delta}$ به انتگرال زیر می‌رسیم،

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \frac{\nu K_\alpha^\nu \Delta^{\nu(\alpha+\nu)}}{(t-\Delta)^\nu} \int_0^1 dy \int_{\frac{t_a}{\Delta}}^{\frac{t+t_a}{\Delta}-1-y} dx [(x+1)^\alpha - (x+y)^\alpha]^\nu \\ &= \frac{\nu K_\alpha^\nu \Delta^{\nu(\alpha+\nu)}}{(t-\Delta)^\nu} \int_0^1 dy \int_{\frac{t_a}{\Delta}}^{\frac{t+t_a}{\Delta}-1-y} dx \left[(x+1)^{\nu\alpha} + (x+y)^{\nu\alpha} - \nu(x+1)^\alpha(x+y)^\alpha \right]. \end{aligned}$$

(۱۴.۴)

در ادامه، ترتیب انتگرال گیری را تغییر داده و بازه ی انتگرال گیری متغیر x را به دو ناحیه تقسیم می کنیم، به این ترتیب که،

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy \int_{\frac{t_a}{\Delta}}^{\frac{t+t_a}{\Delta}-2} dx \dots + \int_0^1 dy \int_{\frac{t+t_a}{\Delta}-2}^{\frac{t+t_a}{\Delta}-1} dx \dots \\ & = \int_{\frac{t_a}{\Delta}}^{\frac{t+t_a}{\Delta}-2} dx \int_0^1 dy \dots + \int_{\frac{t+t_a}{\Delta}-2}^{\frac{t+t_a}{\Delta}-1} dx \int_0^{\frac{t+t_a}{\Delta}-1-x} dy \dots \end{aligned} \quad (15.4)$$

و $\mathcal{N}_a(\Delta, \tau)$ به این شکل خواهد بود،

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \int_{\frac{t_a}{\Delta}}^{\frac{t+t_a}{\Delta}-2} dx \int_0^1 dy \left[(x+1)^{\nu\alpha} + (x+y)^{\nu\alpha} - \nu(x+1)^\alpha(x+y)^\alpha \right] \\ &+ \int_{\frac{t+t_a}{\Delta}-2}^{\frac{t+t_a}{\Delta}-1} dx \int_0^{\frac{t+t_a}{\Delta}-1-x} dy \left[(x+1)^{\nu\alpha} + (x+y)^{\nu\alpha} - \nu(x+1)^\alpha(x+y)^\alpha \right] \end{aligned} \quad (16.4)$$

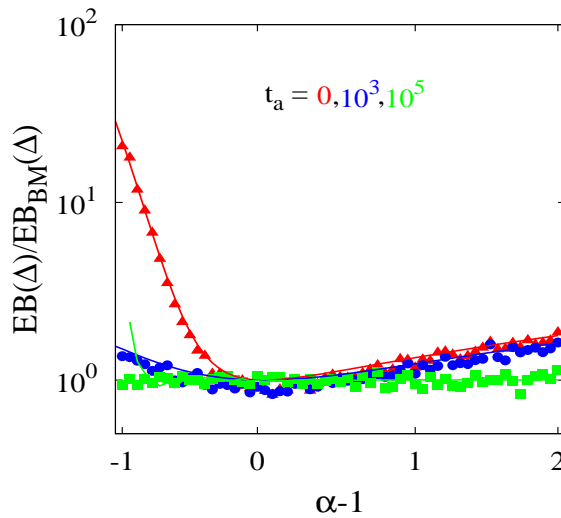
بر حسب متغیرهای $\tau = \frac{t}{\Delta}$ و $\tau_a = \frac{t_a}{\Delta}$ ، صورت عبارت مربوط به پارامتر ارگودیستی در (۱۱.۴) به دست می آید،

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \frac{\nu K_\alpha^\nu \Delta^{\nu\alpha+2}}{(t-\Delta)^\nu} \left(\frac{(\tau+\tau_a-1)^{\nu\alpha+1}}{\nu\alpha+1} - \frac{\nu(\tau+\tau_a)^{\alpha+1}(\tau+\tau_a-1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^\nu} \right. \\ &+ \frac{(\nu\alpha+1)(\tau+\tau_a-1)^{\nu\alpha+2}}{\nu(\nu\alpha+1)(\alpha+1)^\nu} + \frac{(\tau+\tau_a)^{\nu\alpha+2}}{\nu(\nu\alpha+1)(\alpha+1)} \\ &\left. - \frac{(\tau_a+1)^{\nu\alpha+1}}{(\nu\alpha+1)} + \frac{(\nu\alpha+1)(\tau_a+1)^{\nu\alpha+2}}{\nu(\nu\alpha+1)(\alpha+1)^\nu} + \frac{(\tau_a)^{\nu\alpha+2}}{\nu(\nu\alpha+1)(\alpha+1)} + \frac{\nu}{\nu+1} I_0 \right) \end{aligned} \quad (17.4)$$

که در این عبارت $I_0 = \int_{\frac{t_a}{\Delta}}^{\frac{t+t_a}{\Delta}-1} dx x^{\alpha+1} (x+1)^\alpha$ است.

اما مخرج عبارت (۱۱.۴) بر اساس میانگین زمانی MSD قابل بیان است [۱۰۲، ۱۰۱]،

$$\mathcal{D}_a(\Delta, \tau) = \left\langle \overline{\delta_a^\nu(\Delta)} \right\rangle^\nu = \left\{ \frac{\nu K_\alpha \Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(t-\Delta)} \left[(\tau+\tau_a)^{\alpha+1} - (\tau_a+1)^{\alpha+1} - (\tau+\tau_a-1)^{\alpha+1} + \tau_a^{\alpha+1} \right] \right\}^\nu. \quad (18.4)$$



شکل ۴.۴: پارامتر شکست ارگودیسیتی برای *SBM* بر حسب نمای α برای t_a های مختلف. رنگ‌ها برای نشان دادن مقادیر مختلف t_a بکار رفته‌اند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی با نقاط و نتایج تحلیلی با خطوط کامل نمایش داده شده‌اند. در این شکل پارامترهای مورد استفاده به این صورت هستند $\Delta = 10$ ، $t = 10^4$ و $N = 10^3$ [۹۵].

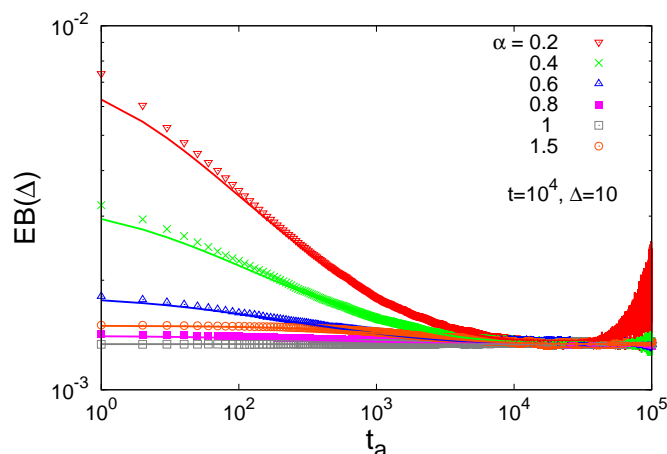
با میل دادن زمان τ_a به سمت صفر عبارات (۴۹.۲) و (۵۱.۲) مربوط به *EB* بدون در نظر گرفتن دینامیک سیستم تا لحظه t_a ، بازیابی می‌شود.

حال نتیجه حاصل را در حدهای مختلف پارامترهای موجود بررسی می‌کنیم. برای t_a های بسیار بزرگ یا $\Delta \gg t \gg t_a$ میانگین زمانی، رفتار مقیاسی نشان می‌دهد،

$$\langle \overline{\delta_a^2(\Delta)} \rangle \sim 2\alpha K_\alpha t_a^{\alpha-1} \Delta \quad (19.4)$$

و بدین ترتیب برای زمان مشاهده بسیار بلند خواهیم داشت $(\alpha^2 \tau_a^{\alpha-2} \tau / 3)$ $\mathcal{N}_a(\Delta, \tau) \sim 16 K_\alpha^2 \Delta^{\alpha} \tau^{-2}$. رفتاری مشابه حرکت بروانی در رابطه (۲۰.۲) مشاهده می‌شود. این نتیجه در شکل (۴.۴) در حالت t_a بسیار بزرگ مشاهده می‌شود. در واقع در این رژیم، $K_\alpha(t)$ تنها در بازه $t \ll t_a$ تغییرات قابل ملاحظه دارد، از این رو می‌توان فرآیند را ارگودیک فرض کرد. اما در حد مخالف یعنی t_a های بسیار کوچک $t_a \ll t$ ، با توجه به $\langle \overline{\delta_a^2(\Delta, \tau)} \rangle \sim 2K_\alpha \Delta^\alpha (\tau^{\alpha-1} + \alpha \tau_a \tau^{\alpha-2})$ زمان مشاهدهی بسیار بلند نتیجه $([3(2\alpha - 1)] / (\alpha^2 \tau^{\alpha-1})) \mathcal{N}(\Delta, \tau) \sim 16 K_\alpha^2 \Delta^{\alpha} \tau^{-2}$ را خواهیم داشت. در نهایت، پارامتر شکست ارگودیسیتی تا مرتبه اول، مستقل از t_a بوده و برای $\alpha > 1/2$ رفتاری مانند آنچه در (۵۶.۲) مشاهده شد، دارد.

شکل (۵.۴) تغییرات *EB* حاصل از تئوری و شبیه‌سازی را بر اساس زمان t_a را برای نماهای مختلف *SBM* نشان می‌دهد.



شکل ۵.۴: پارامتر EB برای SBM بر حسب t_a برای نماهای مختلف α . خطوط کامل برای نمایش نتایج تحلیلی و نقاط برای نتایج شبیه‌سازی بکار رفته‌اند. در t_a های بلند ناپایداری در نتایج شبیه‌سازی مشاهده می‌شود. پارامترها: $\Delta = 10$ ، $N = 10^3$ و $t = 10^4$. [۹۵].

با افزایش زمان t_a مقدار پارامتر EB به‌ویژه برای نماهای کوچک‌تر که زیرپخش را نشان می‌دهند، کاهش می‌یابد.

۲.۴ اثر گذشته بر SBM مقید

۱.۲.۴ خواص ارگودیسیتی

میانگین هنگردی MSD با حضور اثر حافظه همان‌طور که قبلاً بحث شد، در نظرگرفتن اثر پتانسیل خارجی بر رفتار ذره در فرآیند پخش از اهمیت بالایی برخوردار است. در بخش (۲.۲) تاثیر پتانسیل هارمونیک بر میانگین هنگردی و زمانی MSD برای SBM بررسی شد. در این بخش با وارد کردن سهم بازه‌ی (\circ, t_a) بر این فرآیند، به مطالعه کامل‌تر SBM مقید می‌پردازیم. میانگین هنگردی در این حالت بر حسب تابع کومر،

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle_a &= \langle [x(t_a + t) - x(t_a)]^2 \rangle \\ &= \langle x(t_a + t)^2 \rangle + \langle x(t_a)^2 \rangle - 2 \langle x(t_a + t)x(t_a) \rangle \\ &= 2M_1(t_a + t) + 2M_1(t_a) - 4e^{-kt}M_1(t_a), \end{aligned} \quad (20.4)$$

به دست می آید. که از مختصرنویسی زیر،

$$M_1(t) = K_\alpha^* t^\alpha \exp(-\gamma kt) M(\alpha, \alpha + 1, \gamma kt). \quad (21.4)$$

استفاده شده است. در حد $k \rightarrow 0$ که اثر پتانسیل از بین می رود، با توجه به ویژگی تابع کومر $1 \rightarrow M(\alpha, \alpha + 1, 0)$ ، نتیجه فوق به رابطه (۶۱.۲) حالت آزاد میل می کند. حال، رفتار این کمیت را به ازای حدهای مختلف t_a بررسی می کنیم. در مورد $t_a = 0$ ، نتیجه حاصل در مرجع ([۹۴]) را خواهیم داشت،

$$\langle x^2(t) \rangle = \gamma M_1(t), \quad (22.4)$$

که برای بازه زمانی بسیار کوچک $1/k \ll t$ ، نتیجه (۲.۴) به دست می آید. در این بازه زمانی بسیار کوچک پتانسیل تاثیر چندانی بر رفتار هنگردی نداشته و MSD نظیر حالت آزاد است. در حد $t \gg 1/k$ که زمان زیادی از اعمال پتانسیل گذشته است، با استفاده از بسط تابع کومر برای مقادیر بزرگ،

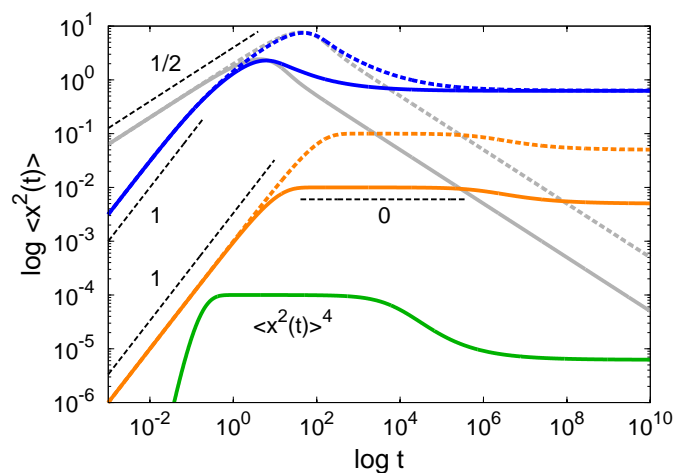
$$M(\alpha, \alpha + 1, z) \sim \alpha \frac{\exp(z)}{z}, \quad (23.4)$$

نتیجه مرجع ([۹۴]) را خواهیم داشت،

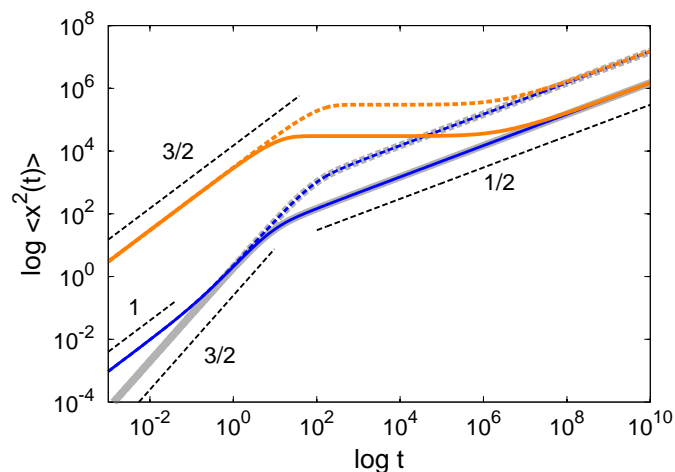
$$\langle x(t)^2 \rangle \sim \frac{\alpha K_\alpha^*}{k} t^{\alpha-1}. \quad (24.4)$$

همان گونه که در شکل های (۶.۴ و ۷.۴) مشاهده می شود، برای زیرپخش ($\alpha < 1$) همواره مقداری نزولی و برای فراپخش ($\alpha > 1$) روند صعودی دارد. این نتیجه حاصل قرار دادن ضریب پخش وابسته به زمان است که منجر به ناپایا بودن SBM می شود. با وارد کردن اثر t_a بر این فرآیند، به ازای $t_a \ll 1/k$ همان نتیجه (۳.۴) برای SBM آزاد را خواهیم داشت. اما اگر $t \gg 1/k$ ، رفتار مجانبی،

$$\langle x^2(t) \rangle_a \sim \frac{\alpha K_\alpha^*}{k} t^{\alpha-1} + \gamma K_\alpha^* t_a^\alpha, \quad (25.4)$$



شکل ۶.۴: میانگین هنگردی *MSD* برای *SBM* مقید با نمای $\alpha = 0.5$ برای دو ثابت نیروی $k = 0.1$ (خطوط کامل) و $k = 0.01$ (خط چین) و برای مقادیر مختلف t_a : الف) $t_a = 0$ (خطوط خاکستری، ب) مقدار ضعیف $t_a = 0.1$ خطوط آبی و ج) بسیار قوی $t_a = 10^6$ خطوط نارنجی. خط سبز نشان دهنده $\langle x^2(t) \rangle^4$ برای $t_a = 10^6$ و $k = 0.1$ است که گذرا میان دو ناحیه تخت را بهتر نشان می‌دهد [۱۰۱].



شکل ۷.۴: میانگین هنگردی *MSD* برای *SBM* مقید با نمای $\alpha = 1/5$ برای دو ثابت نیروی $k = 0.1$ (خطوط کامل) و $k = 0.01$ (خط چین) و برای مقادیر مختلف t_a : الف) $t_a = 0$ (خطوط خاکستری، ب) مقدار ضعیف $t_a = 0.1$ خطوط آبی و ج) بسیار قوی $t_a = 10^6$ خطوط نارنجی. در تمام موارد در نهایت رابطه مقیاسی $\simeq t^{\alpha-1}$ مشاهده می‌شود [۱۰۱].

به دست می‌آید که برای مورد زیرپخش، جمله‌ی اول به صفر میل کرده و در نهایت به یک ناحیه تخت می‌رسد،

$$\langle x^2(t) \rangle_a \sim 2K_\alpha^* t_a^\alpha. \quad (26.4)$$

این نتیجه‌ای است مستقل از شدت پتانسیل اعمال شده و تنها وابسته به زمان t_a و ضریب K_α^* . در واقع این عبارت برآمده از حرکت آزاد اولیه در بازه زمانی $(0, t_a)$ است. اما برای حالت فراپخش جمله دوم نتیجه (25.4) نتیجه غالب خواهد بود،

$$\langle x^2(t) \rangle_a \sim \frac{\alpha K_\alpha^*}{k} t^{\alpha-1}. \quad (27.4)$$

این انحراف کوچک ناشی از حضور t_a ، در شکل‌های (6.4) و (7.4) قابل مشاهده است.

نتیجه (20.4) برای میانگین مربع جابجایی، در رژیم t_a بسیار بزرگ $1/k \gg t_a \gg 1/k$ به صورت،

$$\langle x^2(t) \rangle_a \sim \alpha k^{-1} K_\alpha^* \left[(t_a + t)^{\alpha-1} + t_a^{\alpha-1} (1 - 2e^{-kt}) \right], \quad (28.4)$$

است. به ازای زمان مشاهده‌های بسیار کوچک $1/k \ll t$ به همان نتیجه حالت آزاد در (4.4) خواهیم رسید. اما برای بازه‌های زمانی بزرگ‌تر $1/k \gg t$ باید نتیجه فوق را با دقت بیشتری بررسی نمود. در حالت $1/k \gg t \gg t_a$ ، به نتیجه مستقل از زمان،

$$\langle x^2(t) \rangle_a \sim \frac{2\alpha K_\alpha^*}{k} t_a^{\alpha-1}, \quad (29.4)$$

می‌رسیم که نشان دهنده یک ناحیه تخت است. همچنین، برای $1/k \gg t_a \gg t$ ، دوباره نتیجه بستگی به مقدار نمای α دارد، به طوری که در مورد زیرپخش نتیجه ثابت،

$$\langle x^2(t) \rangle_a \sim \frac{\alpha K_\alpha^*}{k} t_a^{\alpha-1}, \quad (30.4)$$

حاصل می‌شود که یک ضریب $1/2$ با (29.4) تفاوت دارد. برای فراپخش، رابطه (27.4) به دست می‌آید، شکل‌های (6.4) و (7.4) نشان دهنده این رفتار هستند.

میانگین زمانی MSD با حضور دینامیک گذشته سیستم حال به مطالعه اثر پتانسیل در حضور t_a بر میانگین زمانی MSD می‌پردازیم. بدین منظور، رابطه کوواریانس (۶۰.۲) را در (۵.۴) قرار داده،

$$\begin{aligned} \langle \overline{\delta_a^{\Psi}(\Delta)} \rangle &= \frac{\Psi K_{\alpha}^*}{t - \Delta} \int_{t_a}^{t+t_a-\Delta} dt' \left[(t' + \Delta)^{\alpha} e^{-\Psi k(t'+\Delta)} M(\alpha, \alpha + 1, \Psi k(t' + \Delta)) \right. \\ &\quad \left. + t'^{\alpha} e^{-\Psi kt'} M(\alpha, \alpha + 1, \Psi kt') - \Psi t'^{\alpha} e^{-k(\Psi t'+\Delta)} M(\alpha, \alpha + 1, \Psi kt') \right], \end{aligned} \quad (31.4)$$

و با کمک رابطه [۱۱۵]،

$$\frac{d^n}{dz^n} \left(z^{b-1} e^{-z} M(a, b, z) \right) = (b-n)_n z^{b-n-1} e^{-z} M(a-n, b-n, z), \quad (32.4)$$

برای تابع کومر، نتیجه کلی زیر حاصل می‌شود،

$$\begin{aligned} \langle \overline{\delta_a^{\Psi}(\Delta)} \rangle &= \frac{\Psi K_{\alpha}^*}{(t - \Delta)(1 + \alpha)} \left[M_{\Psi}(t + t_a) - M_{\Psi}(t_a + \Delta) + M_{\Psi}(t + t_a - \Delta) - M_{\Psi}(t_a) \right. \\ &\quad \left. - \Psi e^{-k\Delta} \left(M_{\Psi}(t + t_a - \Delta) - M_{\Psi}(t_a) \right) \right], \end{aligned} \quad (33.4)$$

که نماد،

$$M_{\Psi}(t) = t^{1+\alpha} e^{-\Psi kt} M(1 + \alpha, \Psi + \alpha, \Psi kt), \quad (34.4)$$

جهت مختصرنویسی استفاده شده است. به سادگی می‌توان دید که در حد $k \rightarrow 0$ رابطه (۷.۴) مربوط به فرآیند آزاد و برای $t_a = 0$ نیز نتیجه مرجع ([۹۴]) بازیابی می‌شود. با وارد کردن نقش گذشته، دو حالت حدی t_a کوچک و بسیار بزرگ جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرند.

اگر زمان t_a در مقایسه با زمان واهلش سیستم کوچک باشد، $t_a \ll 1/k$ ، دوباره با توجه به نسبت میان سه مقدار t_a, t, Δ باید رژیم‌های مختلف را در نظر گرفت. در مورد اول برای $(t \gg 1/k \gg \Delta t_a)$ ، به همان رابطه خطی با زمان در (۳۷.۲)

مربوط به عدم حضور اثر بازه زمانی تا t_a می‌رسیم. اما وقتی حد $t_a \gg 1/k \gg \Delta \gg t$ را در نظر بگیریم، نتیجه،

$$\langle \overline{\delta_a^2(\Delta)} \rangle \sim \frac{2K_\alpha^*}{k} t^{\alpha-1}, \quad (35.4)$$

در مرجع ([۸۰])، که بر حسب Δ ثابت است، به دست می‌آید. با افزایش Δ و میل کردن آن به سمت زمان مشاهده t ، این میانگین زمانی، به مقدار میانگین هنگردی در (۳۰.۴) میل می‌کند،

$$\langle \overline{\delta_a^2(\Delta)} \rangle \sim \frac{\alpha K_\alpha^*}{k} t^{\alpha-1} \quad (36.4)$$

واضح است که در این رژیم، زمان t_a بر میانگین زمانی اثر زیادی وارد ننموده است.

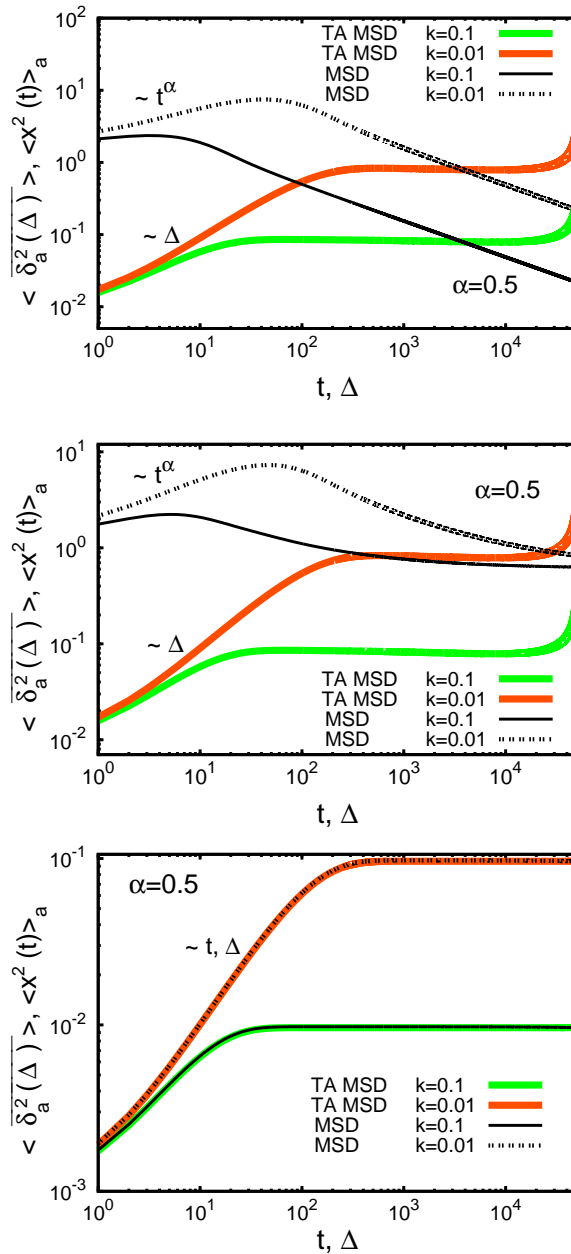
حالت جالب توجه در موردی است که زمان $1/k \gg t_a$ بزرگ باشد. همچنین اگر زمان مشاهده t هم بزرگ باشد، $t \gg 1/k$ ، از رابطه (۳۳.۴) برای میانگین زمانی نتیجه،

$$\langle \overline{\delta_a^2(\Delta)} \rangle \sim \frac{K_\alpha^*}{k(t-\Delta)} \left[(t+t_a)^\alpha - (\Delta+t_a)^\alpha + (1-2e^{-k\Delta})[(t+t_a-\Delta)^\alpha - t_a^\alpha] \right]. \quad (37.4)$$

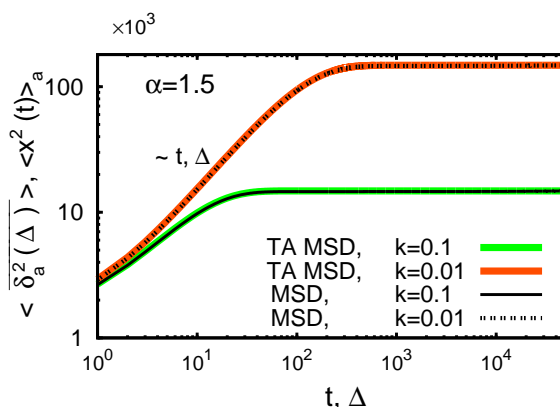
حاصل می‌شود. در این رابطه اگر گام زمانی Δ در مقایسه با زمان واهلش سیستم کوچک باشد، $t, t_a \gg 1/k \gg \Delta$ ، نتیجه همان (۸.۴) برای *SBM* نامقید می‌شود. برای گام زمانی بزرگ، $t, t_a \gg \Delta \gg 1/k$ ، نیز مانند مرجع ([۱۳۶]) نتیجه به صورت یک ضریب دربردارنده سهم t_a (رابطه (۹.۴)) در عبارتی معادل رابطه (۳۵.۴) خواهد بود،

$$\langle \overline{\delta_a^2(\Delta)} \rangle \sim \Lambda_a(t_a/t) \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle. \quad (38.4)$$

شکل (۸.۴) رفتار میانگین هنگردی و زمانی *MSD* را برای *SBM* مقید بر اساس روابط (۲۰.۴) و (۳۳.۴) برای سه رژیم مختلف از زمان t_a نشان می‌دهد. در نمودار اول که این اثر وارد نشده است، رفتار غیرارگودیک برای فرآیند قابل مشاهده است. درحالی که میانگین زمانی از یک رابطه خطی نسبت به گام زمانی به سمت یک ناحیه تخت تغییر رفتار می‌دهد؛ تابعیت توانی میانگین هنگردی به شکل یک تابع نزولی برای زیرپخش (یا صعودی برای فوایپخش) تغییر می‌کند. با وارد کردن t_a به مقداری محدود، میانگین زمانی تغییر چندانی ندارد، در صورتی که میانگین هنگردی فرم توانی خود در زمان‌های بزرگ را کمی از دست داده است که در نمودار میانی دیده می‌شود. تغییر رفتار اساسی برای مورد t_a ‌های بسیار بزرگ رخ می‌دهد، نمودار سوم در شکل (۸.۴). می‌بینیم که میانگین هنگردی کاملاً بر میانگین زمانی منطبق شده و سیستم



شکل ۸.۴: میانگین هنگردی و زمانی *MSD* برای *SBM* مقید با نمای $\alpha = 1/2$ برای سه حالت مختلف t_a : الف) $(t_a = 0)$ ، ب) مقدار ضعیف ($t_a = 10^{-1}$) و ج) مقدار بسیار بزرگ ($t_a = 10^6$). زمان مشاهده $t = 5 \times 10^4$ در نظر گرفته شده است [۱۰۱].



شکل ۹.۴: میانگین هنگردی و زمانی *MSD* برای *SBM* مقید با نمای $\alpha = 3/2$ و $t_a = 10^6$. زمان مشاهده $t = 5 \times 10^4$ در نظر گرفته شده است [۱۰۱].

رفتار ارگودیک از خود نشان می‌دهد. مورد t_a بسیار بزرگ برای فرایخس نیز در شکل (۹.۴) دیده می‌شود. تفاوت بسیار جزئی در این دو کمیت و همگرایی آن‌ها در انتهای سری در شکل (۱۰.۴) برای دو مقدار مختلف از شدت میدان مشاهده می‌شود.

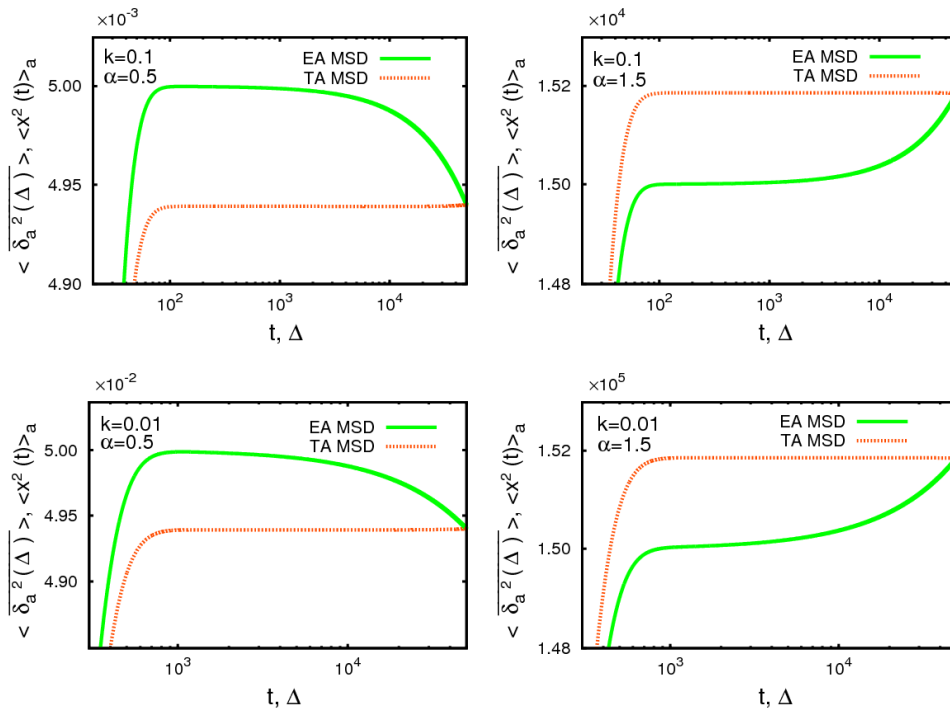
۲.۲.۴ زمان اولین عبور با حضور نقش گذشته

در (۳.۱.۲) به اهمیت آمار زمان اولین عبور و نحوه استخراج آن اشاره شد. در این بخش به مطالعه اثر t_a بر این آمار می‌پردازیم. با وارد کردن اثر دینامیک سیستم در بازه $[0, t_a]$ ، *PDF* زمان اولین عبور از حل معادله پخس *SBM* با ضریب وابسته به زمان $K_\alpha(t)$ حاصل می‌شود،

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = K(t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t), \quad (39.4)$$

که شرط اولیه وابسته به زمان t_a ،

$$P_0(x, t_a) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_\alpha^* t_a^\alpha}} e^{-x^2 / (4K_\alpha^* t_a^\alpha)}, \quad (40.4)$$



شکل ۱۰.۴: همگرایی میانگین زمانی و میانگین هنگردی *MSD* برای *SBM* مقید در حد $t \rightarrow \Delta$ برای دو نمای $\alpha = 1/2$ (چپ) و $\alpha = 3/2$ (راست) برای شدت‌های مختلف میدان و $t_a = 10^6$ [۱۰۱].

است. همچنین در محاسبات این بخش، t نشان دهنده فاصله‌ی زمانی نسبت به زمان t_a است. برای حل این معادله، بر دو سمت آن تبدیل فوریه اعمال می‌کنیم و پس از حل معادله حاصل بر حسب زمان، تبدیل عکس فوریه انجام می‌دهیم،

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} P(k, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} e^{-k^\nu K_\alpha^*(t_a^\alpha + t^\alpha)}. \quad (۴۱.۴)$$

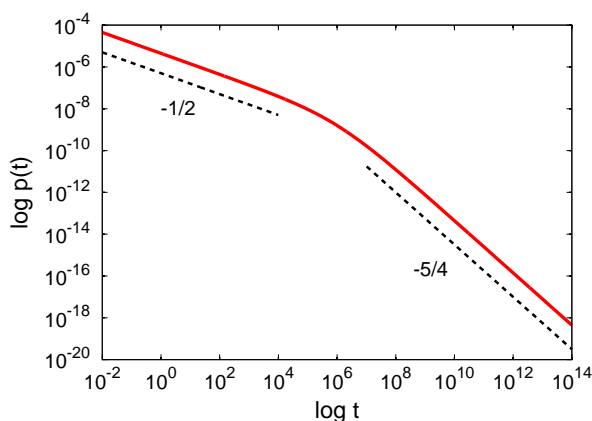
در نتیجه خواهیم داشت،

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\nu \pi K_\alpha^*(t_a^\alpha + t^\alpha)}} e^{-x^\nu / \nu K_\alpha^*(t_a^\alpha + t^\alpha)}. \quad (۴۲.۴)$$

با داشتن *PDF*، از روش تصویر برای به دست آوردن احتمال بقا^۱ در نیم فضای مثبت $x > 0$ استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب،

$$S(t) = \int_0^\infty [P(x - x_0, t) - P(x + x_0, t)] dx, \quad (۴۳.۴)$$

^۱ Survival Probability



شکل ۱۱.۴: چگالی زمان اولین عبور $\varphi(t)$ برای نمای $\alpha = 1/2$ با مقادیر ثابت $x_0 = 1$ و $t_a = 10^6$. خط چین نشان دهنده تغییر شیب از $-1/2$ به $-5/4$ است [۱۰۱].

خواهیم داشت،

$$S(t) = \operatorname{erf} \left(\frac{x_0}{\sqrt{4K_\alpha^*(t_a^\alpha + t^\alpha)}} \right). \quad (44.4)$$

این نتیجه برحسب تابع خطا حاصل شده است. PDF زمان اولین عبور از رابطه $\varphi(t) = -dS(t)/dt$ تبعیت می‌کند،

$$\varphi(t) = \frac{\alpha x_0 t^{\alpha-1}}{\sqrt{4\pi K_\alpha^*(t_a^\alpha + t^\alpha)}} \exp \left(-\frac{x_0^2}{4K_\alpha^*(t_a^\alpha + t^\alpha)} \right). \quad (45.4)$$

به ازای $\alpha = 1$ و زمان $t_a = 0$ تابع توزیع لوی-اسمیرنوف^۱ به دست می‌آید. اما نتیجه کلی فوق بسته به شدت t_a رفتار متفاوتی دارد،

$$\varphi \simeq \frac{\alpha x_0}{\sqrt{4\pi K_\alpha^*}} \times \begin{cases} t_a^{-3\alpha/2} t^{\alpha-1}, & t_a \gg t, (x_0^2/[4K_\alpha^*])^{1/\alpha} \\ t^{-1-\alpha/2}, & t \gg t_a, (x_0^2/[4K_\alpha^*])^{1/\alpha} \end{cases}. \quad (46.4)$$

برای t_a های بزرگ، نسبت به زمان t رابطه توانی با نمای $(1 - \alpha)$ برقرار است و زمان آماده‌سازی سیستم با توان α اثر گذاشته است. با افزایش زمان t_a ، رفتار توانی با زمان تغییر نما به $(1 + \alpha/2)$ را نشان می‌دهد، همان‌طور که در فرآیند زیرپخش CTRW نیز در مرجع ([۱۳۷]) مشاهده می‌شود. این تغییر رفتار در شکل (۱۱.۴) دیده می‌شود.

^۱ Levy-Smirnov distribution

فصل پنجم

تئوری پراکندگی کیرشهف

۱.۵ پراکندگی از سطوح زبر

با تقریب خوبی می‌توان تمام سطوح موجود در طبیعت را صاف دانست و زبری مهمترین عامل تاثیرگذار بر پراکندگی امواج الکترومغناطیسی^۱ (EM) است. زبری خصلت ذاتی سطح پراکننده نیست، بلکه به ویژگی‌های موج پراکنده شده بستگی دارد. طول موج (k) و زاویه فرودی موج تابیده شده θ از جمله معیارهای تعیین کننده میزان صافی یا زبری سطح هستند. در واقع رابطه میان طول موج فرودی و پارامتر زبری سطح (σ) با $(k\sigma)$ بیان می‌شود. بنابراین با افزایش طول موج، زبری کاهش می‌یابد. در نتیجه، طول موج تابیده بر یک سطح، معیاری جهت تعیین زبری سطح می‌باشد، $k = 2\pi/\lambda$. همچنین، زاویه فرود نیز نقش بسزایی بر میزان زبری سطح دارد، به این صورت که در پراکندگی در نواحی نزدیک^۲، سطح زبرتر به نظر می‌رسد، نسبت به حالت پراکندگی در نواحی دورتر^۳.

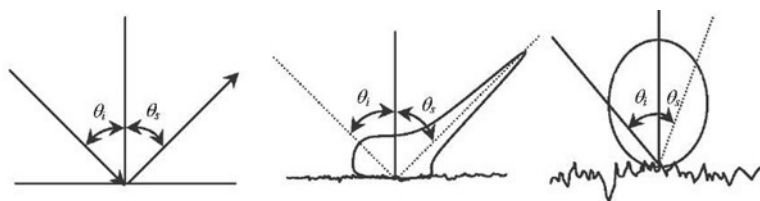
در مورد یک سطح صاف، چگونگی بازتاب توسط قوانین بازتاب فرسnel^۴ بیان می‌شود. این قوانین، توصیف کننده بازتاب یک موج عبوری از فصل مشترک میان دو محیط دی‌الکتریک هستند. ضریب فرسnel، Γ ، تابعی است از زاویه فرود θ ، زاویه

^۱ Electromagnetic Waves

^۲ The Near Field of The Propagation

^۳ The Far Field

^۴ Fresnel Reflectivity



شکل ۱.۵: سهم هر یک از مولفه‌های پراکندگی برای سطوح با درجات مختلف زیری

بازتاب θ' و ثابت دی‌الکتریک پراکننده، n .

$$\Gamma_h = \frac{\mu \cos(\theta) - \sqrt{\mu \epsilon - \sin^2(\theta)}}{\mu \cos(\theta) + \sqrt{\mu \epsilon - \sin^2(\theta)}}, \quad \Gamma_v = \frac{\epsilon \cos(\theta) - \sqrt{\mu \epsilon - \sin^2(\theta)}}{\epsilon \cos(\theta) + \sqrt{\mu \epsilon - \sin^2(\theta)}}. \quad (1.5)$$

Γ_v و Γ_h به ترتیب مربوط به قطبش افقی و عمودی موج (EM) هستند و μ برای محیط‌های غیرفرومغناطیس است برای سطوح خنثی مقدار آن واحد است. با افزایش زاویه فرود، قطبش افقی بیشتر می‌شود. از طرفی قطبش عمودی کاهش می‌یابد و در زاویه‌ی بروستر^۱ (زاویه‌ای که در آن موج عبوری کاملاً توسط محیط دی‌الکتریک جذب می‌شود) مقدار آن صفر می‌شود، اما با افزایش بیشتر زاویه‌ی فرودی ناگهان افزایش می‌یابد.

اما با ثابت در نظر گرفتن طول موج و زاویه فرود، می‌توان در مورد برهمکنش موج (EM) با یک سطح زیر در حالت کلی چنین گفت که، هرچه سطح زیرتر باشد پراکندگی ناهمدوس بیشتر است و برای سطح صاف‌تر، پراکندگی همدوس غالب خواهد بود. قوانین فرسnel که به آن اشاره شد، برای یک سطح مشترک کاملاً صاف است. اما در دنیای واقعی سطوح از نظر درجه زیری طیف وسیعی دارند. موج پراکنده شده از یک سطح زیر شامل دو مولفه است، سهم بازتابیده یا همدوس^۲ و سهم پراکنده شده یا ناهمدوس^۳. مولفه همدوس نظیر بازتاب از یک سطح صاف عمل می‌کند. مولفه ناهمدوس یک پراکنده‌ی پخش‌ی است و توان تابشی را در تمام جهت‌ها پخش می‌کند. هرچه سطح زیرتر شود، سهم همدوس بیشتر قابل صرف نظر خواهد بود و سهم ناهمدوس فقط شامل پراکندگی پخش‌ی می‌شود. دو معیار اساسی برای تعریف میزان صافی یک سطح وجود دارد، معیارهای رایلی^۴ و فرانهوفر^۵. موج تخت تک‌فامی را در نظر می‌گیریم که با زاویه θ ، به سطحی زیر فرود می‌آید (شکل (۱.۵)). می‌توان به‌سادگی اختلاف فاز $\delta\phi$ میان دو پرتوی بازتابیده از دو نقطه متفاوت از سطح را

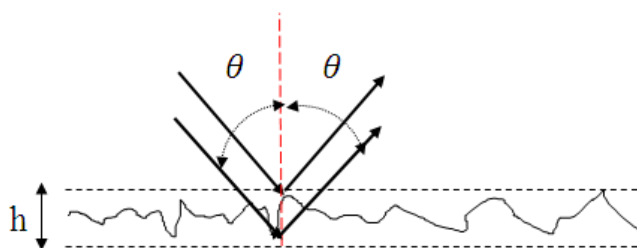
^۱ Brewster Angle

^۲ The Reflected or Coherent

^۳ The Scattered or Incoherent

^۴ Rayleigh

^۵ Fraunhofer



شکل ۲.۵: این نمودار نشان‌دهنده اختلاف فاز میان دو پرتو موج موازی پراکنده شده از نقاط متفاوت از یک سطح زیر است.

محاسبه نمود،

$$\Delta\phi = 2h \frac{2\pi}{\lambda} \cos(\theta), \quad (2.5)$$

در این رابطه h انحراف معیار مربوط به ارتفاع زبری‌ها نسبت به یک سطح مرجع است و θ زاویه فرود پرتو بر سطح است. معیار رایلی بیان می‌کند که اگر اختلاف فاز $\Delta\phi$ میان دو پرتو بازتابیده کوچک‌تر از $\pi/2$ باشد، می‌توان آن سطح را یک سطح صاف دانست و رابطه‌ی،

$$h < \frac{\lambda}{\lambda \cos(\theta)}. \quad (3.5)$$

برای آن برقرار است. معیار دقیق‌تر و مناسب‌تر برای امواج (EM) توسط اولابی^۱ [۱۳۸] مطرح شد و معیار فرانهورفر نام دارد. این معیار سطح را صاف می‌دانند اگر این اختلاف فاز $\Delta\phi < \pi/8$ باشد،

$$h < \frac{\lambda}{32 \cos(\theta)}. \quad (4.5)$$

^۱ Ulaby

۲.۵ مدل‌های تئوری پراکندگی

پراکندگی امواج از سطوح زبر بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است. بررسی‌های تجربی فراوانی صورت گرفته و رهیافت‌های مختلفی برای تحلیل نتایج تجربی ارائه گردیده است. برغم تمام تلاش‌های صورت گرفته، هنوز مساله پراکندگی از سطوح زبر به صورت تحلیلی حل کامل ندارد. روش‌های ارائه شده تقریبی و قابل اعمال برای موارد خاص بوده و اغلب به صورت عددی حل می‌شوند.

از جمله اولین مدل‌های ریاضیاتی ارائه شده توسط لرد رایلی [۱۳۹] در ۱۸۷۷ بود که معیار رایلی برای تعیین زبری سطح را معرفی می‌کند. در دهه پنجاه، پراکندگی از سطح زبر توسط فاینبرگ^۱ (۱۹۴۶-۱۹۴۴) [۱۴۰] گسترش یافت. او به بررسی مولفه همدوس امواج الکترومغناطیسی پراکنده شده به ازای مقدار کوچک ناهمواری‌ها پرداخت. رایس^۲ (۱۹۵۱) تئوری برداری اختلالش را برای پراکندگی امواج الکترومغناطیسی از یک سطح زبر تصادفی دو بعدی بکار برد [۱۴۱] و دیویس^۳ در (۱۹۵۴) [۱۴۲] تئوری مشابهی برای امواج اسکالر ارائه داد. در ادامه^۴ [۱۴۳-۱۴۵] تقریب صفحه مماس کیرششف^۵ ارائه شد. اما همان‌طور که قبلاً هم بیان شد، اگرچه مساله پراکندگی از سطوح زبر تصادفی مدت‌ها مورد توجه گسترده بوده، اما هنوز هیچ پاسخ رضایت‌بخشی برای آن ارائه نشده و جواب بسته ندارد. در حال حاضر در مواجهه با مسایل موجود در این زمینه روش‌های تقریبی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جمله پرکاربردترین این روش‌ها انتگرال کیرششف (KA) [۱۴۶، ۱۴۷] است که محاسبات این بخش بر پایه‌ی این تقریب صورت گرفته است.

تقریب کیرششف زمانی معتبر است که ابعاد زبری سطح در مقایسه با طول موج بزرگ باشد. بنابراین مناسب مواردی است که طول موج کوتاه باشد، مانند نوارهای X یا C و یا برای طول همبستگی سطح بلند برد $(kl > 6)$. در این مورد، می‌توان پراکندگی از یک نقطه از سطح را همانند پراکندگی از یک صفحه‌ی صاف مماس بر سطح در آن نقطه فرض نمود. حتی با اعمال این تقریب نیز نمی‌توان پاسخ تحلیلی برای مساله یافت و نیازمند وارد کردن فرض‌های بیشتری هستیم.

تقریب کیرششف بر پایه یک انتگرال بنا می‌شود که میدان پراکنده شده را در یک فاصله‌ی معین از سطح پراکنده بر حسب تقریبی از میدان روی سطح می‌دهد [۱۴۸]. این انتگرال بستگی به ماهیت میدان موج دارد، این که آکوستیک^۶، الاستیک^۷

^۱ Feinberg

^۲ Rice

^۳ Davies

^۴ ANTOKOL'SKII (1948), BREKHOVSKIKH (1951) and ISAKOVICH (1952)

^۵ The Kirchhoff Tangent Plane Approximation

^۶ Elastic

^۷ Acoustic

یا الکترومغناطیسی باشد. ساده‌ترین فرم انتگرال که محاسبات این فصل بر اساس آن صورت می‌گیرد، با فرض فرود یک موج تخت تکفام^۱ و اسکالر بر سطح زبری که ضریب بازتاب آن مستقل از مکان است، شکل می‌گیرد. تئوری اسکالر کیرشهف برای امواج آکوستیک و الکترومغناطیسی که هیچ‌گونه جفت‌شدگی میان مولفه‌های قطبش وجود ندارد، مناسب است. مطالعات این فصل با فرض آکوستیک بودن میدان فرودی است. اندازه میدان با ψ نشان داده می‌شود.

در حضور یک عامل پراکننده، میدان کل ψ ، از دو قسمت تشکیل می‌شود، میدان تابشی، ψ^{inc} ، و میدان حاصل از برهمکنش موج فرودی با عامل پراکننده ψ^{sc} ،

$$\psi(r) = \psi^{inc}(r) + \psi^{sc}(r). \quad (5.5)$$

میدان کل در هر نقطه‌ی r بر روی سطح با استفاده از رابطه پراکندگی هلمهولتز^۲ حاصل می‌شود،

$$\psi(r) = \psi^{sc}(r) + \int_{A_0} \left[\psi^{sc}(r_0) \frac{\partial G(r, r_0)}{\partial n_0} - G(r, r_0) \frac{\partial \psi^{sc}(r_0)}{\partial n_0} \right] dA_0. \quad (6.5)$$

در این رابطه، انتگرال بر روی سطح A_0 انجام می‌شود و n_0 خط عمود بر سطح به سمت منبع بوده و $G(r, r_0)$ تابع گرینی^۳ است که اثر نیروی وارد بر نقطه‌ی r را در نقطه‌ی r_0 نشان می‌دهد. برای پراکندگی از یک سطح با ابعاد محدود، تابع گرین فضای کامل به صورت،

$$G(r, r_0) = \frac{\exp(ik|r - r_0|)}{4\pi|r - r_0|}, \quad (7.5)$$

است. r_0 نقطه‌ای بر روی سطح زبر و r فاصله نسبت به آن است. برای سطح بسته‌ی A_0 ، می‌توان در عبارت داخل انتگرال، بجای میدان پراکنده شده از میدان کل استفاده کرد، چرا که سهم مربوط به میدان فرودی صفر است. بنابراین میدان پراکنده شده را به این صورت به دست می‌آوریم [۱۴۸]،

$$\psi^{sc}(r) = \psi(r) - \psi^{inc}(r) = \int_{A_0} \left[\psi(r_0) \frac{\partial G(r, r_0)}{\partial n_0} - G(r, r_0) \frac{\partial \psi(r_0)}{\partial n_0} \right] dA_0.$$

^۱ Monochromatic Plane Wave

^۲ Helmholtz Scattering Formula

^۳ Green Function

جهت محاسبه انتگرال فوق نیازمند میدان و مشتق آن بر روی سطح هستیم. در این جا تئوری کیرشهف برای پراکندگی از سطح زیر تصادفی را در رژیم ناحیه دور و برای موج فرودی تخت و تکفام، $\psi^{inc}(r) = \exp(-ik_{inc} \cdot r)$ ، با بردار موج k در مکان r ، تحت شرایط مرزی دیریکله، $R_o = -1$ ، و این فرض که هیچ نقطه‌ای بر روی سطح دارای گرادیان بی‌نهایت نیست، در نظرمی‌گیریم. در این صورت شدت کل میدان پراکنده شده، $\psi^{sc}(r)$ ، بر روی سطح مورد بررسی، A_o ، به این صورت خواهد بود [۱۴۸]،

$$\psi^{sc}(r) = \frac{ike^{ikr}}{4\pi r} \int_{A_o} \left(a \frac{\partial h}{\partial x_o} + b \frac{\partial h}{\partial y_o} - c \right) \times \exp(ik[Ax_o + By_o + Ch(x_o, y_o)]) dx_o dy_o, \quad (۸.۵)$$

که ثابت‌های موجود در رابطه به این صورت هستند،

$$A = \sin \theta_1 - \sin \theta_2 \cos \theta_3,$$

$$B = -\sin \theta_2 \sin \theta_3,$$

$$C = -(\cos \theta_1 + \cos \theta_2),$$

$$a = \sin \theta_1 (1 - R_o) + \sin \theta_2 \cos \theta_3 (1 + R_o),$$

$$b = \sin \theta_2 \sin \theta_3 (1 + R_o),$$

$$c = \cos \theta_2 (1 + R_o) - \cos \theta_1 (1 - R_o). \quad (۹.۵)$$

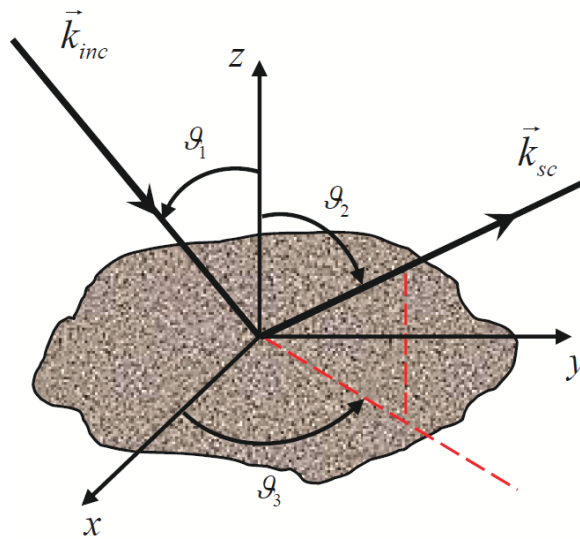
شکل (۳.۵) به صورت شماتیک هندسه مساله را نشان می‌دهد. جهت مطالعه جزئیات بیشتر در مورد محاسبات فوق می‌توان به منبع [۱۴۸] مراجعه نمود. در مطالعه پدیده پراکندگی، کمیت مناسب‌تر جهت بررسی شدت کل میدان پراکندگی است، که کمیتی قابل مشاهده است و از دو قسمت همدوس (I_{coh}) برای بازتاب آینه‌ای و پخشی (I_d) تشکیل شده است،

$$I_{tot} = I_{coh} + I_d = \langle \psi^{sc}(r) \psi^{sc*}(r) \rangle. \quad (۱۰.۵)$$

شدت همدوس،

$$I_{coh} = \langle \psi^{sc} \rangle \langle \psi^{sc*} \rangle = e^{-g} I. \quad (۱۱.۵)$$

تابعی است از واریانس سطح $g = k^2 C^2 \sigma^2$. I_o شدت میدان همدوس پراکنده شده از یک سطح کاملاً صاف است. سهم



شکل ۳.۵: شکل شماتیک نشان دهنده هندسه بکار رفته در بررسی مساله پراکندگی موج تخت از سطح زبر.

پخش شدت کل،

$$\begin{aligned} \langle I_d \rangle &= \langle \psi^{sc} \psi^{sc*} \rangle - \langle \psi^{sc} \rangle \langle \psi^{sc*} \rangle \\ &= \frac{A_M k^2 F^2}{2\pi r^2} e^{-g} \int_0^\infty J_0(kR\sqrt{A^2+B^2}) [e^{gCor(R)} - 1] R dR \end{aligned} \quad (12.5)$$

بر حسب تابع همبستگی ارتفاع سطح،

$$Cor(R) = \frac{\langle (h(x+R) - \bar{h})(h(x) - \bar{h}) \rangle}{\sigma^2} \quad (13.5)$$

به دست می آید. \bar{h} ارتفاع میانگین سطح است.

۳.۵ پدیده پراکندگی از سطوح خودمتناسب

یک شکل هندسی یا شی طبیعی فراکتال است در صورتی که دارای چند ویژگی باشد: اول این که اجزای کوچک آن ساختاری همانند کل شکل را دارند، تنها تفاوت در مقیاس مشاهده آن هاست. به بیانی دیگر خودمتشابه هستند. دوم، مستقل از مقیاس مشاهده، شکل آن ها کاملاً نامنظم یا به شدت گسسته و منقطع است. و سوم این که دارای ویژگی های بارزی است

که بر روی طیف مقیاسی وسیعی تغییر می‌کنند [۱۴۹]. از جمله ویژگی‌های مهم در فراکتال‌ها این است که بعد فراکتالی^۱ غیر صحیحی، d_f ، دارند. این بعد در واقع نحوه‌ی وابستگی یک کمیت را به مقیاسی که در آن مورد مشاهده قرار گرفته، نشان می‌دهد. روش‌های زیادی برای محاسبه بعد فراکتالی وجود دارد که برای اطلاعات بیشتر می‌توان مراجع [۱۵۱، ۱۵۰] را مطالعه نمود.

برخی از فراکتال‌ها دارای ویژگی خودمتناسبی^۲ هستند. یعنی، با تغییر مقیاس‌های متفاوت در جهت‌های مختلف، شکل نهایی مشابه حالت اولیه است. این شکل ناهمگن برای ناوردایی مقیاسی، خودمتناسبی نامیده می‌شود. به عنوان نمونه، اگر شی فراکتالی در راستای محور x ، a برابر شود،

$$x \rightarrow ax, \quad (14.5)$$

در راستای y باید به صورت،

$$y(x) = a^{-H}y(ax), \quad (15.5)$$

تغییر کند، تا شکل اولیه حاصل شود. نمای رابطه مقیاسی، نمای هارست، H ، نام دارد که معیاری از زبری سطح می‌باشد. نمای هارست با بعد فراکتالی رابطه $H = d - d_f$ دارد، که d بعد فضای دربرگیرنده‌ی شی فراکتالی است. به عنوان مثال برای یک سطح^۲ است.

اما نمای زبری به تنهایی نمی‌تواند اطلاعات کاملی در مورد میزان افت و خیزهای سطح بدهد. تابع همبستگی ارتفاع^۳ نیز کمیت مهم دیگر در توصیف ناهمواری سطح است. از این رو، در همبستگی‌های کوتاه برد، زبری سطح توسط انحراف معیار ارتفاع و طول همبستگی^۴ مشخص می‌شود. تابع همبستگی برای سطوح خودمتناسب طبق پیشنهاد سینها^۵ [۱۵۲] از یک رابطه‌ی نمایی پیروی می‌کند،

$$Cor(R) \approx e^{-\left(\frac{R}{\xi}\right)^{2H}}. \quad (16.5)$$

^۱ Fractal Dimension

^۲ Self-Affine surface

^۳ Height-Height Correlation Function

^۴ Correlation Length

^۵ Sinha

ξ طول همبستگی است و به همراه نمای هارست این که یک نقطه تا چه مسافتی می تواند ارتفاع نقطه آغازین حرکت خود را به خاطر آورد، کنترل می کند [۱۵۳]. این نوع تابعیت قادر است حالت های حدی مناسب برای تابع همبستگی ارائه دهد. به عبارتی، برای $\xi \gg R$ به صفر میل می کند و برای $\xi \ll R$ به صورت توانی، $Cor(R) \simeq 1 - \left(\frac{R}{\xi}\right)^{2H}$ ، است. $0 < H < 1$ است که نمای هارست بزرگتر نشان دهنده افت و خیزهای کوچک تر یا به عبارتی سطحی صاف تر است.

۴.۵ پدیده پراکندگی در رهیافت ریاضیات کسری

از نگاه ناظر ساکن در فضایی فراکتالی با بعد غیر صحیح، فضای پیرامون محیطی تخت و صاف می باشد و افت و خیزی در سطح مشاهده نمی شود [۱۵۴]. در واقع با قرار گرفتن در فضای یک فراکتال، آثار ناشی از افت و خیزهای سطح در بعد فراکتالی سطح وارد می شوند. به این ترتیب، با در نظر گرفتن این فضا، انتگرال (۸.۵) را بجای دو بعدی برای فضایی با بعد فراکتالی α تعریف می کنیم. انتگرال مورد استفاده برای این منظور، انتگرال ریمان-لیوویل بر روی ناحیه S در فضایی با بعد α خواهد بود. از آنجا که این ناحیه نشان دهنده افت و خیزهای سطح دوبعدی است، بازه تغییرات $2 < \alpha < 3$ است که $\alpha = 2$ سطح صاف ایده آل را نشان می دهد و $\alpha = 3$ بعد سطحی کاملاً زبر است. حال با توجه به از بین رفتن آثار ناهمواری ها، $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y} = 0$ ، انتگرال فوق صورتی ساده تر خواهد داشت. بدون کاستن از کلیت مساله شرط ساده کننده $\theta_3 = 0$ را لحاظ می کنیم که تابش و پراکندگی را در یک صفحه محدود می کند. در نهایت به انتگرال،

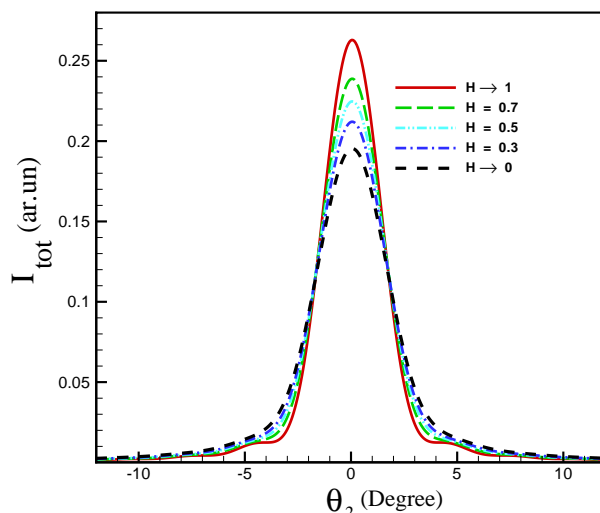
$$\psi^{sc}(r) = \frac{i(-c)ke^{ikr}}{4\pi r} \int_{S_0} \exp(ikAs) d^\alpha s, \quad (17.5)$$

بر روی یک موج تخت می رسمیم. حال می بایست این انتگرال کسری محاسبه شود.

با استفاده از تعاریف موجود در ریاضیات کسری، این نتیجه بر اساس تابع میتاگ-لفلر (۱۷.۳) بیان می شود. از ریاضیات کسری می دانیم که انتگرال کسری تابع نمایی به صورت،

$$D_x^{-\alpha} e^{mx} = x^\alpha e^{mx} \gamma^*(\alpha, mx) = E_x(\alpha, m), \quad (18.5)$$

است [۱۱۳]. در این رابطه $D_x^{-\alpha}$ انتگرال ریمان-لیوویل مرتبه α است و x متغیر انتگرال گیری می باشد. ثابت دلخواه



شکل ۴.۵: تغییرات شدت کل میدان پراکنده شده، I_{tot} ، برحسب زاویه پراکندگی، θ_2 ، به ازای مقادیر مختلف نمای هارست. زاویه فرودی عمودی در نظر گرفته شده و طول موج $\lambda = 500 \text{ nm}$ است [۱۵۶].

m می‌تواند مقداری مختلط نیز داشته باشد. نمایش فوق بر حسب تابع گامای ناکامل است،

$$\gamma^*(\alpha, mx) = \frac{1}{(mx)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{mx} \xi^{\alpha-1} e^{-\xi} d\xi. \quad (19.5)$$

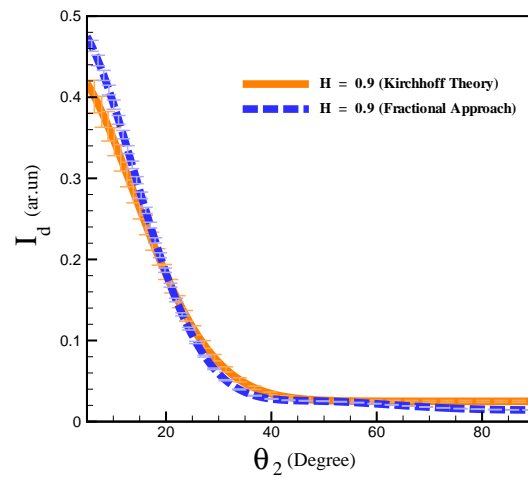
در رابطه‌ی (۱۸.۵)، $E_x(\alpha, m)$ تابع میلر-راس^۱ است که به صورت،

$$E_x(\alpha, m) = x^\alpha E_{1, \alpha+1}(mx), \quad (20.5)$$

با تابع میتاگ-لفلر در ارتباط است.

شکل (۴.۵) شدت حاصل از انتگرال (۱۷.۵) را به ازای مقادیر مختلف برای نمای هارست نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که شدت کل در زاویه‌ی آینه‌ای پیک شدیدی دارد. از آنجا که سهم شدت در این زاویه مربوط به شدت همدوس است، این نتیجه حاکی از این واقعیت است که تقریباً تمام پرتوی تابیده شده به سطح در زاویه آینه‌ای بازتابیده شده و سهم ناهمدوس که متعلق به شدت پخشی است، بسیار ناچیز است. بنابراین ملاحظه می‌شود که نتیجه محاسبه پراکندگی در فضای فراکتالی با بعد غیر صحیح، یک بازتاب ساده است. همچنین از این شکل پیداست که با کاهش نمای هارست که به معنای افزایش زبری سطح و در نتیجه افزایش بعد سطح در فضای کسری است، شدت پیک در زاویه آینه‌ای کاهش می‌یابد

^۱ Miller-Ross Function



شکل ۵.۵: مقایسه شدت پخش می‌دانه پراکنده شده از سطح زیر با نمای هارست $H = 0.9$ ، حاصل از رهیافت انتگرال کسری [۱۵۶] و نتیجه حل انتگرال کیرشهف در مرجع ([۱۵۵]).

و سهم ناهمدوس در زوایای دورتر از آینه‌ای افزایش می‌یابد. این نتیجه در توافق خوبی با نتیجه‌ی حاصل از حل عددی تقریب کیرشهف در مرجع ([۱۵۵]) است. تغییرات شدت ناهمدوس (شدت کل در زوایای غیر آینه‌ای) در شکل (۵.۵) برای دو رهیافت با هم مقایسه شده است.

فصل ششم

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

فرآیندهای پخش غیرعادی که در بسیاری از محیط‌های ناهمگن و بی‌نظم رخ می‌دهند، نتیجه عدم دسترسی کامل به فضا هستند. این فرآیندها توسط مدل‌هایی با مکانیزم فیزیکی متفاوت توصیف می‌شوند. شناخت ویژگی‌های آماری هر یک از این مکانیزم‌ها در شناخت بهتر فرآیندهای پخش غیرعادی در محیط‌های مختلف، دارای اهمیت بالایی است. حرکت بروانی بازمقیاس شده SBM از جمله مکانیزم‌هایی است که به دلیل گاوسی بودن، کاربرد فراوانی در مدل کردن پخش غیرعادی دارد. به علت ناپایا بودن فرآیند، زمان شروع تحولات سیستم در دینامیک آن تاثیرگذار است؛ در نتیجه دانستن دینامیک مربوط به بازه زمانی میان شروع تحولات سیستم و شروع نمونه‌برداری از داده‌ها، که با t_a نشان داده می‌شود، جهت توصیف درست فرآیند الزامی است. در این رساله نقش دینامیک سیستم در این بازه زمانی بر رفتار ارگودیسیتی و نیز آمار مدت زمان اولین عبور مورد مطالعه قرار گرفته است. SBM برای $t_a = 0$ رفتار غیرارگودیک دارد، بدین معنا که میانگین زمانی و هنگردی برای میانگین مربع جابجایی‌ها MSD از یکدیگر متفاوت هستند. اما برطبق نتایج حاصل، تحولات گذشته سیستم نقش موثری بر این رفتار دارد و به‌ویژه میانگین هنگردی را دستخوش تغییر چشمگیری می‌کند. این رفتار در مورد حرکت بروانی زمان پیوسته‌ی زیرپخش $CTRW$ با توزیع‌های زمانی ناوردای مقیاسی و همچنین نتایج مربوط به فرآیندهای پخش در محیط‌های ناهمگن است که ضریب پخش آن‌ها به‌صورت توانی با مکان متناسب است. در حالتی که t_a خیلی بزرگ باشد، سیستم دوباره رفتار ارگودیک پیدا می‌کند. بررسی این موارد بر روی SBM مقید به پتانسل هارمونیک، نشان از رفتار منحصر به فرد سیستم در این حالت دارد. به‌طوری که برخلاف حرکت بروانی کسری FBM ، در حالتی که اثر گذشته بسیار دور را وارد کنیم، $t_a \gg t$ ، میانگین هنگردی MSD همانند میانگین زمانی به یک ناحیه تخت میل می‌کند. بدون وارد کردن این اثر، بدلیل وابستگی ضریب پخش به زمان که نقش دما را ایفا می‌کند، امکان رسیدن میانگین هنگردی

به یک مقدار ثابت وجود ندارد، بنابراین این کمیت برای زیر (فرا) پخش همواره نزولی (صعودی) خواهد بود. در $CTRW$ مقید، میانگین هنگردی به یک مقدار ثابت میل می‌کند اما میانگین زمانی رابطه توانی با زمان دارد. همچنین، چگالی زمان اولین عبور که آمار رسیدن ذره برای اولین بار به یک موضع مشخص را نشان می‌دهد، تحت اثر دینامیک گذشته، رفتاری دومقیاسی وابسته به زمان t_a دارد. رفتاری متفاوت با FBM بدون وارد کردن اثرات گذشته.

به طور خلاصه می‌توان نتیجه گرفت که عدم دسترسی به شرایط اولیه سیستم بر خصلت ارگودیسیتی آن اثر گذار است و منجر به تخمین نادرست از دینامیک سیستم می‌شود. در صورتی که زمان مشاهده و اندازه‌گیری در مقایسه با بازه میان شروع تحولات سیستم و شروع نمونه‌برداری بسیار کوچک باشد، اطلاعات بی‌نظمی‌های بازه‌ی اولیه نامعلوم بوده و در محاسبات وارد نمی‌شود و در نتیجه سیستم رفتار ارگودیک نشان می‌دهد. در واقع سیستم به صورت موضعی و بدون توجه به گذشته بلند آن بررسی شده است. اما در صورتی که این بازه‌ی اولیه نزدیک صفر باشد، اطلاعات زمانی کامل سیستم در اختیار است و رفتار غیرارگودیک در آن مشاهده می‌شود. هر چند که غیر صفر بودن این بازه‌ی اولیه حتی به میزان بسیار کم بر رفتار ارگودیک سیستم تاثیرگذار است و برای مشخصه‌یابی درست سیستم باید حضور آن در محاسبات لحاظ شود.

علاوه بر این‌ها، پارامتر شکست ارگودیسیتی EB که نشان دهنده افت و خیزهای میانگین زمانی MSD حول مقدار میانگینشان است، برای SBM نامقید در / و بدون حضور اثر تحولات گذشته مورد بررسی قرار گرفته است. رفتار دقیق این کمیت به صورت تئوری و با استفاده از شبیه‌سازی برای نماهای مختلف وابستگی به زمان و نیز برحسب پارامترهای مختلف سیستم (از جمله زمان تاخیری، زمان مشاهده و زمان t_a) به دست آمد. در بررسی‌های قبلی انجام شده در این فرآیند که با اعمال تقریب‌هایی صورت گرفته بود، برای پارامتر شکست ارگودیسیتی در نمای $\alpha = 1/2$ تکینگی گزارش شده بود. اما طبق نتایج این رساله، پارامتر EB رفتار پیوسته‌ای نسبت به نمای α دارد. در نتایج گزارش شده برای حرکت بروانی کسری FBM ، یک واگرایی در نمای هارست $H = 3/4$ مشاهده می‌شود. پیشنهاد می‌شود، رهیافت ارائه شده در این رساله در مورد FBM نیز به کار برد تا رفتار دقیق پارامتر EB حاصل شود. همچنین در محاسبه پارامتر EB برای حرکت لوی نیز باید در مورد $\alpha_L \rightarrow 1$ دقت کافی به عمل آید. در این مورد نیز با توجه به محاسبات این رساله، پیشنهاد می‌شود جملات مراتب بزرگ‌تر در میانگین هنگردی و میانگین زمانی MSD مورد مطالعه قرار گیرند.

بسیاری از خواص حرکت بروانی بازمقیاس شده، حرکت بروانی زمان پیوسته، فرآیندهای پخش ناهمگن تحت وارد کردن نقش دینامیک گذشته، رفتار مشابهی دارند. در مورد حرکت بروانی کسری که فرآیندی ارگودیک است، تحت اعمال میدان خارجی رفتار غیرارگودیک نشان می‌دهد. برای تمییز بهتر این مدل‌ها از یکدیگر همچنان نیاز است تا کمیت‌های بیشتری در مورد این مدل‌ها مورد مطالعه قرار گیرند تا رفتار خاص هر مدل شناخته شود. از جمله بررسی معادله لانژوین حاکم بر دینامیک فرآیند SBM در حالتی با میرایی کند که معادله تصادفی درجه دوم است، جهت بررسی بیشتر در حال انجام

است.

پیوست الف

الف. ۱ توزیع لوی و نمایش دقیق آن بر حسب توابع فاکس

فرم تحلیلی برای یک قانون پایدار از طریق تابع فاکس [۱۲۴] بیان می‌شود،

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \varepsilon H_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{1, 1} \left[x \middle| \begin{matrix} (1-\varepsilon, \varepsilon), (1-\gamma, \gamma) \\ (\varepsilon, 1), (1-\gamma, \gamma) \end{matrix} \right]. \quad (\text{الف. ۱})$$

برای هر $\alpha > 1$ داریم $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$ و $\gamma = (\alpha - \beta)/2\alpha$. برای $\alpha < 1$ نتیجه به این صورت خواهد بود،

$$f_{\alpha, \beta}(x^{-1}) = \varepsilon x^2 H_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{1, 1} \left[x \middle| \begin{matrix} (-1, 1), (-\gamma, \gamma) \\ (-\varepsilon, \varepsilon), (-\gamma, \gamma) \end{matrix} \right]. \quad (\text{الف. ۲})$$

برخی ساده‌سازی‌های صورت گرفته در نمایش تابع فاکس برای موارد خاص β در مرجع [۱۲۴] بیان شده است. با استفاده از قضایای معروف در مورد این تابع، می‌توان نمایش آن به صورت یک سری و نیز رفتار مجانبی تابع را یافت. چنانکه برای $\alpha > 1$ داریم،

$$f_{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+n\varepsilon)}{n!} \sin(\pi n \gamma) (-x)^{n-1}, \quad (\text{الف. ۳})$$

و برای حالت مجانبی رابطه زیر برای $\alpha - 2 > |\beta|$ برقرار است،

$$f_{\alpha, \beta}(x) \sim \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+n\alpha)}{n!} \sin(\pi n \alpha \gamma) (-x)^{-1-n\alpha}. \quad (\text{الف. ۴})$$

مورد ۲ - $\beta = \alpha$ استثنا است. به ازای $\alpha < 1$ بسط برای مقادیر بزرگ و کوچک x به ترتیب با استفاده از (الف.۳) و (الف.۴) داده می‌شود اما در این حالت $|\beta| = \alpha$.

حال می‌توان دید که به ازای $\alpha = 2$ و $\beta \equiv 0$ ، چگالی پایدار معادل توزیع نرمال گاوسی است. و برای $\alpha = 1$ و $\beta \equiv 0$ ، چگالی پایدار معادل است با توزیع کوشی یا لورنتس،

$$f_{1,0}(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}. \quad (\text{الف.۵})$$

اگر داشته باشیم $1 < \alpha < 2$ و $\beta = -\alpha$ و $\beta = -\alpha$ و $\beta = -\alpha$... به عنوان مثال، چگالی یک جهته‌ی پایدار^۱ برای $\alpha = 1$ و $\beta = -1$ خواهد بود،

$$f_{1/2,-1/2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-3/2} e^{-1/4x}. \quad (\text{الف.۶})$$

برای مقادیر میانی x و $\alpha \approx 0$ ، می‌توان $pdf f_{\alpha,-\alpha}(x)$ را با یک توزیع نرمال لگاریتمی [۱۲۵] تقریب زد،

$$f_{\alpha,-\alpha}(x) \propto \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} (\log(x))^2\right). \quad (\text{الف.۷})$$

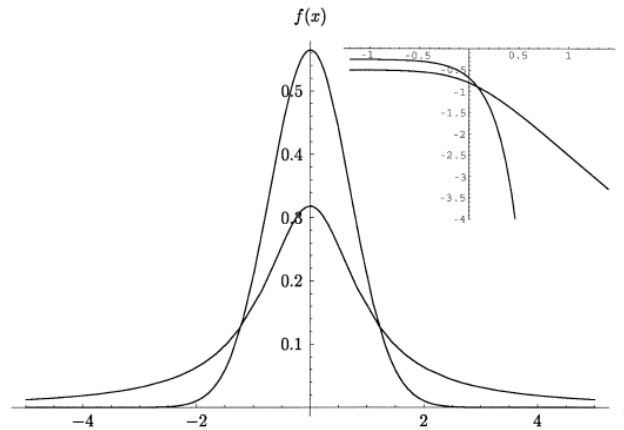
برای $\alpha = 3/2$ و $\beta = 0$ ، می‌توان توزیع اولتسمارک^۲ به دست آورد که از توزیع‌های کاربردی در کیهان‌شناسی [۲۱] است. در شکل (الف.۱)، توزیع گاوسی با لوی پایدار $f_{1,0}(x)$ یا توزیع کوشی مقایسه شده است.

در مرجع [۱۲۶] توسط تاکایاسو^۳ خلاصه‌ای بر توزیع‌های پایدار آورده شده است. او همچنین در این مرجع، یک مثال فیزیکی را ارائه نموده است که منجر می‌شود به $pdf f_{1/2,-1/2}(\tau)$ یک جهته برای توزیع زمان‌های سپری بین هر دو سیگنال در تصویر (الف.۲). از جمله کاربردها می‌توان به مورد طیف سنجی تک ملکولی اشاره داشت [۱۲۷، ۱۲۸].

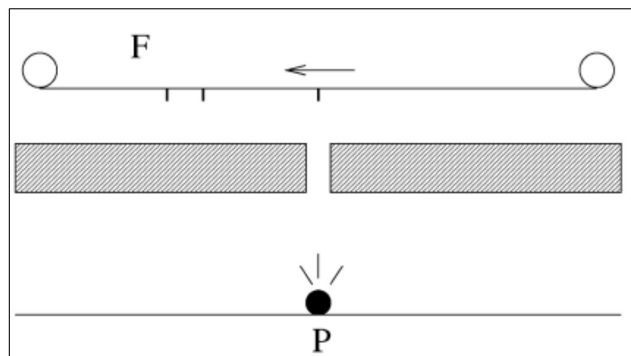
^۱ One-Sided Stable Density

^۲ Holtsmark

^۳ Takayasu



شکل الف. ۱: مقایسه توزیع نرمال گاوسی $pdf \pi^{-1/2} e^{-x^2}$ (خط چین) و توزیع کوشی $pdf \pi^{-1} (1+x^2)^{-1}$ ، یا لوی پایدار با شاخص لوی $\mu = 1$. هر دو به یک بهنجار شده‌اند. تراکم پیرامون صفر برای توزیع گاوسی بیشتر و مشهودتر است. نمودار داخلی، نمایش لگاریتمی دو تابع است که خاموشیِ نماییِ آرام‌تر برای توزیع کوشی را نشان می‌دهد.



شکل الف. ۲: یک ذره بروانی P که در امتداد یک خط حرکت کرده و نور اتساع می‌کند. این ذره هر مرتبه که از مقابل حفره عبور می‌نماید، با نور خود یک لک بر روی فیلم متحرک F باقی می‌گذارد. بازه زمانی هر کدام از این لک‌ها بر روی فیلم از توزیع $f_{1/2, -1/2}(T)$ پیروی می‌کند.

کتاب نامه

- [1] K. Pearson, Nature 72, 294 (1905)
- [2] K. Pearson, Mathematical contributions to the theory of evolution. XV. A mathematical theory of random migration [with the assistance of J. Blakeman], Drapers' Company Research Memoirs, Biometric Series III, London, Dulau and Co,1906.
- [3] J. W. Strutt, Lord Rayleigh, Philosophical Magazine 10, 73 (1880). reprinted in Scientific Papers 1, 491 (1964), New York: Dover.
- [4] M. Slack, Journal of the Institution of Electrical Engineers, Part III 93, 76 (1946).
- [5] R. Barakat, Optica Acta 21, 903 (1974).
- [6] R. Barakat, Journal of the Optical Society of America 71, 86 (1981).
- [7] J. W. Goodman, Laser Speckle and Related Phenomena, Heidelberg: Springer-Verlag, 1975.
- [8] J. W. Goodman, Journal of the Optical Society of America 66, 1145 (1976).
- [9] F. Horner, Philosophical Magazine (VII) 37, 145 (1946).
- [10] E. Jakeman, and R. J. A. Tough, Advances in Physics 37, 471 (1988).
- [11] J. W. Strutt, Lord Rayleigh, Philosophical Magazine (6) 37, 321 (1919); reprinted in Scientific Papers 6, 604 (1964), New York: Dover.

- [12] R. J. Nossal, *J. Stat. Phys.* 30, 391 (1983).
- [13] P. Turchin, *Quantitative analysis of movement: measuring and modeling population redistribution in plants and animals* (Sinauer, Sunderland, MA, 1998);
- [14] P. M. Kareiva, N. Shigesada, *Oecologia* 56, 234 (1983).
- [15] P. Bovet, P. A. Benhamou, *J. Theor. Biology* 131, 419 (1988).
- [16] F. Bartumeus, and S.A. Levin, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 105, 19702 (2008).
- [17] W. Kuhn, *Kolloidzeitschrift* 68, 2 (1934)
- [18] E. Guth, and H. Mark, *Sitzungsberichte d. mathem.-naturw. Kl.* 143, 445 (1934).
- [19] P. J. Flory, *Principles of Polymer Chemistry*, Ithaca: Cornell Uni-University Press (1953).
- [20] A. A. Markov, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig: B. G. Teubner, 1912, translation from the Russian.
- [21] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and its Application* Wiley, New York, 1970, Vol. 2, Chaps. 13 and 14.
- [22] R. Brown, *Phil. Mag.* 4, 161 (1828); *Ann. Phys. Chem.* 14, 294 (1828).
- [23] C. Wiener, *Poggendorfs Annalen* 118, 79 (1863).
- [24] E. Kappler, *Ann. d. Phys. (Leipzig)* 11 233, (1931).
- [25] K. von Nageli, *Sitz.ber. Kgl. Bayerische Akad. Wiss. Munchen, Math.-phys. Kl.* 9,389 (1879);
- [26] J. Renn, *Ann. Phys. (Leipzig)* 14, Supplement, 23 (2005) .
- [27] J. Perrin, *Annales de chimie et de physique* VIII 18, 5 (1909).
- [28] A. Einstein, in: R. Furth (Ed.), *Investigations on the theory of the Brownian movement*, Dover, New York, 1956.
- [29] M. Smoluchowski, *Annalen der Physik* 21 (14), 756 (1906).

- [30] N. Wiener, J. Math. and Phys. (MIT) 2 131 (1923); Bull. Soc. math. (France) 52 (1924) 569; Acta Math. 55 (1930) 117; Amer. J. Math. 60 (1938) 897
- [31] A. Einstein, in: R. Furth (Ed.), Investigations on the theory of the Brownian movement, Dover, New York, 1956.
- [32] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Springer, Berlin, 2003.
- [33] K. Ito, Proc. Imperial Acad. Tokyo 20, 519 (1944); Memoirs, American Mathematical Society 4, 1 (1951).
- [34] P. Protter, Notices of the American Mathematical Society 54 (6), 744 (2007).
- [35] C.W. Gardiner, Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, Berlin: Springer, 1983.
- [36] P. Langevin, C. R. Acad. Sci. Paris 146, 530 (1908); english translation: Am. J. Phys. 65 (11), November 1997.
- [37] G. E. Uhlenbeck, and L. S. Ornstein, Phys. Rev. 36, 823 (1930); reprinted in Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, N. Wax, Editor, Dover, New York, 1954.
- [38] M. C. Wang, and G. E. Uhlenbeck, Rev. Mod. Phys., 17, 323 (1945); reprinted in Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, N. Wax, Editor, Dover, New York, 1954.
- [39] W. T. Coffey, Yu. P. Kalmykov, and J. T. Waldron, The Langevin Equation: With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering, Singapore: World Scientific, 2004.
- [40] J. L. Doob, Ann. Math. 43, 351 (1942); reprinted in Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, N. Wax, Editor, Dover, New York, 1954.
- [41] H. Risken, The Fokker-Planck equation, Springer, Berlin (1989).

- [42] A. Kolmogorov, *Mathematische Annalen* 104, 415 (1931).
- [43] A. D. Fokker, *Ann. Phys.* 348, 810 (1914)
- [44] M. Planck, *Sitzber. Preu. Akad. Wiss.*, p. 324 (1917)
- [45] M. v. Smoluchowski, *Ann. Phys.* 353, 1103 (1915)
- [46] J. W. Strutt, Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* 32, 424 (1891).
- [47] O. Klein, *Arkiv Mat. Astr. Fys.* 16, 5 (1922)
- [48] H. A. Kramers, *Physica* 7, 284 (1940)
- [49] S. Redner, *A Guide to First-Passage Processes*, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [50] P. Atkins, *Physical Chemistry* (6th ed.), New York: Freeman, (1998).
- [51] J. Johnson, *Phys. Rev.* 32, 97 (1928).
- [52] H. Nyquist, *Phys. Rev.* 32, 110 (1928).
- [53] J. R. Barry, E. A. Lee, and D. G. Messerschmitt, *Digital Communications*, Springer, p. 69 (2004).
- [54] R. Mazo, *Brownian Motion: Fluctuations, Dynamics and Applications*, Oxford University Press, Oxford, 2002
- [55] B. Lindner, and E.M. Nicola, *Eur. Phys. J. Special Topics* 157, 43 (2008)
- [56] F. Black, M. Scholes. *J. Polit. Econ.* 81 (3), 637 (1973); Z. Bodie, A. Kane, and A. J. Marcus, *Investments* (7th ed.), New York: McGraw-Hill/Irwin (2008).
- [57] R. W. Zwanzig, *J. Chem. Phys.* 33, 1388 (1960).
- [58] H. Mori, *Prog. Theo. Phys.* 33, 423 (1965).
- [59] J. M. Deutch, and R. Silbey, *Phys. Rev. A* 3, 2049 (1971).

- [60] Billingsley, Patrick (1995), Probability and Measure (Third ed.), John Wiley sons, p. 362.
- [61] J. W. Lindeberg, Mathematische Zeitschrift 15 211225 (1922).
- [62] R. Bradley, Probability Surveys 2. 107 (2005)..
- [63] Henk Tijms, Understanding Probability: Chance Rules in Everyday Life, Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [64] T. H. Solomon, E. R. Weeks, and H. L. Swinney, Phys. Rev. Lett. 71, 3975 (1993).
- [65] Weeks, E.R., Urbach, J.S., Swinney, H.L., Physica D 97, 291 (1996).
- [66] P. Dieterich, R. Klages, R. Preuss and A. Schwab, Anomalous dynamics of cell migration. PNAS 105, 459–463 (2008).
- [67] H. Scher and E. W. Montroll, Phys. Rev. B 12, 2455 (1975).
- [68] H. Scher, and M. Lax, Phys. Rev. B 7, 4491 (1973); H. Scher, and M. Lax, Phys. Rev. B 7, 4502 (1973).
- [69] S. M. A. Tabei, S. Burov, H. Y. Kim, A. Kuznetsov, T. Huynh, J. Jureller, L. H. Philipson, A. R. Dinner, and N. F. Scherer, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 110, 4911 (2013). J.-H. Jeon, V. Tejedor, S. Burov, E. Barkai, C. Selhuber-Unkel, K. Berg-Sorensen, L. Oddershede, and R. Metzler, Phys. Rev. Lett. 106, 048103 (2011).
- [70] H. Scher, G. Margolin, R. Metzler, J. Klafter, B. Berkowitz, Geophys. Res. Lett. 29, 1061.
- [71] J. P. Bouchaud and M. Potters, Theory of financial risks (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000).
- [72] J.-P. Bouchad, A. Georges, Phys. Rep. 195, 127 (1990).
- [73] R. Metzler and J. Klafter, Phys. Rep. 339, 1 (2000). R. Metzler and J. Klafter, J. Phys. A 37, R161 (2004).
- [74] F. Hofling and T. Franosch, Rep. Prog. Phys. 76, 046602 (2013).

- [75] J. Klafter, S.-C. Lim, and R. Metzler, Editors 2011 Fractional Dynamics in Physics (World Scientific, Singapore).
- [76] R. Metzler, E. Barkai and J. Klafter, Euro. Phys. Lett. 46, 431 (1999).
- [77] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables Aléatoires, Gauthier-Villars, Paris, 1954.
- [78] P. Lévy, Calcul des Probabilités, Gauthier-Villars, Paris, 1925.
- [79] B. V. Gnedenko and A. N. Kolmogorov, Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables (Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1954).
- [80] R. Metzler, J.-H. Jeon, A. G. Cherstvy, and E. Barkai, Phys. Chem. Chem. Phys. 16, 24128 (2014).
- [81] W. Deng and E. Barkai, Phys. Rev. E 79, 01112 (2009).
- [82] S. Condamin, V. Tejedor, R. Voituriez, O. Benichou, and J. Klafter, Proc. Natl. Acad. Sci. 105, 5675 (2008).
- [83] K. Jacobs, Stochastic Processes for Physicists: Understanding Noisy Systems (Cambridge University Press; 2010).
- [84] F. D. Stefani, J. P. Hoogenboom, and E. Barkai, Phys. Today 62(2), 34 (2009); G. Margolin and E. Barkai, Phys. Rev. Lett. 94, 080601 (2005); X. Brokman, J.-P. Hermier, G. Messin, P. Desbiolles, J.-P. Bouchaud, and M. Dahan, Phys. Rev. Lett. 90, 120601 (2003).
- [85] A. V. Weigel, B. Simon, M. M. Tamkun, and D. Krapf, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 108, 6438 (2011).
- [86] I. Y. Wong, M. L. Gardel, D. R. Reichman, E. R. Weeks, M. T. Valentine, A. R. Bausch, and D. A. Weitz, *ibid.* 92, 178101 (2004).
- [87] S. Burov, R. Metzler, and E. Barkai, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 107, 13228 (2010).
- [88] L. C. E. Struik, Physical aging in amorphous polymers and other materials (Elsevier, Amsterdam, 1978); E. J. Donth, The glass transition (Springer, Berlin, 2001); W. Götze, Com-

- plex dynamics of glass-forming liquids: a mode-coupling theory (Oxford University Press, Oxford, UK, 2009).
- [89] M. Schubert, E. Preis, J. C. Blakesley, P. Pingel, U. Scherf, and D. Neher, *Phys. Rev. B* 87, 024203 (2013).
- [90] I. Goychuk, *Adv. Chem. Phys.*, 2012, 150, 187.
- [91] S. C. Lim and S. V. Muniandy, *Phys. Rev. E: Stat., Nonlinear, Soft Matter Phys.*, 2002, 66, 021114.
- [92] A. Fuliński, *J. Chem. Phys.* 138, 021101 (2013); *Phys. Rev. E* 83, 061140 (2011).
- [93] F. Thiel and I. M. Sokolov, *Phys. Rev. E* 89, 012115 (2014).
- [94] J.-H. Jeon, A. V. Chechkin, and R. Metzler, *Phys. Chem. Chem. Phys.* 16, 15811 (2014).
- [95] H. Safdari, A. G. Cherstvy, A. V. Chechkin, F. Thiel, I. M. Sokolov, R. Metzler, arXiv preprint arXiv:1507.02450.
- [96] S. Burov, J.-H. Jeon, R. Metzler and E. Barkai, *Phys. Chem. Chem. Phys.*, 2011, 13, 1800.
- [97] I. M. Sokolov, E. Heinsalu, P. Hänggi and I. Goychuk, *Europhys. Lett.*, 2009, 86, 30009.
- [98] L. Isserlis, *Biometrika* 12, 134 (1918); G. C. Wick, *Phys. Rev.* 80, 268 (1950).
- [99] A. B. Prudnikov and Yu. A. Brychkov, *Integrals and Series* (Gordon and Breach, New York, 1986), Vol. 1.
- [100] A. S. Bodrova, A. V. Chechkin, A. G. Cherstvy and R. Metzler, *New J. Phys.*, 2015, 17 063038 doi:10.1088/1367-2630/17/6/063038.
- [101] H. Safdari, A.V. Chechkin, G. R. Jafari, and R. Metzler, *Phys. Rev. E.* 91, 042107 (2015).
- [102] A. G. Cherstvy, R. Metzler, *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment* 2015 (5), P05010.

- [103] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of mathematical functions (Dover Publ., New York, NY, 1965).
- [104] J. Klafter, A. Blumen, M.F. Shlesinger, Phys. Rev. A 35 (1987) 3081.
- [105] E. W. Montroll, J. SIAM 4 (1956) 241.
- [106] E. W. Montroll, G. H. Weiss, J. Math. Phys. 10 (1969) 753.
- [107] E. W. Montroll, H. Scher, J. Stat. Phys. 9 (1973) 101.
- [108] K. B. Wolf, Integral Transforms in Science and Engineering, Plenum Press, New York, 1979.
- [109] W. I. Smirnow, Lehrgang der hoK heren Mathematik, Vols. III/2 and IV/1, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1988.
- [110] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives- Theory and Applications, Gordon and Breach, New York, 1993.
- [111] K. B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.
- [112] B. Ross (Ed.), Fractional Calculus and its Applications, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 457, Springer, Berlin, 1975.
- [113] K. S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993.
- [114] R. Hilfer (Ed.), Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 1999.
- [115] M. Abramowitz, I. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1972.
- [116] J.-P. Bouchaud, A. Georges, Phys. Rep. 195 (1990) 12.
- [117] B.B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, New York, 1983.
- [118] B. J. West, P. Grigolini, R. Metzler, T.F. Nonnenmacher, Phys. Rev. E 55 (1997) 99.

- [119] S. Jespersen, R. Metzler, H. C. Fogedby, Phys. Rev. E 59 (1999) 2736.
- [120] B. J. West, W. Deering, Phys. Rep. 246 (1994) 1.
- [121] S. Jespersen, R. Metzler, H. C. Fogedby, Phys. Rev. E 59 (1999) 2736.
- [122] I. Podlubny; Fractional Differential Equations, "Mathematics in Science and Engineering V198", Academic Press 1999.
- [123] R. Gorenflo, F. Mainardi; Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order.
- [124] W.R. Schneider, in: S. Albeverio, G. Casati, D. Merlini (Eds.), Stochastic Processes in Classical and Quantum Systems, Lecture Notes in Physics, Vol. 262, Springer, Berlin, 1986.
- [125] E.W. Montroll, J.T. Bendler, J. Stat. Phys. 34 (1984) 129.
- [126] H. Takayasu, Fractals in the Physical Sciences, Manchester University Press, Manchester, 1990.
- [127] G. Zumofen, J. Klafter, Chem. Phys. Lett. 219 (1994) 303.
- [128] E. Barkai, R. Silbey, Chem. Phys. Lett. 310 (1999) 287.
- [129] J. Liouville, Polytechnique 13, 1–162 (1832).
- [130] L. Euler, "De progressionibus transcendentibus seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt Commentarii", academiae scientiarum Petropolitanae 5, 36–57. Reprinted in Opera omnia I.14, 1–24 (1738).
- [131] B. Riemann, Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation in: Weber H (Ed.), Bernhard Riemann's gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, Dover Publications. 353 (1953).
- [132] M. G. Mittag-Leffler, Acad. Sci. Paris 137, 554–558 (1903).

- [133] A. Wiman, Acta Math. 29, 191–201 (1905).
- [134] R. Herrmann, "Fractional Calculus: An Introduction for Physicists", World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd (2011).
- [135] E. Barkai, Phys. Rev. Lett. 90, 104101 (2003); E. Barkai, Y. C. Cheng, J. Chem. Phys. 118, 6167 (2003).
- [136] J. H. P. Schulz, E. Barkai, and R. Metzler, Phys. Rev. Lett. 110, 020602 (2013); Phys. Rev. X 4, 011028 (2014).
- [137] H. Krüsemann, A. Godec, and R. Metzler, Phys. Rev. E. 89, 040101(R) (2014).
- [138] F. T. Ulaby, R. K. Moore and A. K. Fung, Microwave Remote Sensing: Active and passive. Vol. II – Radar remote sensing and surface scattering and emission theory. – Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, USA (1982).
- [139] L. Rayleigh, The Theory of Sound, Dover, New York, 1945 (originally published in 1877).
- [140] E. L. Feinberg, J. Phys. USSR, vol. 8, pp. 317- 330 (1944), vol. 9, pp. 1-6, 1945 and vol. 10, pp. 410-418 (1946).
- [141] S. O. Rice, Comm. Pure Appl. Math., vol. 4, no. 2/3, pp. 351-378, 1951.
- [142] H. Davies, Proceedings of IEEE, Pt. 4, vol. 101, no. 7, pp. 209-214, 1954.
- [143] M. L. Antokol'skii, DAN. SSSR, vol. 62, pp. 203-206 (1948).
- [144] L. M. Brekhovskih, DAN SSSR, vol. 79, no. 4, pp. 585-588 (1951).
- [145] M. A. Isakovich, Otchet FIAN SSSR, Akustich. Lab. (1953), Trudy Akust. in-ta AN SSSR, no. V, pp. 152-251 (1969).
- [146] S. Silver, Microwave Antenna Theory and Design, McGraw-Hill Book Company, New York, 1947.

- [147] M. I. Sancer, Radio Science, vol. 3, pp. 141-144 (1968).
- [148] J. A. Ogilvy, Theory of Wave Scattering From Random Rough Surfaces, CRC Press (1991).
- [149] B. Mandelbrot. Les Objets Fractales, p.154 (1989).
- [150] M. F. Barnsley, R. L. Devaney, B. B. Mandelbort, H Peitgen, R. F. Voss, “The Science of Fractal Images”, (Springer - Verlag Publisher, New York, 1988).
- [151] P.I Bourke, “ Box counting estimate of fractal dimension”, October 1998
(<http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/fractals/fracdim/>)
- [152] S. K. Sinha, E.B. Sirota, S. Garoff and H.B. Stanley, Phys. Rev. B 38 (1988) 2297-2311.
- [153] G. Palasantzas, PRB. 48 19 (1993).
- [154] B. J. West, P. Grigolini, ' Complex Webs Anticipating the Improbable', Cambridge University Press, New York (2011).
- [155] M. Zamani, M. Salami, S.M. Fazeli and G.R. Jafari, J. Opt. Mod. 59 (2012) 16.
- [156] H. Safdari, M. Vahabi, G. R. Jafari, arXiv preprint arXiv:1305.7029.



Shahid Beheshti University

Physics Department

Dissertation submitted for Ph.D degree in Condensed Matter Physics

Topic

How Age Shapes Anomalous Diffusion

By

Hadiseh Safdari

Supervisor

Dr. G. Jafari

August 2015