بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده فیزیک

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
گرایش سیستم های پیچیده و دینامیک غیرخطی

عنوان

اثر عمر روابط بر شکل گیری توازن در ساختار اجتماعی

نگارش
محمد شرافتی

استاد راهنما
دکتر غلامرضا جعفری

آبان ۹۸

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده فیزیک

رساله کارشناسی ارشد

اثر عمر روابط بر شکل گیری توازن در ساختار اجتماعی

نگارش: محمد شرافتی

استاد راهنما: دکتر غلامرضا جعفری امضا:

استاد ممتحن داخلی: دکتر علی حسینی امضا:

استاد ممتحن خارجی: دکتر علی صادقی امضا:

قدردانی

ممنونم مادر

محمد شرافتی

آبان ۹۸

۱.۰ چکیده

انسان از ابتدا تا کنون، موجودی اجتماعی بوده است و بر همین اساس نیز سعی می‌کند نیاز های خود را از طریق اجتماع و مشارکت در آن رفع کند. همین ایده، یعنی ارتباط با دیگران، باعث آن بود که همواره سعی کند تنش های اطراف خود را به حداقل برساند تا بتواند به حیات ادامه دهد. اما این امر، یعنی کاهش تنش مستلزم داشتن زمان کافی برای آن است که انسان بتواند روابط خود را اصلاح نماید. حال اگر این زمان کافی در اختیار او نبود، چه روی خواهد داد؟

با یک مثال موضوع را کمی روشن‌تر خواهیم کرد. فرض کنید در یک شرکت استخدام شده‌اید و اولین روز کاری شماست. در ابتدای ورودتان به شرکت، شما پیوند های اولیه‌تان را که شامل دوستی یا دشمنی است می‌سازید. اما بدون آن که فرصت کافی جهت تلاش برای کاهش تنش این ارتباطات داشته باشید همان روز اول اخراج می‌شوید. پس عملا شما زمان کافی جهت اصلاح نداشته‌اید و عملا ارتباطاتتان دست نخورده باقی مانده است. اما اگر فرصت کافی داشته باشید چه روی خواهد داد؟ احتمالا خواهید توانست ارتباط های خود را اصلاح کنید و به کمترین تنش برسانید.

ایده‌ای که در این پژوهش دنبال خواهد شد، بررسی نقش زمان در کاهش تنش در شبکه است که شامل گره‌ها و پیوندها است. به همین منظور به سراغ نظریه توازن هیدر می‌رویم. هیدر با تقسیم یک شبکه به اجزایی با سه گره و تعریف حالات متوازن و نامتوازن [۱۳]، برای مثلثی که آن سه عضو ایجاد کرده بودند، این امکان را فراهم نمود که با تعریف تنش (انرژی) برای شبکه، که مبتنی بر نظریه خودش بود، سطح تنش در شبکه را به صورت کمی بیان کند .در کار های بعدی نیز کارترایت و هراری به سراغ ساختار، مقدار تنش شبکه و ویژگی های کمینه های محلی پرداختند و نشان دادند که حداکثر انرژی این حالت‌ها از میانه طیف بالاتر نمی‌رود [۱۴] .
اما نکته‌ای که در این نظریه کمتر به آن پرداخته شده، زمان کافی برای رسیدن به کمترین تنش است و به صورت بی‌نهایت فرض شده است. در این پژوهش با بررسی مقادیر مختلف این طول عمر، تاثیر آن بر شبکه را بررسی می‌کنیم و سعی خواهیم کرد برای سن پیوندها در شبکه، توزیعی در زمان های مختلف به دست بیاوریم.

در فصل اول این پژوهش به سراغ شبکه و خواص آن رفتیم و از مواردی که می‌توان با آن شبکه را به صورت کمی مورد بررسی قرار داد صحبت کردیم و در آخر از شبکه کامل که در این پژوهش استفاده شده است صحبت کردیم و خواص آن را برشمردیم. در فصل دوم، به سراغ نظریه توازن هیدر رفتیم و ویژگی های آن را بیان کردیم و سپس آن ویژگی‌ها را در یک شبکه کامل بررسی کردیم. در آخر فصل نیز به سراغ حالات مسدود و ویژگی های آن رفتیم و فصل را با راه کارهایی جهت شناسایی حالات مسدود به اتمام رساندیم. در فصل سوم به سراغ عنصر زمان و طول عمر در نظریه توازن رفتیم و سعی کردیم با شبیه سازی رایانه‌ای، تاثیر این ویژگی که غالبا دیده نمی‌شود را به تصویر بکشیم و در بخش های بعدی نیز به سراغ تاثیر عملکرد این ویژگی بر تشکیل ساختار شبکه مانند تعداد انواع مثلث‌ها و تغییر توزیع سن پیوندها را مورد مطالعه قرار دادیم و عبارتی جهت توزیع سن پیوندها در طول عمر های مختلف ارائه نمودیم.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فصل ۱

شبکه‌های پیچیده

۱.۱ مقدمه

بعد از قدرت نمایی فیزیک کلاسیک در تفسیر بیشتر اتفاقات طبیعت، به طوری که فقط چند سئوال باقی مانده بود (البته سئوالات اساسی که باعث تحول در فیزیک کلاسیک شد). یک باور در میان فیزیک‌دانان قرن ۱۹ رواج پیدا کرد. این دیدگاه که به فروکاست‌گرایی [۱] شهرت داشت بیان می‌کرد که مسائل دشوار و رفتار پدیده هایی که دارای اجزای زیادی در فیزیک هستند،با شکستن اعضا سازنده آن مسئله به اجزای بنیادی آن قابل حل و تفسیر است و اگر فعلا قادر به پاسخ به آن‌ها از این طریق نیستیم به سبب کمبود ابزار و عدم پیشرفت تکنولوژی است و ارتباطی با مفاهیم فیزیک ندارد زیرا دیگر تمامی آن‌ها حل گشته‌اند. در مقابل این دیدگاه، برخی از فیزیک‌دانان رهیافت سامانه های پیچیده را پیش گرفتند. فیزیک سامانه های پیچیده به معنی بررسی رفتار های برآمده از سامانه است و در مقابل دیدگاه فروکاست گرایی که به معنی شکستن سامانه به اجزاء کوچکتر و بررسی آن است، قرار دارد. از جمله نمود های این رهیافت می‌توان در مکانیک آماری مشاهده کرد. در مکانیک آماری، فیزیک‌دانان سامانه‌ها را با نگاه به خواص ماکروسکوپی و احتمالاتی که از به سبب ویژگی های میکروسکوپی به وجود آمده اند بررسی می‌کنند و به سراغ رفتار یک تک اتم نمی‌روند و در واقع سامانه را به اجزاء آن خرد نمی‌کنند [۱]. با این که روش فروکاست‌گرایی و روش های مشابه، درک ما را از پدیده های دنیای پیرامونمان بیشتر کرده‌اند، اما در موارد زیادی نیز ناتوانایی خود را نشان داده‌اند و این مسئله که صرفا به اجزاء سازنده نگاه داشته باشیم را منتفی کرده‌اند [۲]. اما نکته حیاتی که باید به آن اشاره کنیم این است که تعریف دقیقی برای تعریف پیچیدگی و یا سامانه های پیچیده در میان صاحب نظران وجود ندارد و در هر حوزه کاری فراخور آن حوزه، تعریفی اختصاص داده شده است. اما به طور اجمالی می‌توان به اشتراکات میان آن‌ها اشاره کرد:

- در نگاه ما پیچیدگی، به معنی آن است که ساختار در کنار تغییرات وجود دارد [۳].
- در یک نگاه، سامانه های پیچیده، به سامانه هایی گفته می‌شود که تحول آن، به شرایط اولیه و اختلالات بسیار کوچک حساس است. سامانه‌ای که دارای تعداد زیادی قسمت های مختلف مستقل که در حال برهمکنش با هم هستند و به همین علت امکان دارد مسیر های مختلفی برای تحول بپیمایند. برای توصیف رفتار چنین سامانه‌ای به سراغ ریاضیات

[1] reductionism

تحول غیرخطی می‌رویم. از طرف دیگر سامانه به طور دقیق نیز توسط این معادلات توصیف نمی‌شود یا اگر به طور غیردقیق بخواهیم بگوییم، سامانه یک سامانه پیچیده است. [۴]

- در نظریه پیچیدگی بیان می‌شود که تعداد زیاد اجزاء سامانه، می‌توانند به سمت خودسازماندهی حرکت کنند و منجر به ایجاد الگو، حافظه و تصمیم گیری همگانی در سامانه گردند. [۵]

- در حالت کلی، پیچیده به عنوان صفت به سامانه‌ای اطلاق می‌شود که فهم و تعبیر عملکرد آن دشوار یا امکان پذیر نباشد. این پیچیدگی را می‌توان با عواملی مانند تعداد عوامل سازنده سامانه و روابط غیر بدیهی بین آن‌ها، روابط شرطی میان آن‌ها، میزان تودرتو بودن و نوع ساختمان داده نشان داد. [۶]

- یک سامانه پیچیده، سامانه‌ای است که میان اجزاء مختلف آن، برهمکنش های چندگانه دیده می‌شود. [۷]

- سامانه های پیچیده ، سامانه هایی هستند که اعضاء زیادی دارند که نسبت به الگو هایی که در سامانه ساخته می‌شود یا واکنش نشان داده می‌شود یا سازگار می‌شوند. [۸]

- زمانی که به ظاهر علیت نقض شده، پیچیدگی آغاز می‌شود. [۹] .

برای آن که پیچیدگی را بهتر بشناسیم باید مروری بر ویژگی های یک سامانه پیچیده داشته باشیم. از ویژگی های آن می‌توان به برآمدگی ، نظم خودبه‌خودی و بازخورد اشاره نمود.

ظهوریافتگی یا برآمدگی[۲]:

در این پدیده، اجزای بزرگتری وجود دارند که هر یک از جزء های کوچک‌تری تشکیل شده‌اند، به طوری که دارای خواصی هستند که جزء های کوچک‌تر به تنهایی آن ها را دارا نیستند. به طور مثال یک نورون [۳] را به تنهایی در نظر بگیرید. این نورون به تنهایی خواصی مانند حافظه، قابلیت تکلم و سایر خواص یک مغز را نشان نمی‌دهد. در حالی که تجمعی از این نورون ها در مغز، خواصی مانند حافظه را بروز می‌دهند [۱۰] .

نظم خودبه‌خودی[۴]:

منظور از نظم در اینجا این است که اجزاء سازنده سامانه، همگی در یک مشخصه یکسان شوند. به طور مثال در نمونه مدل آیزینگ [5] در نزدیکی دمای بحرانی اجزاء سازنده آن یعنی اسپین‌ها، از حالت بی‌نظم که در جهت های مختلف بودند، به یک سمت و جهت یکسان، تغییر پیدا می‌کنند.

بازخورد[۶]:

بازخورد به این معناست در یک چرخه طبیعی یک سامانه، خروجی آن سامانه می‌تواند دوباره به سامانه برگردد و بر نحوه عملکرد

[2] Emergence
[3] Neuron
[4] Self-Organize
[5] Ising model
[6] Feedback

چرخه تاثیر بگذارد. چنین عملکردی می تواند بر نحوه تعامل سامانه با محیط تاثیر بگذارد و موجب بهتر یا حتی بدتر شدن عملکرد آن شود. از مثال های بروز این کار که در یادگیری ماشین [۷] استفاده شده است می‌توان به حافظه طولانی_ کوتاه‌مدت [۸] اشاره کرد که یکی از الگوریتم های مهم یادگیری در این حوزه است.

برای آن که بتوانیم به سراغ سامانه‌های پیچیده برویم، نخست باید ابزار ریاضی مورد نظر آن را خوب فرا بگیریم. سامانه‌های پیچیده به علت آن که با دینامیک های غیرخطی ارتباط پیدا می‌کند، از مهم‌ترین ابزار برای فهم آن دینامیک غیرخطی و نظریه آشوب است. از ابزار دیگر نیز می‌توان به فیزیک آماری و فرآیند های تصادفی اشاره نمود. برای مثال از نظریه آشوب در بررسی رفتار سامانه‌های غیرخطی و میزان پایداری آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. فیزیک آماری نیز با معرفی مدل هایی مانند تراوش[۹]، تپه شنی [۱۰]، مدل های شخص محور [۱۱] و ... کمک شایانی به فهم و درک سامانه های پیچیده نموده است.
از با اهمیت‌ترین ابزار برای فهم روابط و برهمکنش های بین اجزاء سامانه در سامانه های پیچیده، نظریه شبکه‌ها است. در نظریه شبکه‌ها برای فهم روابط و مدل‌سازی آن به سراغ نظریه گراف در ریاضیات می‌رویم.

۲.۱ شبکه‌های پیچیده

گسترش روزافزون شبکه‌های ارتباطی (مانند اینترنت) و نزدیک‌تر شدن روابط جوامع مختلف با یکدیگر باعث شده که شناخت این شبکه‌ها و اجتماع‌ها و تحول آن‌ها در طی زمان از موضوعات داغ امروزه باشد. در قدم اول می‌توان این شبکه‌ها را در دو حالت کلی ایستا و درحال تحول بررسی کرد. اما قبل از این باید مقداری مقدمات شبکه و دینامیک مربوط به آن را مطالعه کرد.

در حالت ساده می‌توان شبکه را شامل تعدادی گره (مانند انسان‌ها، وبسایت‌ها، شهرها ....) و تعدادی پیوند (مانند راها، لینک وبسایت‌ها و ...) که این گره‌ها را به هم وصل کرده‌اند، تشکیل شده‌است. در واقع شبکه‌ها، یک راه بسیار خوب برای نمایش ارتباط اجزا سازنده یک پدیده و نحوه ارتباط آن‌ها با یکدیگر تحت تأثیر عوامل مختلف (مانند زمان، سن، حافظه و ...) غیره است. همین قدرت بالای شبکه در مدل کردن باعث شده که افراد در گرایش‌های مختلف علاقه بسیاری به شبکه پیدا کنند به طوری که شبکه از اعضا اصلی استفاده شده در بزرگان صنعت آی تی همچون گوگل و فیسبوک است.

ریاضیدانان قضایای بسیاری برای آن بدست آورده‌اند و آن را بسیار گسترش داده‌اند. جامعه شناسان از شبکه در راستای فهم ارتباط افراد جامعه استفاده می‌کنند. زیست شناسان از شبکه جهت مدل کردن روابط زیستی بین جانداران بهره می‌گیرند. مثال‌های بسیار بیشتری از کاربرد روزافزون شبکه می‌توان یافت که برای توضیحات بیشتر و مثال‌های متنوع تر به کتاب شبکه نیومن [۱۱] مراجعه شود.
اما برای این که درک اولیه از شبکه پیدا کنیم، باید یک سری مطالب و خصوصیات اولیه از شبکه فرا گرفت .

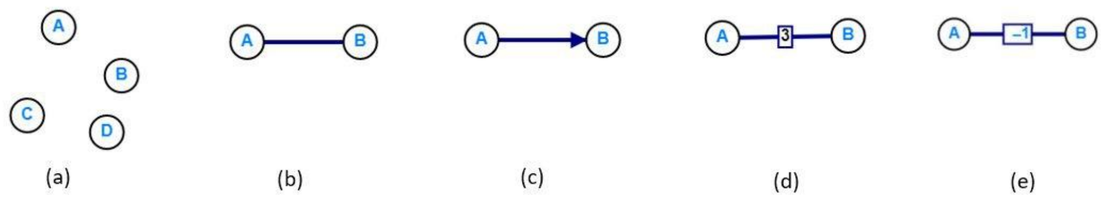
[7] Machine Learning
[8] Long Short-Term Memory
[9] Percolation
[10] Sandpile Model
[11] Agent-based model

۳.۱ شبکه

گره[۱۲]: : به هر عضوی از شبکه که بتواند با عضو دیگر ارتباط برقرار کند، گره می‌گویند . (شکل a ۱.۱)

پیوند[۱۳]: به رابطه‌ای که بتوان بین هر دو گره تعریف کرد، پیوند می‌گویند . (شکل b ۱.۱)

پیوند جهت‌دار[۱۴]: اگر جهت در پیوندی که دو گره را به یکدیگر متصل می‌کند، خود اهمیت داشته باشد، به آن پیوند جهت دار می‌گویند. به‌طور مثال یک خیابان یک طرفه را در نظر بگیرید که فقط اتومبیل‌ها توانایی حرکت از یک سمت خیابان به سمت دیگر را داشته باشند و برعکس آن ممنوع باشد.(شکل c ۱.۱)



شکل ۱.۱: a) مجموعه‌ای از گره‌ها ، b) پیوند ، c) پیوند جهت‌دار ، d) پیوند وزن‌دار ، e) پیوند علامت‌دار

پیوند وزن‌دار[۱۵]: در حالت ساده، اگر پیوند بین دو گره برقرار باشد، عدد یک را نسبت می‌دهند و اگر برقرار نباشد، عدد صفر را نسبت می‌دهند. اگر به پیوند بین دو گره، عددی غیر از صفر و یک نسبت داده شد، به این پیوند، پیوند وزن دار گفته می‌شود. پیوند وزن دار، اطلاعات بیشتری را از پیوند دو گره به ما می‌دهد. مثلاً ممکن است نشانه ای از بار ترافیکی، جریان عبوری، سن رابطه یا حافظه رابطه باشد.(شکل d ۱.۱)

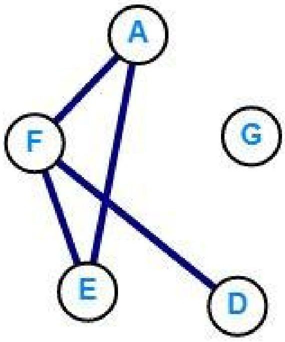
پیوند علامت‌دار[۱۶]: اگر پیوند بین دو گره، برحسب نحوه ارتباط دو گره مانند دوستی یا دشمنی تعیین گردد، به آن پیوند علامت می‌دهند. به‌طور مثال برای دوستی علامت مثبت یک و برای دشمنی علامت منفی یک نسبت داده می‌شود.(شکل e ۱.۱)

درجه[۱۷]: به تعداد پیوندهایی که به یک گره متصل است، درجه آن گره می‌گویند. اما تعریف درجه در پیوند جهت دار کمی متفاوت است. درجه در حالی که پیوند جهت دار است به این شکل تغییر می‌کند که به تعداد پیوندهایی که جهت آن به سمت داخل شدن به گره باشد، درجه ورودی و به تعداد پیوندهایی که سمت آن خروج از گره باشد، درجه خروجی می‌گویند.

شبکه: در ساده‌ترین شکل، شبکه را می‌توان مجموعه ای از گره‌ها (مانند افراد، شرکت‌ها، صفحات وب و ...) در نظر گرفت که با مجموعه از پیوندها (مانند روابط بین افراد و شرکت‌ها) به یکدیگر متصل شده‌اند.

---
[12] Node
[13] Link
[14] Directed-Link
[15] Weighted-Link
[16] Signed-Link
[17] Degree

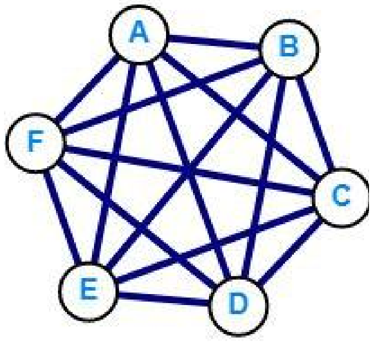
نحوه نمایش یک شبکه: یکی از بهترین روش‌ها برای نمایش شبکه، استفاده از ماتریس مجاورت [18] است. این ماتریس فقط با پیوند و گره‌ها ساخته می‌شود. اگر گره‌ها را از ۱ تا n نام گذاری کنیم، اگر بین دو گره، پیوند مشترک وجود داشته باشد، آن دو گره در سطر و ستون ماتریس مجاورت پیدا می‌کنیم و تعداد پیوند بین آن دو را در آن خانه قرار می‌دهیم. به طور مثال در شکل(۲.۱) یک شبکه و ماتریس مجاورت آن را با پنج گره شاهد هستیم. هر کجا که دو گره به هم متصل شده‌اند، به ازای آن یک در ماتریس قرار گرفته‌است. طبق شکل ۲.۱ گره A به گره F متصل است. بنابراین در یک سطر اول خانه دوم و در سطر دوم خانه اول عدد یک قرار داده می‌شود.



	A	F	E	D	G
A	۰	۱	۱	۰	۰
F	۱	۰	۱	۱	۰
E	۱	۱	۰	۰	۰
D	۰	۱	۰	۰	۰
G	۰	۰	۰	۰	۰

شکل ۲.۱: یک شبکه ساده به همراه ماتریس مجاورت آن

شبکه کامل: شبکه کامل شبکه ای که دارای N گره، به طوری که تمام گره‌ها با پیوند به یکدیگر متصل شده باشد. پس به هر گره دقیقا $N - ۱$ پیوند متصل شده‌است. با توجه به این موضوع، توزیع درجات در چنین شبکه ای یکنواخت است و از آن جا که همه گره‌ها به یکدیگر متصل هستند بنابر این هاب در شبکه وجود ندارد، کوتاه‌ترین فاصله برابر با یک، ضریب خوشگی برابر با یک و اجتماع کوچکتری در شبکه تشکیل نشده‌است. ماتریس مجاورت شبکه کامل نسبت به قطر متقارن است (شکل ۳.۱) .



	A	B	C	D	E	F
A	۰	۱	۱	۱	۱	۱
B	۱	۰	۱	۱	۱	۱
C	۱	۱	۰	۱	۱	۱
D	۱	۱	۱	۰	۱	۱
E	۱	۱	۱	۱	۰	۱
F	۱	۱	۱	۱	۱	۰

شکل ۳.۱: یک شبکه کامل به همراه ماتریس مجاورت آن

[18] Adjacency Matrix

از آن جا که به هر گره ، $N-۱$ پیوند وارد شده است ، لذا درجه هر گره برابر است :

$$D = N - ۱ \tag{۱.۱}$$

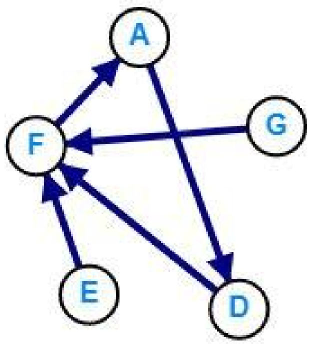
تعداد کل پیوندهای موجود در شبکه را با Nl نمایش می‌دهیم به قرار زیر است :

$$Nl = d \times (N/۲) = N \times (N-۱)/۲ \sim N^{۲} \tag{۲.۱}$$

از آنجایی که در این پروژه با تعداد مثلث‌های موجود در شبکه کار خواهیم کرد، تعداد مثلث‌های موجود در یک شبکه را با علامت n_{Δ} نمایش می‌دهیم و تعداد آن برابر است با:

$$n_{\Delta} = \binom{N}{۳} = N \times (N-۱) \times (N-۲)/۶ \sim N^{۳} \tag{۳.۱}$$

شبکه جهت‌دار[۱۹]: به شبکه ای که پیوندهای بین گره‌های آن از نوع پیوندهای جهت دار باشد، شبکه جهت دار نام دارد. به‌طور مثال هر دو گره ای مانند (u, v) اگر با پیوندی مانند u فلش به سمت v نشان داده شود ، یعنی جهت حرکت از u به v است . در این حالت روابط نامتقارن و ماتریس مجاورت آن نیز نامتقارن است شکل (۴.۱) .

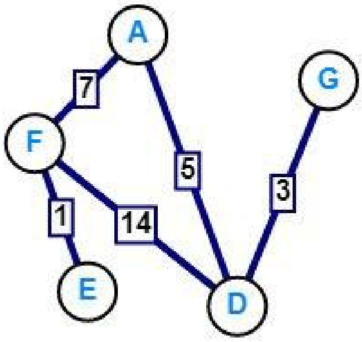


	A	F	E	D	G
A	۰	۰	۰	۱	۰
F	۱	۰	۰	۰	۰
E	۰	۱	۰	۰	۰
D	۰	۱	۰	۰	۰
G	۰	۱	۰	۰	۰

شکل ۴.۱: یک شبکه جهت‌دار به همراه ماتریس مجاورت آن

شبکه وزن‌دار[۲۰]: به شبکه ای که ارتباط بین اعضایش از نوع پیوند وزن دار باشد، شبکه وزن دار گفته می‌شود . در حالت ساده، اگر پیوند بین دو گره برقرار باشد، عدد یک را نسبت می‌دهند و اگر برقرار نباشد، عدد صفر را نسبت می‌دهند. اگر به پیوند بین دو گره، عددی غیر از صفر و یک نسبت داده شد، به این پیوند، پیوند وزن دار گفته می‌شود. پیوند وزن دار، اطلاعات بیشتری از از پیوند دو گره به ما می‌دهد. مثلاً ممکن است نشانه ای از بار ترافیکی، جریان عبوری، سن رابطه یا حافظه رابطه باشد. ماتریس مجاورت وزن دار، درایه‌های آن شامل وزن پیوند بین دو گره است (شکل ۵.۱).

[19] Directed-Network
[20] Weighted-Network

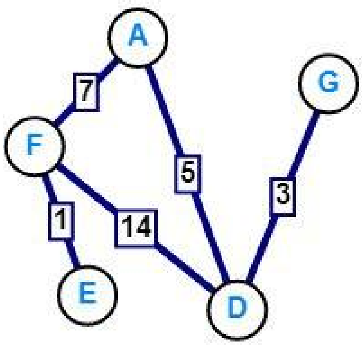


	A	F	E	D	G
A	٠	٧	٠	٥	٠
F	٧	٠	١	١٤	٠
E	٠	١	٠	٠	٠
D	٥	١٤	٠	٠	٣
G	٠	٠	٠	٣	٠

شکل ۵.۱: یک شبکه وزن‌دار به همراه ماتریس مجاورت آن

شبکه علامت‌دار[21]: در برخی شبکه‌ها مانند شبکه دوستی و دشمنی، شبکه‌های اجتماعی، شبکه روابط بین کشورها، رابطه‌ها با پیوندهای مثبت یا منفی علامت داده می‌شوند. در این نوع شبکه که شبکه برهمکنش است، ماتریس مجاورت آن متقارن است. در این پژوهش ما بر روی شبکه‌های علامت دار بدون جهت تمرکز خواهیم داشت.

شبکه سن‌دار[22]: برخی شبکه‌ها می‌توان در کنار سایر مشخصاتی که به پیوند آن‌ها داد، به پیوند بین آن‌ها سن نیز نسبت داد. به گونه ای که با جلو رفتن زمان، سن پیوند نیز افزایش یابد و اگر تحت شرایطی که خودمان در مسئله تعیین می‌کنیم، به‌طور مثال اگر علامت پیوند در طول زمان تغییر کرد، سن نیز صفر می‌شود، شبیه به آن که پیوند دوباره متولد شده‌است (شکل ۶.۱).



	A	F	E	D	G
A	٠	٧	٠	٥	٠
F	٧	٠	١	١٤	٠
E	٠	١	٠	٠	٠
D	٥	١٤	٠	٠	٣
G	٠	٠	٠	٣	٠

	A	F	E	D	G
A	٠	١	٠	١	٠
F	١	٠	١	١	٠
E	٠	١	٠	٠	٠
D	١	١	٠	٠	١
G	٠	٠	٠	١	٠

شکل ۶.۱: یک شبکه سن‌دار به همراه ماتریس مجاورت آن شکل سمت چپ: شکل شبکه، شکل وسط: ماتریس مجاورت سن‌های پیوندها، شکل سمت راست: ماتریس مجاورمتصل بودن گره‌ها

[21] Signed-Network
[22] Aged-Network

۴.۱ تحول در شبکه

تمام مواردی که در قسمت‌های قبل برای شبکه بیان کردیم (جز شبکه سن دار)، بر این اساس تعریف می‌شوند که شبکه در حالت ایستا است. اما می‌دانیم که بیشتر شبکه‌هایی که مشاهده می‌کنیم در طول زمان، مشخصه‌های مختلف آن‌ها بر اثر شرایط تغییر می‌کند. این تحولات عموماً از قبیل شکل‌گیری روابط جدید و ازبین رفتن روابط قدیمی، تغییر وزن روابط، اضافه شدن گره‌های جدید یا جدا شدن گره‌های قدیمی، تغییر جهت پیوندها، کم شدن یا اضافه شدن بار ترافیکی و .... که همه این تغییرات باعث تغییر در مشخصاتی مانند تغییر توزیع درجات، به وجود آمدن یا ازبین رفتن هاب، تغییر ضریب خوشگی و غیره خواهد شد. این تحولات چه دینامیکی دارند و با چه مشخصاتی معرفی می‌شوند؟ به‌طور مثال یکی از دینامیک‌هایی که استفاده می‌شود، دینامیک ترجیحی در مدل باراباشی–آلبرت [23] [۱۲] است.در این مدل، هر عضو جدیدی که وارد شبکه می‌شود ترجیح دارد با گره‌های قدیمی که درجات بالاتری دارند ارتباط برقرار کند. این مدل یکی از مدل‌های موفق برای مدل کردن شبکه اینترنت شناخته می‌شود. اما مدلی که ما از شبکه مدنظر داریم و در این پژوهش آن را بررسی خواهیم کرد بدین شرح است: یک شبکه شامل N گره که شبکه کامل است یعنی تمام پیوندهای بین گره‌ها متصل شده‌است. سپس به هرکدام از این پیوندها یک علامت -۱ (دشمنی) یا $+۱$ (دوستی) اختصاص داده می‌شود. نحوه اختصاص این علامت‌ها می‌تواند کاملاً تصادفی باشد یا روابط دوستی و دشمنی از قبل مشخص شده باشد (مانند روابط کشورها).

تحولی که ما قصد بررسی آن را داریم، تحول یک شبکه با تعداد گره ثابت است. در این تحول بصورت کلی شبکه سعی می‌کند که مانند تمام تحولات اطراف ما انرژی خود را به کمترین مقدار برساند، البته می‌توانیم در این پژوهش، از کاهش انرژی به عنوان کاهش تنش [24] یاد کنیم. پس ما نیازداریم که یک انرژی بر اساس روابطی که بصورت $-$ و $+$ تعریف شده‌اند معین کنیم و سپس بر اساس دینامیکی که آن را نیز باید مشخص کنیم، این انرژی در طول زمان رو به کاهش برود و به پایین‌ترین حد خود برسد. در میان تحول‌هایی که افراد مختلف معرفی کرده‌اند، تحول آقای فریتز هیدر [25] برای روابط اجتماعی، بیشترین قرابت را با این پژوهش دارا است.

[23] Barabási–Albert (BA) model
[24] Stress
[25] Fritz Heider

فصل ۲

نظریه توازن

۱.۲ مقدمه

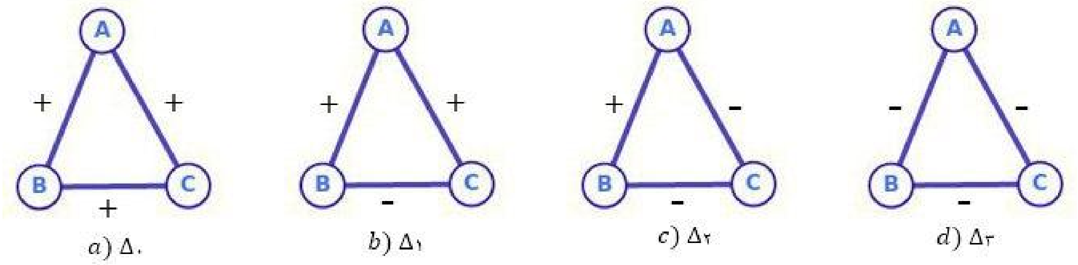
نظریه توازن ، به صورت منسجم توسط فریتز هیدر [1] در سال ۱۹۴۶بیان شد . البته در نظریه توازن [2] افراد دیگری هم قبل از هیدر مشارکت داشتند تا این نظریه به یک صورت منسجمی برسد. تا مدت‌ها این نظریه در میان جامعه شناسان مورد استفاده قرار گرفت. این نظریه بیان می‌کند تکامل یک رابطه در شبکه، صرفاً به رابطه دو نفر بستگی ندارد بلکه به روابط سه تایی گره‌ها در یک شبکه ارتباط دارد. این رابطه‌ها دوستی یا دشمنی هستند [۱۳].

فرض کنید الف با ب دوست است ولی ب و ج دشمن هم دیگر هستند. در این حالت احساس می‌شود که ب و ج از این حالت که الف با دشمنشان دوست است ناراضی هستند؛ لذا سعی خواهند کرد که رابطه را به سمتی که بیشتر تمایل دارند تغییر دهند، یعنی یا الف را مجاب کنند که رابطه دوستی خود با دیگری را تبدیل به دشمنی کند، یا خود با الف دشمن شوند یا سعی کنند که با دیگری (طبیعتا غیر از الف!) دوست شوند. این بحث اصلی در نظریه توازن است که توسط هیدر معرفی گشت. همان‌طور که مشخص شد، در واقع رابطه افراد با یکدیگر با عامل سومی بررسی می‌شود .

سال ها بعد (۱۹۵۶) دوروین کارتریت [3] و فرانک هراری [4]، کاری که هیدر در جامعه‌شناسی انجام داده بود را به زبان شبکه ترجمه کردند [۱۴]. در یک حالت دارای دو گره، رابطه آن‌ها با پیوند علامت دار مشخص می‌شود و از آنجا که توازن در رابطه با توجه به تعریفی که در بالا انجام دادیم، صرفاً به رابطه دو نفر بستگی ندارد بلکه به نحوه تمایل آن دو با نفر سوم نیز وابسته است و با توجه به کار کارتریت و هراری که این نظریه را در شبکه معرفی کرده‌اند نخست سراغ گره‌های سه تایی در شبکه می‌رویم و توازن در آن‌ها را بررسی می‌کنیم. حال حالت‌های نامتوازن یا پرتنش و متوازن یا بی تنش را معرفی می‌کنیم. سه گره داریم که هر کدام با یک پیوند به دیگری متصل شده‌است و این پیوندها دارای علامت -1 (دشمنی) و $+1$ (دوستی) است.

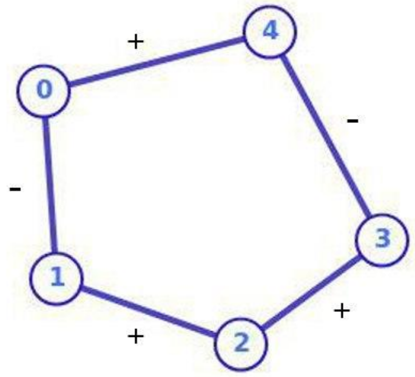
[1] Fritz Heider
[2] Balance Theory
[3] Dorwin Cartwright
[4] Frank Harary

- حالت اول) هر سه پیوند منفی باشند. این حالت، یک حالت نامتوازن است (شکل d ۱.۲).
- حالت دوم) یک پیوند دوستی و دو پیوند دیگردشمنی باشد. در این حالت مثلث رابطه در حالت توازن یا بی تنشی است. زیرا دو نفر (دو گره) که با یکدیگر دوست هستند، دشمن مشترکی نیز دارند (شکل c ۱.۲).
- حالت سوم) دو پیوند دوستی و یک پیوند دشمنی باشد. این حالت، حالت نامتوازن است. مثال این قسمت در اول این بخش تحت عنوان سه فرد الف، ب و ج بررسی شد (شکل b ۱.۲).
- حالت چهارم) در این حالت رابطه هر سه نفر مثبت باشد. به این حالت، حالت فردوس نیز گفته می‌شود. در حالت رابطه در حال توازن و بی تنش است (شکل a ۱.۲).



شکل ۱.۲: مثلث های متوازن و نامتوازن

در حالت کلی در مثلث رابطه، اگر ضرب علامت پیوندها در یکدیگر مثبت شود، مثلث در حالت متوازن است و اگر ضرب آن‌ها در هم برابر ۱− شود، مثلث در حالت نامتوازن یا پرتنش است. در حالت بیشتر از سه گره، باید نحوه رابطه‌ها در مسیری که بین دو گره در شبکه بوجود می‌آید را بررسی کرد. به‌طور مثال شکل(۲.۲) را بررسی می‌کنیم. در این شکل، اگر علامت‌های پیوندهای هر مسیری که بین ۱ و ۳ بر قرار است را در یک دیگر ضرب کنیم، مثبت بدست می‌آید. در این حالت بیان می‌کنیم که رابطه ۱ و ۳ در حالت توازن است.



شکل ۲.۲: توازن در یک حلقه

حال که توازن در یک مثلث و یک مسیر بسته را بررسی کردیم، باید نظریه توازن را برای یک شبکه تعمیم بدهیم. به علت آن که پژوهش ما در مورد شبکه‌های کامل است، صرفاً این تعمیم را برای شبکه کامل بیان می‌کنیم. برای شبکه‌های تنگ روش‌های مختلفی جهت مشخص کردن توازن وجود دارد که به آن‌ها نمی‌پردازیم.

در نظریه توازن در شبکه‌های کامل صرفاً حلقه‌هایی با سه گره را بررسی خواهیم کرد. به این شکل توازن در چنین شبکه ای را تعریف می‌کنیم که هر گاه تمام حلقه‌های بسته سه تایی که در شبکه موجود هستند، طبق تعریفی که از مثلث متوازن داشتیم، توازن داشتند، بیان می‌کنیم که چنین شبکه ای در حال توازن است. حال با توجه به این موضوع می‌توانیم معیاری برای چنین شبکه ای بسازیم که میزان متوازن بودن آن را نشان دهد. اگر تعداد مثلث‌های متوازن را بر تعداد تمام مثلث‌های موجود در شبکه تقسیم کنیم، معیاری بین صفر و یک از میزان توازن در شبکه به ما می‌دهد. به گونه ای که هر چه به یک نزدیک تر باشد، شبکه متوازن تر است.

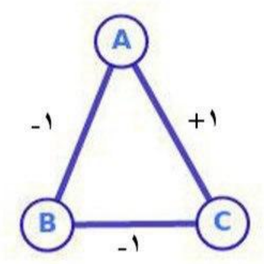
کلیات این مسئله همان چیزی است که کارترایت و هراری در سال ۱۹۵۶ مطرح کردند. نظریه ای که می‌گوید یک شبکه در حالت تعادل است اگر و تنها اگر بتوان تمام اعضای آن را به دو گروه تقسیم کرد به طوریکه روابط تک تک اعضای یک گروه با گروه دیگر دشمنی باشد ولی روابط خود اعضا گروه با یکدیگر کاملاً دوستی باشد. به این نوع شبکه، شبکه دو قطبی هم گفته می‌شود. کارترایت و هراری بیان می‌کنند که چنین شبکه ای در حال تعادل، دارای کمترین تنش یا کمترین انرژی است. قصد ما نیز رساندن شبکه با دینامیک خاصی به کمترین انرژی است که در بخش‌های پیش‌رو مفصل توضیح داده خواهد شد.

۲.۲ انرژی شبکه

از بحث‌های قبل می‌توانیم بگوییم که در یک شبکه علامت‌دار هدف می‌تواند این باشد که با یک دینامیک، شبکه از حالت نامتوازن به حالت متوازن برسد. اولین بار آنتال [5] و دوستانش دو مدل دینامیک برای شبکه طبق نظریه توازن مطرح کردند. طبق دینامیک آنتال، دینامیک تحول تغییرات در پیوندها را به شرطی می‌پذیرد که در جهت کاهش تنش باشد [۱۵]. مارول [6]، استروگتس [7] و کلینبرگ [8] نیز با نسبت دادن انرژی به شبکه، نشان دادند که در طی تغییرات بر اثر دینامیک، انرژی شبکه از بیشترین مقدار خودش یعنی وقتی همه مثلث‌ها در حالت نامتوازن هستند به کمترین مقدار خودش یعنی وقتی که همه مثلث‌ها در حالت متوازن باشند حرکت خواهد کرد. در این حالت، سامانه در حالت ایستا خواهد بود [۲۰].

در قسمت قبل از مفهومی به نام انرژی یا تنش نام بردیم که اگر بخواهیم شبکه را به حالت متوازن ببریم لازم است آن را به کمترین مقدارش برسانیم. انرژی را در چنین شبکه ای چطور تعریف می‌کنیم؟ برای تعریف انرژی از خود تعاریفی که برای حالت توازن استفاده کردیم، کمک می‌جوییم. نخست انرژی در یک مثلث رابطه را بررسی می‌کنیم. حاصلضرب علامت‌های رابطه‌ها در یک منفی به عنوان انرژی مثلث معرفی می‌کنیم. به‌طور مثال شکل(۳.۲) نگاه کنید.

[5] Antal
[6] Marvel
[7] Strogatz
[8] Kleinberg



شکل ۳.۲: توازن در یک حلقه

پس انرژی برای یک مثلث خواهد بود :

$$u_{ABC} = -S_{AB} \times -S_{BC} \times S_{AC} = +۱ \qquad (۱.۲)$$

حال که برای یک مثلث انرژی را تعریف کردیم، در یک شبکه کامل که مجموعه ای از این مثلث‌ها وجود دارد، انرژی کل را از جمع انرژی تمام مثلث‌ها به دست می‌آوریم و متوسط آن را به عنوان انرژی کل سامانه در نظر می‌گیریم. بنابر این خواهیم داشت:

$$U = \frac{-۱}{\binom{n}{۳}} \times \sum S_{ij}S_{jk}S_{ki} \qquad (۲.۲)$$

که در آن S_{nm} نشان دهنده‌ی علامت پیوند دو گره‌ی n و m می‌باشد. دلیل آن که یک منفی در آن ضرب می‌کنیم به خاطر خاستگاه فیزیکی آن است. چون در فیزیک ، حالت‌های ایستا سامانه حالت‌های با کمترین انرژی است؛ بنابراین انرژی مثبت یک، یعنی سامانه در حالت کاملاً دشمنی قرار دارد و در حالت منفی یک، سامانه در حالت کاملاً دوستی قرار گرفته‌است. البته این معادله را می‌توان به این شکل تعبیر کرد، تفاضل تعداد مثلث‌های متوازن از تعداد مثلث‌های نامتوازن که به صورت ریاضی به شکل زیر است:

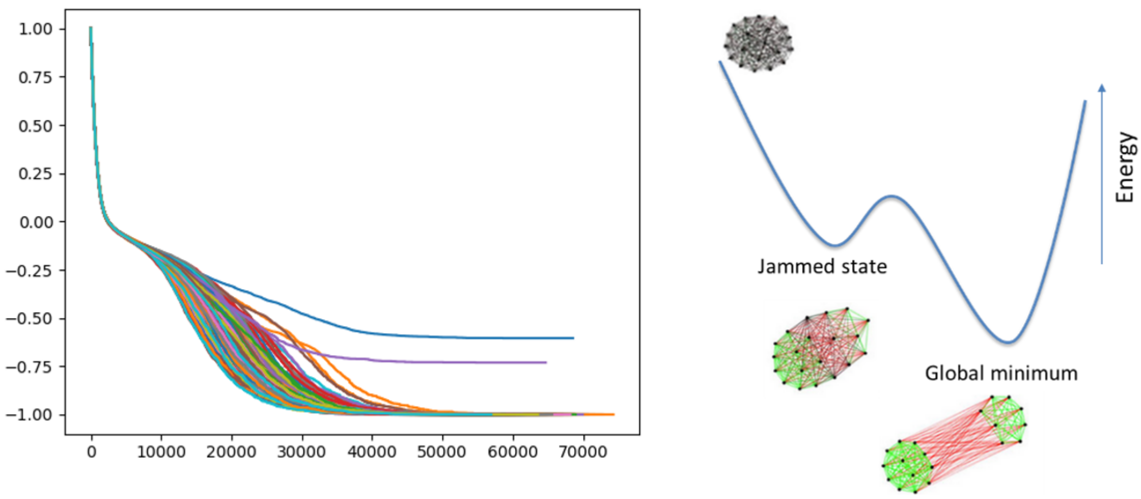
$$U = \frac{-۱}{\binom{n}{۳}} \times \sum N_b - N_u \qquad (۳.۲)$$

که N_b تعداد مثلث های متوازن و N_u تعداد مثلث های نامتوازن است.

اما یک موضوع در اینجا مطرح می‌شود، و آن این است که در سامانه‌های فیزیکی لزوماً فقط یک کمینه جهانی برای سامانه پیدا نمی‌شود. گاهی سامانه دارای کمینه‌های موضعی است و در آن‌ها می‌ماند. آیا سامانه ای که ما در نظر گرفته‌ایم نیز دارای کمینه موضعی است؟ بررسی‌هایی که کارترایت و هراری انجام داده‌اند صرفاً با تمرکز بر کمینه جهانی انرژی بوده‌است، اما تیپور آنتال، پاول کراپیوسکی [۹] و سیدنی ردنر [۱۰] مشاهده کرده‌اند که اگر تعداد زیادی سامانه را بررسی کنند با حالت‌های کمینه

[9] Pavel Krapivsky
[10] Sidney Redner

موضعی و حالات مسدود نیز مواجه خواهند شد [۱۵] . حالاتی که کمتر در پژوهش‌ها بدان‌ها پرداخته شده‌است و اطلاعات کمی از آن در دسترس است. مارول، استروگتس و کلینبرگ در سال ۲۰۰۹ نشان دادند که انرژی حالات مسدود نمی‌تواند بیشتر از میانه طیف انرژی سامانه باشد [۲۰] . کمینه‌های موضعی و حالات مسدود، درست است که بصورت نادر در سامانه رخ می‌دهند، اما حالات بسیاری مهمی هستند زیرا از حرکت سامانه به سمت کمینه جهانی آن جلوگیری می‌کنند و سامانه را در انرژی بالاتر از کمینه جهانی آن نگه می‌دارند. نمونه از حالت‌های مسدود با (۱۰۰ گره) را در شکل (۴.۲) مشاهده می‌کنید. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید سامانه برای رسیدن به کمینه جهانی، راه‌های متفاوتی طی می‌کند که تعداد کمی از آن‌ها به یک حالت مسدود برخورد می‌کنند.



شکل ۴.۲: حالت کمینه جهانی و حالت‌های مسدود. همان‌طور که مشاهده می‌کنید در تعدادی کمی از حالات، سامانه در حالت‌های مسدود قرار می‌گیرد.

۳.۲ دینامیک شبکه متوازن

در قسمت قبل در مورد کاهش انرژی یا تنش شبکه با اصلاح روابط پیوندی بین گره‌ها را بحث کردیم. اما از جزییات دینامیک آن سخنی نگفتیم. تمام مواردی که تا به حال در مورد آن صحبت کردیم مانند: کمینه جهانی، حالات مسدود و کمینه‌های موضعی، حالت متوازن سامانه و حالت غیر متوازن آن و ... سامانه‌های استاتیکی بوده‌است. حال اگر سامانه ای در حالت نامتوازن بود با چه دینامیکی، تنش یا انرژی خود را کاهش خواهد داد؟

پس مابه یک دینامیک نیاز داریم که با تغییر علامت‌هایی در شبکه (تغییر علامت پیوندها) بتواند سطح تنش یا انرژی در شبکه را کاهش دهد. همان انتظاری که ما از روابط اجتماعی اطرافمان داریم و بارها آن را حس کرده‌ایم. یعنی به‌طور عادی نیز افراد در اجتماع سعی می‌کنند درطی زمان تنش خود با افراد دیگر (اجتماع) را کاهش دهند. نکته ای که در این میان است این است که آیا افراد صرفاً روابط اجتماعی خود به نفع کاهش تنش تغییر می‌دهند یا یک نگاه کل نگر نسبت به جامعه نیز دارند؟ منظور آنکه آیا سعی خواهند کرد با تغییرات پیوندها تنش یا انرژی کل شبکه را کاهش دهند یا خیر؟ پس به نظر می‌رسد با توجه به این دو نگاه، دو نوع رویکرد نیز در دینامیک شبکه موجود باشد.

در نگاه اول در شبکه، که نگاه موضعی به شبکه است، به این صورت، پیوند یک گره زمانی تغییر خواهد کرد که تنش یا انرژی بصورت موضعی کم‌تر شده باشد. به‌طور مثال علامت یک پیوند از منفی به مثبت تغییر پیدا کرده‌است یا در یک مثلث با تغییر یک پیوند، انرژی مثلث کاهش پیدا کند. اما در نگاه دوم، که نگاه کل نگر است، اثر تغییر یک پیوند در کل سامانه دیده می‌شود، به این شکل که آیا تغییر یک پیوند، چه تأثیری در انرژی کل شبکه دارد. اگر انرژی کل شبکه را کاهش می‌دهد آن تغییر قابل پذیرش است و اگر کاهش نمی‌دهد، تغییر پذیرفتنی نیست.

نخست سراغ دینامیک موضعی می‌رویم. نوعی از آن که دینامیک موضعی سه تایی است به این شکل عمل می‌کند که یک مثلث بصورت تصادفی از کل شبکه کامل انتخاب می‌شود. اگر مثلث نامتوازن بود با تغییر یکی از پیوندها آن مثلث را به توازن می‌رسانیم و توجهی نداریم که برای انرژی کل شبکه چه روی می‌دهد. اگر مثلثی که انتخاب کردیم، متوازن بود، دوباره یک مثلث دیگر انتخاب می‌کنیم. حال برای آنکه کار تا حدی مشخص تر شود چند نماد معرفی می‌کنیم. دلتا Δ ان را به عنوان تعداد مثلث‌های با پیوند منفی (-۱) معرفی می‌کنیم.

یعنی $\Delta_۳$ یک مثلث با سه پیوند منفی، $\Delta_۲$ ، یک مثلث با دو پیوند منفی و یک پیوند مثبت، $\Delta_۱$، مثلثی با یک پیوند منفی و دو پیوند مثبت و $\Delta_۰$ یعنی صفر پیوند منفی و سه پیوند مثبت. پس با توجه به تعریفی که هیدر بیان کرده بود و قبل تر آن را بیان کردیم، مثلث های متوازن، مثلث $\Delta_۲$ و $\Delta_۰$ است و مثلث های نامتوازن مثلث $\Delta_۳$ و $\Delta_۱$ است .

۴.۲ الگوریتم دینامیک تحول

حال الگوریتم دینامیک موضعی را بیان می‌کنیم.

- قدم اول) انتخاب یک مثلث بصورت تصادفی
- قدم دوم) الف) اگر مثلث انتخاب شده، $\Delta_۳$ بود، یک پیوند را بصورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و علامت آن را تغییر می‌دهیم. ب) اگر مثلث انتخاب شده، $\Delta_۱$بود، با احتمال Pپیوند منفی را به مثبت تغییر می‌دهیم یا با احتمال $۱ - P$ پیوند مثبت را به پیوند منفی تغییر می‌دهیم.

در این دو قدمی که گفته شد، بصورت موضعی یک مثلث به توازن می‌رسد، اما ممکن است باعث شود که مثلث دیگری از حالت متوازن خارج شود یا انرژی کل شبکه افزایش یابد. حال با توجه به این دو قدمی که بیان کردیم، سراغ یک شبکه N گره ای می‌رویم و بررسی می‌کنیم که برای این شبکه چه روی می‌دهد. چند پارامتر را تعریف می‌کنیم:

۱. تعداد پیوندهای موجود در شبکه:

$$L$$

۲. تعداد مثلث‌های موجود در شبکه:

$$N_\Delta = \frac{N \times (N-۱) \times (N-۲)}{۶} \tag{۴.۲}$$

۳. تعداد مثلث‌های با n پیوند دشمنی (-۱):

$$N_n$$

۴. چگالی مثلث‌های با n پیوند دشمنی (-۱):

$$n_n = \frac{N_n}{N_\Delta} \tag{۲.۵}$$

۵. تعداد پیوندهای دوستی موجود در شبکه:

$$L^+ = \frac{۳ \times N_۰ + ۲ \times N_۱ + ۱ \times N_۲}{N - ۲} \tag{۲.۶}$$

۶. تعداد پیوندهای دشمنی موجود در شبکه:

$$L^- = \frac{۳ \times N_۳ + ۲ \times N_۲ + ۱ \times N_۱}{N - ۲} \tag{۲.۷}$$

۷. برای هر پیوند مثبت، تعداد مثلث‌های از نوع Δ_k که پیوند انتخاب شده در آن موجود است را می‌شماریم، خواهیم داشت:

$$(۳ - N) \times N_k$$

پس می‌توانیم متوسط این مقدار را به ازای تمام پیوندهای مثبت حساب کنیم. خواهیم داشت:

$$N_k^+ = \frac{(۳ - N) \times N_k}{L^+} \tag{۲.۸}$$

۸. به همین شکل برای متوسط پیوندهای منفی خواهیم داشت:

$$N_k^- = \frac{k \times N_k}{L^-} \tag{۲.۹}$$

۹. می‌دانیم که تعداد مثلث‌های متصل به یک پیوند برابر با $N - ۲$ پس می‌توانیم برای کمیت‌هایی که در ۷ و ۸ تعریف کرده‌ایم، چگالی متناظر آن تعریف نماییم. پس خواهیم داشت:

$$n_k^+ = \frac{N_k^+}{N - ۲} = \frac{(۳ - k) \times n_k}{۳n_۰ + ۲n_۱ + n_۲} \tag{۲.۱۰}$$

۱۰. به همین شکل برای چگالی پیوندهای منفی برابر خواهد بود با:

$$n_k^- = \frac{N_k^-}{N-۲} = \frac{k \times n_k}{۳n_۳ + ۲n_۲ + n_۰} \quad (۱۱.۲)$$

۱۱. π^- و π^+ به ترتیب احتمال تغییر یک پیوند از حالت منفی (ـ) به حالت مثبت (+) و تغییر از حالت مثبت (+) به حالت منفی (ـ) هستند. همان طور که پیش‌تر گفتیم، در دینامیک، زمانی که به مثلث $\Delta_۱$ می‌رسیم، می‌توانیم از میان دو حالت، یکی را انتخاب کنیم، این که با احتمال P یک پیوند منفی(ـ) را به مثبت(+) تغییر بدهیم یا در حالتی دیگر، با احتمال $۱ - P$ یکی از پیوندهای مثبت(+) را به منفی(ـ) تغییر دهیم. برای دو کمیت π^- و π^+ خواهیم داشت:

$$\pi^+ = (۱ - P)n_۱ \quad (۱۲.۲)$$

و

$$\pi^- = Pn_۱ + n_۳ \quad (۱۳.۲)$$

حال با تعاریفی که داشتیم می‌توانیم تغییرات چگالی مثلث‌های مختلف بر حسب زمان را محاسبه نماییم. یعنی خواهیم داشت:

$$\frac{dn_۰}{dt} = \pi^- n_۱^- - \pi^+ n_۰^+ \quad (۱۴.۲)$$

$$\frac{dn_۱}{dt} = \pi^+ n_۰^+ + \pi^- n_۲^- - \pi^- n_۱^- - \pi^+ n_۱^+ \quad (۱۵.۲)$$

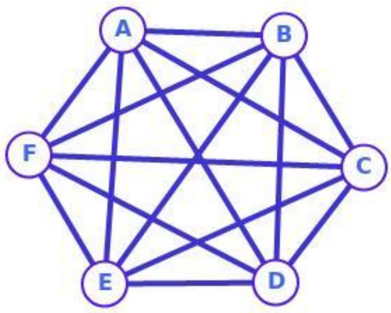
$$\frac{dn_۲}{dt} = -\pi^+ n_۲^+ + \pi^- n_۳^- - \pi^- n_۲^- + \pi^+ n_۱^+ \quad (۱۶.۲)$$

$$\frac{dn_۳}{dt} = \pi^+ n_۲^+ - \pi^- n_۳^- \quad (۱۷.۲)$$

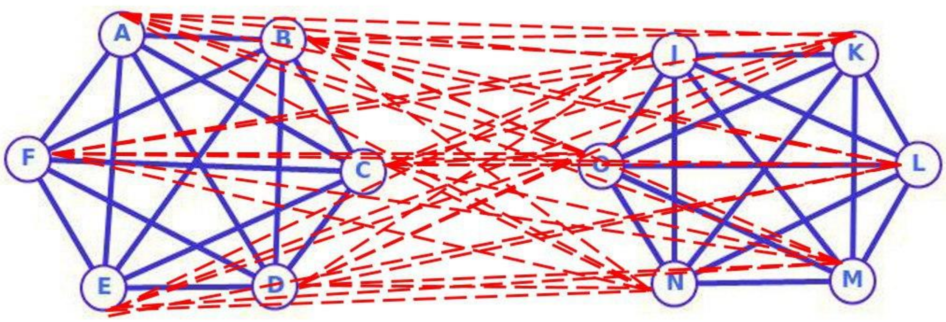
حال اگر در معادلات بالا شرط $\pi^+ = \pi^-$ قرار بدهیم، با کمی کار محاسباتی و برابر گذاشتن تمام معادلات بالا برابر صفر (به علت این که قصد داریم در لحظه ای جواب‌ها را بدانیم که تعداد مثلث‌ها تغییری نداشته باشند) خواهیم داشت:

$$\rho_\infty = \begin{cases} ۱/(\sqrt{۳(۱-۲p)}+۱) & p \leq \frac{۱}{۲} \\ ۱ & p > \frac{۱}{۲} \end{cases} \tag{۱۸.۲}$$

با توجه به چیزی که به دست آورده‌ایم، اگر احتمال اتصال آنکه یک پیوند منفی(−) را به پیوند مثبت(+) تغییر دهیم بیشتر از $\frac{۱}{۲}$ شود، در نهایت چگالی پیوندهای مثبت(+) در سامانه به یک خواهد رسید و در واقع حالت فردوس یا اتوپیا [11] (اینکه تمام پیوندها مثبت(+) هستند) رخ می‌دهد (مانند شکل ۵.۲) . در حالتی که احتمال آنکه یک اتصال منفی را به مثبت تغییر دهیم کمتر از $\frac{۱}{۲}$ باشد، چگالی پیوندهای مثبت(+) در طی دینامیک رشد خواهد کرد و در نهایت به حالت دو قطبی می‌رسیم (مانند شکل ۶.۲).



شکل ۵.۲: حالت فردوس یا اتوپیا که در آن تمام پیوندهای از نوع دوستی(مثبت) هستند.



شکل ۶.۲: حالت دو قطبی که در آن دو گروه دوستی به وجود آمده است(رنگ های آبی) و میان این دو گروه دشمنی حاکم است (رنگ قرمز).

[11] Utopia

در این حالت شبکه به دو دسته تقسیم خواهد شد که رابطه هر گره از یک دسته با دسته دیگر دشمنی است ولی رابطه خود گره‌ها در دسته خود، دوستی است. دینامیکی که با آن شبکه را در این قسمت مورد بررسی قرار دادیم، دینامیک موضعی در شبکه است. اما در دینامیک نوع دوم که در ادامه آن را بررسی خواهیم کرد، به حالت و انرژی کل سامانه در دینامیک توجه دارد. یعنی در هر قدم زمانی تحول به گونه پیش خواهد رفت که تنش یا انرژی در شبکه کاهش یابد یا تغییر نکند. از دینامیک‌های معروف در این زمینه دینامیک CTD است که اگر بخواهیم در یک جمله آن را تعریف کنیم می‌توانیم بگوییم:

در هر فرآیند یک پیوند به شرطی تغییر می‌کند که اثر این تغییر در شبکه کاهش انرژی یا تنش شبکه باشد[۱۵].

این جمله در معنای ساده به این شکل تعبیر می‌شود که اگر تعداد مثلث‌هایی که نامتوازن بودند و این پیوند در آن‌ها نیز مشترک بود از تعداد مثلث‌هایی که متوازن بودند و شامل همین پیوند بودند، بیشتر باشد با تغییر علامت این پیوند تعداد مثلث‌های نامتوازن کمتر، و تعداد مثلث‌های متوازن بیشتر می‌شود و در نتیجه آن انرژی کل شبکه کاهش می‌یابد.

حال عملی که بیان نمودیم را می‌توان به صورت یک عبارت ریاضی نوشت. هدف ما این است که پس از تغییر علامت، جمع روی تمام مثلث‌های که یک پیونددر آن‌ها قرار دارد، مثبت شود. پس علامت تغییر این پیوند، برابر با جمع ضرب‌های دو ضلع دیگری که با پیوند انتخاب شده، مثلث تشکیل داده‌اند. در نتیجه معادل دیفرانسیل این تغییر بدین شکل خواهد بود:

$$\frac{dS_{ki}}{dt} = \sum_{j} S_{kj} S_{ji} \qquad (۱۹.۲)$$

اگر به معادله دقت کنیم متوجه می‌شویم که این معادله در صورتی که حتی تمام پیوندها نیز مثبت (دوستی) باشند، هنوز مقدارهای پیوندها را افزایش خواهد داد در حالی که ما انتظار داریم بعداز آنکه انرژی شبکه را کاهش داد، دینامیک متوقف شود، درحالی که چنین روی نمی‌دهد. پس نیاز است که قیدهایی بر روی این معادله قرار داد شود. مانند آن که اگر مقداری که برای پیوندها بدست آمد بیشتر از$+1$ شود، آن را به $+1$ تبدیل می‌کنیم و اگر مقدار پیوند کمتر از -1 شود، آن را به -1 برمی‌گردانیم.

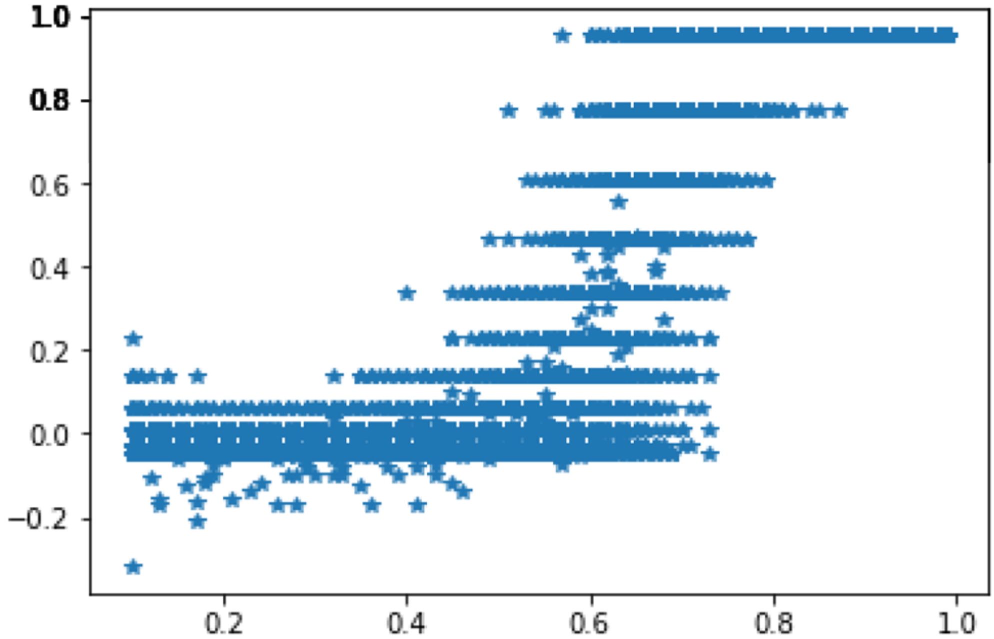
حال برای این معادله یک شبیه‌سازی عددی به ترتیبی که در ادامه می‌آید، ارائه می‌دهیم.

- قدم اول) یک شبکه کامل از پیوندها در نظر می‌گیریم.
- قدم دوم) یک متغیر Pبه عنوان نسبت پیوندهای دوستی به تمام پیوندهای شبکه در نظر می‌گیریم و مقدار آن را برای هر بار که دینامیک را اجرا می‌کنیم، مقادیری بین صفر و یک در نظر می‌گیریم. حال بر اساس همین مقدار P، توزیعی از پیوندهای مثبت (دوستی) در شبکه کامل ایجاد می‌کنیم و بر اساس همین P تعدادی از پیوندهای را مثبت می‌کنیم تا نسبت را رعایت کنیم.

- قدم سوم) دینامیک را بر روی این شبکه ایجاد شده، اجرا می‌کنیم و تغییرات پیوندها را انجام می‌دهیم.

- قدم چهارم) برای هر شبکه با P مشخص چندبار قدم دوم و سوم را اجرا می‌کنیم و بعد از هر اجرا، متوسط پیوندهای شبکه را حساب می‌کنیم و آن را m می‌نامیم.

- قدم پنجم) متوسط پیوندهای شبکه را برای pهای مختلف رسم می‌کنیم. نتیجه در شکل ۷.۲ آمده‌است.



شکل ۷.۲:   متوسط پیوندهای نهایی شبکه به نسبت اولیه پیوندهای دوستی به تمام پیوندهای شبکه [۱۵] .

همان‌طور که از شبیه‌سازی مشخص است، به ازای مقادیر P کوچکتر از ۰/۴، مقدار متوسط پیوندهای شبکه (m) مقداری در حدود صفر خواهد داشت. تعبیر این مقدار این است که با توجه به ساختاری که از کرتوایت و هراری پیش‌تر نقل کردیم، در حالت متوازن، اتفاقی که روی خواهد داد، تشکیل دو حوزه دارای پیوندهای تمام مثبت (دوستی) است که این دو حوزه با یکدیگر پیوندهای منفی (دشمنی) برقرار کرده‌اند (۶.۲). در نتیجه این مقدار صفر به معنی آن است که تعداد پیوند های این دو حوزه تقریبا با یکدیگر برابر است اما همان طور که از شبیه سازی مشخص است بعد از مقدار ۰/۴ ، سایز یکی از حوزه ها شروع به رشد می‌کند به طوری که مقدار m رشد صعودی به خود می‌گیرد. تا جایی که یکی از حوزه ها بر دیگری کاملا غلبه پیدا می‌کند و مقدار m به یک می‌رسد (۵.۲).

ما این نمودار را با استفاده از حل عددی معادله (۱۹.۲) رسم کردیم. اما این نمودار از شبیه‌سازی دینامیک نیز قابل استخراج و مقایسه با حل عددی است. به علت آن که در ادامه نیز از شبیه‌سازی استفاده خواهیم نمود، شبیه‌سازی از این فرایند با استفاده از دینامیک CTD ارائه خواهیم نمود. علت استفاده از دینامیک CTD آن است که در فصل بعدی نیز شبیه‌سازی‌های پژوهش بر اساس این دینامیک خواهد بود.

قدم‌های این دینامیک بر اساس زیر می‌باشد:

- قدم اول) یک شبکه کامل با n گره
- قدم دوم) یک ماتریس مجاورت که در آن هر پیوند با احتمال P به شکل دوستی (مثبت) و با احتمال $1-P$ دشمنی (منفی) متصل قرار داده شده‌است.
- قدم سوم) یک پیوند را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. متناظر با آن درایه ماتریس آن پیوند را نیز انتخاب می‌کنیم.
- قدم چهارم) انرژی تمام مثلث‌های که این پیوند در آن‌ها قرار دارد را با فرمول (۱.۲) و (۷.۳) حساب می‌کنیم.
- قدم پنجم) اگر این انرژی مثبت بود، علامت پیوند انتخاب شده را جهت کاهش انرژی مثلث‌ها، تغییر می‌دهیم ولی اگر این انرژی منفی بود، در آن تغییری ایجاد نمی‌کنیم.
- قدم ششم) اگر این انرژی برابر با صفر شده بود، آن را با احتمالی تغییر می‌دهیم. فعلاً به‌طور پیش فرض آن احتمال را برابر با ۰/۵ قرار می‌دهیم.
- قدم هفتم) موارد یک تا ۶ را به اندازه قدم‌های زمانی انتخابی تکرار می‌کنیم. البته تعداد خود این قدم‌ها نیز مهم است، باید تعدادی انتخاب شود که دینامیک فرصت این را داشته باشد که بتواند حداقل یک بار همه پیوندهای شبکه را انتخاب کند. به‌طور مثال از مرتبه تعداد گره به توان دو.

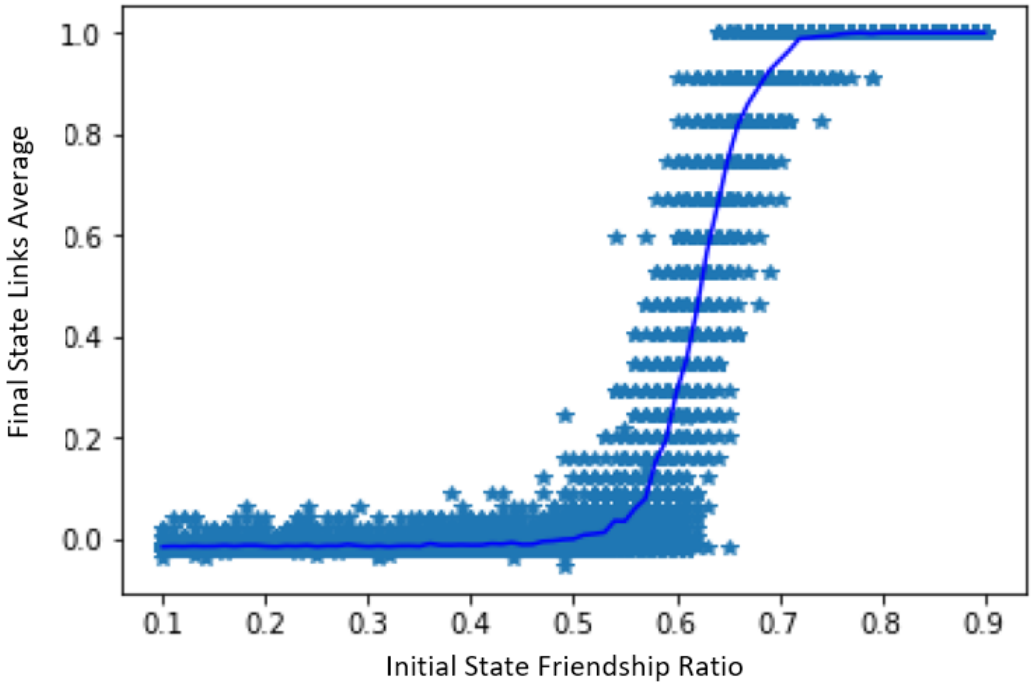
$$n \times n \leq number\ of\ iteration \tag{۲۰.۲}$$

در پایان قدم‌های زمانی، مقدار انرژی کل شبکه و متوسط اندازه پیوند را ثبت می‌کنیم.

- قدم هشتم) موارد یک تا هفت را به اندازه کافی تکرار می‌کنیم (آنسامبل گیری [۱۲])
- قدم نهم) تمامی موارد بالا را برای Pهای مختلف تکرار می‌کنیم.

حال مانند شبیه‌سازی عددی، در این قسمت نیز نمودار مقادیر m را بر حسب Pهای مختلف رسم می‌نماییم؛ که شکل ۸.۲ نتیجه آن است. همان‌طور که انتظار داشتیم، در این نمودار نیز، در حدود $P=$ ۰/۴۵ حالت‌های نهایی دو حوزه دوستی (مثبت) دارای سایز شبیه به هم بوده‌است و بعد از آن مقدار یکی از حوزه‌ها رشد کرده و در نهایت فقط یک حوزه دوستی (مثبت) باقی مانده که به آن اتوپیا یا فردوس هم گفته می‌شود [۱۷] .
تا این قسمت مروی کوتاه بر نظریه توازن، انرژی و دینامیک‌های آن داشتیم و در فصل بعد به سراغ سن و زمان در شبکه خواهیم رفت.

[12] Ensembles



شکل ۸.۲: متوسط پیوندهای نهایی شبکه به نسبت اولیه پیوندهای دوستی به تمام پیوندهای شبکه [۱۵] .

۵.۲ کمینه‌های محلی

حالت‌های شبه پایدار، مسدود یا کمینه‌های محلی حالت‌هایی هستند که که سامانه در روند تحول خود، ممکن است داخل یک حالت خاص شود و دیگر نتواند به حالت نهایی برسد. طبق بررسی‌های مارول [۱۳] ، اشتروگتز [۱۴] و کلینبرگ [۱۵] در مقاله خود نشان داده‌اند که شبکه‌های کوچک کمینه یا حالت مسدود ندارند، و حالت‌های مسدود در شبکه‌های با ۸،۶، ۹ یا بیشتر از ۱۱ گره روی می‌دهد [۲۰] .

برای روشن‌تر شدن موضوع کمی باید خود بحث حالت مسدود را باز کرد. با توجه به الگوریتمی که قبل‌تر از حالت توازن تعریف نمودیم، حال منظور از حالت مسدود به صورت ساده این است که زمانی که هر کدام از پیوندها به صورت تصادفی انتخاب شود، بر اثر تغییر علامت آن پیوند، انرژی سامانه کاهش نمی‌یابد و به همین علت انرژی شبکه به کم‌ترین مقدار خود نمی‌رسد.

برای آن که به صورت دقیق‌تر به مسئله به پردازیم، لازم است که مفهومی به نام همسایگی را تعریف نماییم. دو پیکربندی[۱۶] زمانی می‌توانیم بگوییم همسایه هستند که به توان با تغییر علامت‌های پیوندها به دیگر پیکربندی رسید. با توجه به این تعریفی که داریم، حالت مسدود که توسط آنتال تعریف شد [۲۱] ، یک حالت مسدود، پیکربندی است که از تمام پیکربندی‌های همسایه

[13] Marvel
[14] Strogatz
[15] Kleinberg
[16] Configuration

خود، انرژی بالاتری داشته باشد.

در پژوهشی در سال ۲۰۰۹ که توسط مارول، استروگتز و کلینبرگ انجام گردید، با استفاده از گروه خاصی از شبکه‌ها، به نام شبکه‌های پالی [17] [۲۳] و نتیجه سایدل [18] [۲۲] برای دو شبکه مختلف نشان داده شد که حالت‌های مسدود با انرژی‌های بالا و نزدیک به صفر بسیار کم روی خواهد داد، و در ادامه ثابت خواهیم کرد که مقدار انرژی این حالات، بیشتر از صفر نخواهد بود [۲۰] . مارول، اشتروگتس و کلینبرگ در مقاله خود، از واژه حالت مسدود اکید [19] در مورد، حالات مسدود که انرژی آن‌ها تقریباً صفر هستند استفاده می‌کنند زیرا تعدادشان بسیار کم و به سختی ایجاد می‌شوند.

برای اثبات این که یک حالت مسدود نمی‌تواند انرژی بالاتر از صفر داشته باشد، می‌دانیم که هر پیوند حالت مسدود حداقل به تعداد مثلث‌های متوازن، در مثلث‌های نامتوازن مشارکت داشته‌است. به علت آن که با تغییر علامت از یک نوع حالت به حالتی با انرژی بیشتر تبدیل می‌شود. بر همین اساس اگر N زوج باشد، یک پیوند در $\frac{(N-۲)}{۲}$ مثلث نامتوازن خواهد بود و اگر N فرد باشد، در $\frac{(N-۳)}{۲}$ مثلث مشارکت خواهد داشت.

پس حالا اگر بخواهیم انرژی را بر حسب مشارکت پیوندها در مثلث‌های متوازن و نامتوزان حساب کنیم خواهیم داشت:

$$U \leq \frac{-۱}{۳}\binom{N}{۲} \times \frac{[(N-۲-\frac{N-۲}{۲}) - \frac{N-۲}{۲}]}{\binom{N}{۳}} = ۰ \qquad (۲۱.۲)$$

با شرط آن که N زوج باشد و اگر N فرد باشد خواهیم داشت:

$$U \leq \frac{-۱}{N-۲} \qquad (۲۲.۲)$$

اما سئوالی که پیش می‌آید این است که آیا یک حالت مسدود می‌تواند به این مقدار انرژی دست پیدا کند؟ می‌توان برای پاسخ به این سئوال به سراغ حل شبیه‌سازی رفت. برای این منظور یک شبکه کامل را در نظر بگیرید که علامت‌های پیوندهای آن به صورت تصادفی قرار داده شده‌است. حال پیوند نامتوازن را این گونه تعریف می‌نماییم که اگر بیشتر از نیمی از تعداد مثلث‌هایی که این پیوند در آن شرکت دارد، از نوع نامتوازن باشد، می‌گوییم آن پیوند نامتوازن است.

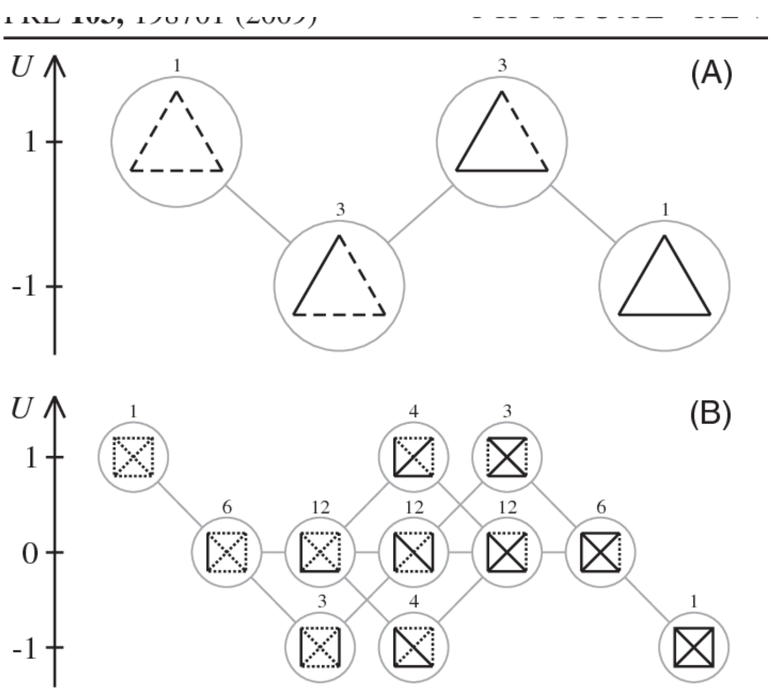
حال اگر تمام این پیوندها را در یک گروه قرار بدهیم و از میان آن‌ها به صورت تصادفی یک پیوند را انتخاب کرده و علامت آن را تغییر می‌دهیم و این روند را تا رسیدن به یک کمینه محلی ادامه می‌دهیم.

بعد از بررسی گسترده به این شکل که گفته شد، فقط دو مثال کوچک از انرژی صفر در حالت مسدود مشاهده شد. مثال اول از یک شبکه با شش گره که شامل یک دوره با پنج پیوند که تمام آن‌ها مثبت و باقی پیوندها منفی هستند تشکیل شده‌است. مثال بعدی یک شبکه با ده گره است که فقط در $۱۰^۸$ بررسی مختلف، فقط هفت مورد سامانه مسدود با انرژی صفر پیدا شده‌است و هر چه تعداد گره‌ها را افزایش دهیم، احتمال رویداد آن به صفر می‌رسد [۲۰]. انتال نیز نشان داده است که با افزایش N

[17] Poley Grahps
[18] Seidel
[19] Strict Jammed State

احتمال یافتن چنین حالت مسدودی به صفر هدایت می‌شود [۱۵]. با توجه به مطالب گفته شده، احتمالا یافتن حالات مسدود با انرژی مساوی یا بیشتر از صفر، تقریبا صفر است. اما با توجه به نمونه هایی که در بررسی محاسباتی پیدا شدند، یعنی مدلی از شش گره و ده گره، می‌توان با الگوریتمی که به اسم گراف های پالی نام دارد، تعداد زیادی از این حالات مسدود را تولید کرد [۲۳].

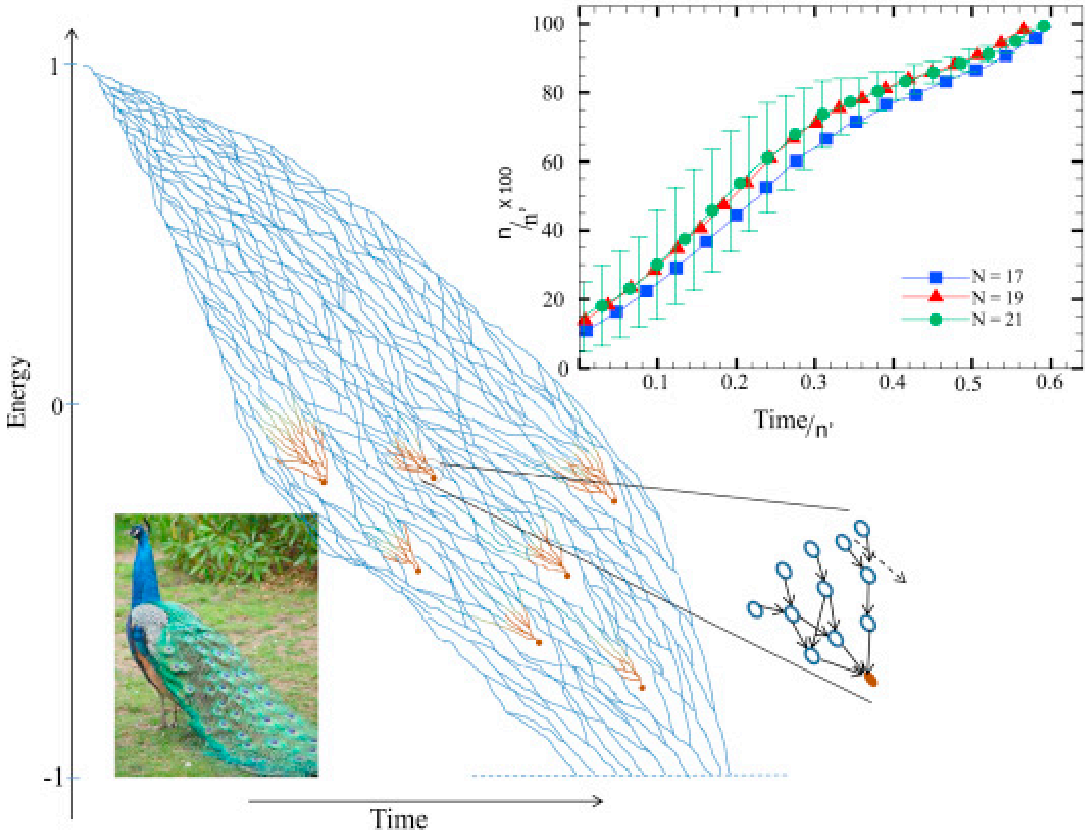
در شکل ۹.۲ نمونه‌هایی از پیکربندی همسایگی را برای شبکه‌هایی با سه و چهار گره مشاهده می‌کنید.



شکل ۹.۲: شکل A همسایگی‌ها را در پیکربندی با سه گره نمایش می‌دهد. هم‌چنین شکل B همسایگی‌ها را در پیکربندی با چهار گره نمایش می‌دهد. [۲۰].

اما به‌طور مختصر در مورد ساختار تشکیل این حالات مسدود بحث می‌کنیم. همان‌طور که در دینامیک سامانه بیان کردیم، سامانه به سمت کاهش تنش یا انرژی در حال حرکت است. این روند در شروع دینامیک خیلی سریع‌تر رخ می‌دهد. در واقع پیوندهایی که جهت تغییر علامت انتخاب می‌شوند، غالباً باعث کاهش تنش شبکه می‌شوند. اما در حالت‌هایی که سامانه در کمینه جهانی تنش خود، تعادل نهایی یا کمینه‌های محلی قرار می‌گیرد، تعداد پیوندی که باعث می‌شوند انرژی سامانه کاهش یابد، بسیار کم‌تر از حالات اولیه سامانه خواهد بود.

بنابراین با توجه به شکل (۱۰.۲) راه‌های مخروطی شکل کاهش انرژی به سمت کمینه انرژی حرکت می‌کند. تمامی این مراحل با استفاده از همیلتونی تنشی که برای شبکه می‌نویسیم و مفهومی به نام مشارکت و شناسایی مسیرهایی که به حالت‌های مسدود می‌انجامد مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته‌است. [۲۴].



شکل ۱۰.۲: مسیرهای مخروطی شکل کاهش تنش. مسیرهایی که به سمت حالت‌های مسدود پیش رفته‌اند، با رنگ قرمز مشخص شده‌اند [۲۴].

شاخص مشخص کردن مسیرهای مسدود که به نام نسبت مشارکت معکوس (IPR) [۲۰] شناخته می‌شود، در واقع میزان مشارکت گره‌ها در تحول سامانه را مورد بررسی قرار می‌دهد. طبق بررسی‌ها می‌توان حالات مسدود را با بررسی نسبت مشارکت معکوس و کم‌ترین مقدار ویژه یافت. یعنی در حالتی که مشارکت گره‌ها در نزدیکی آن افزایش می‌یابد [۲۵] [۲۶].

۶.۲ روش های تشخیص حالت های مسدود

همان‌طور که در قسمت قبل ذکر شد، در طی فرایند دینامیک ممکن است سامانه وارد حالت مسدود گردد. در این حالت که کمینه محلی محسوب می‌شود، انرژی سامانه نه کم می‌شود و نه افزایش می‌یابد. اما تشخیص این که در چنین حالتی قرار گرفته‌ایم، کمی پیچیدگی دارد. برای این که بفهمیم حالتی که در آن قرار گرفته‌ایم، کمینه محلی است یا با زمان بیشتر دادن به سامانه، باعث آن خواهد شد که سامانه این مرحله را نیز عبور کند، از یکسری ابزار در ادامه استفاده خواهیم کرد.

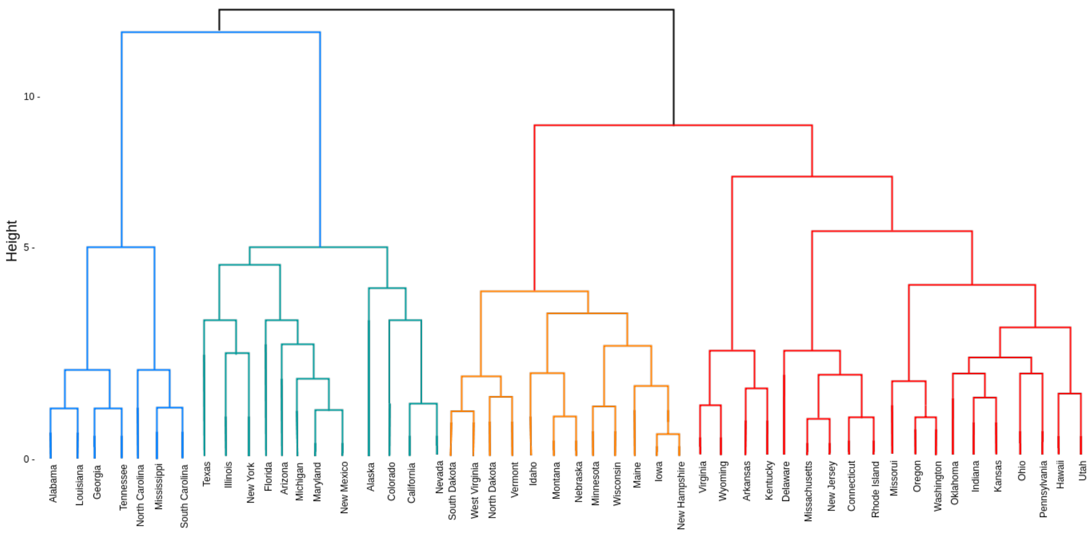
[20] Inverse participation ratio

یک روش ساده این است که با تغییر تک‌تک پیوندها، بررسی کنیم که آیا انرژی شبکه کاهش می‌یابد یا خیر. اگر انرژی شبکه کاهش یابد، پس حالت مسدود نبوده‌است. مورد ساده دیگر آن است که اگر دینامیک سامانه را از مرتبه بیشتر از $N^۳$ اجرا کرده باشیم، می‌شود با اطمینان گفت که سامانه در حالت مسدود است.

۷.۲ دندروگرام

خاستگاه کلمه دندروگرام [۲۱] از یونان باستان است. در یونان باستان دندرو به معنی «درخت» و گرام به معنی «کشیدن» است. یک دندروگرام، نمایش بصری (درختی) همبستگی داده‌های ترکیب شده‌است. اجزائی که به صورت یکتا و بدون وابستگی به دسته خاصی هستند، در پایین‌ترین سطح قرار گرفته‌اند و به آن‌ها برگ گفته می‌شود. خوشه‌ها از ترکیب اجزا یکتا با یکدیگر به دست می‌آیند و خود خوشه‌ها به یکدیگر می‌پیوندند و به محل پیوند آن‌ها راس می‌گوییم. هر راس به دو زیر شاخه چپ و راست تقسیم می‌شود که هر زیر شاخه شامل برگ‌ها و خوشه‌های مختلف است. موارد استفاده دندروگرام، اغلب در زیست‌شناسی محاسباتی برای نشان دادن خوشه‌بندی ژن‌ها یا نمونه‌ها یا در دستگاه‌های حرارتی استفاده می‌شود. همچنین در علوم‌داده [۲۲] جهت تفکیک داده‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. شکل (۱۱.۲) یک نمونه از دندروگرام است.

چیز ی که از دندروگرام به دست می‌آوریم این است که چگونه هر خوشه با ایجاد یک پیوند U شکل بین یک خوشه غیرتکین و برگ‌هایش شکل می‌گیرد. راس نشان دهنده این است که کدام دو خوشه ترکیب گشته‌اند. طول دو پایه U-Link نشان دهنده فاصله بین خوشه‌های فرزند است. در نتیجه دندوگرام یک گراف با ساختار درخت است که در نقشه‌های گرمایی استفاده می‌شود تا نتیجه یک خوشه سلسله مراتبی دیده شود.
نتیجه خوشه‌بندی یا به صورت فاصله یا به صورت شباهت سطرها یا ستون‌های خوشه‌ای نشان داده می‌شود که وابسته به واحد اندازه‌گیری فاصله است. در ادامه دو مورد از این واحدها را توضیح می‌دهیم [۱۹] .



شکل ۱۱.۲: خوشه بندی ایالت‌های مختلف کشور آمریکا [۲۷] .

---

[21] Dendrogram
[22] Data Science

۱.۷.۲ فاصله اقلیدسی

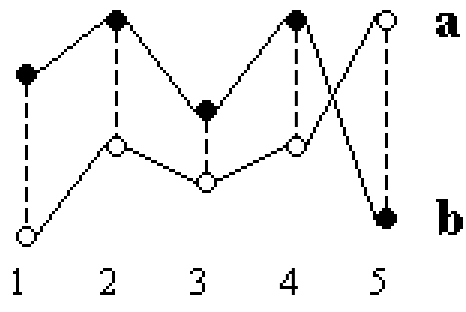
فاصله اقلیدسی در تعریف کلی به این شکل بیان می‌شود که فاصله اقلیدسی بین دو نقطه A و B و بعد d به صورت زیر محاسبه می‌شود. در نظر باید داشت که مفهوم بعد به معنای تعداد متغیرها در هر سطر یا ستون است. بنابر این خواهیم داشت:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{d}(A_j - B_j)^2} \tag{۲۳.۲}$$

واضح است که بر اساس معادله قبل، فاصله اقلیدسی مقداری بین صفر و یک خواهد گرفت. به این صورت که برای نقاط یکسان، مقداری برابر صفر، و برای نقاطی که با هم شباهت دارند، بیشتر از صفر خواهد بود. برای مثال به شکل (۱۲.۲) نگاه کنید. در این شکل، فاصله دو نقطه a و b، با پنج نقطه توصیف می‌شود. به همین منظور فاصله این دو نقطه با پنج مقدار

$$a_1 - b_1$$
$$a_2 - b_2$$
$$a_3 - b_3$$
$$a_4 - b_4$$
$$a_5 - b_5$$

توصیف می‌شود، که از فرمول ۲۳.۲ محاسبه شده‌است.



شکل ۱۲.۲: محاسبه فاصله نقاط از روش اقلیدس

۲.۷.۲ همبستگی

همبستگی پیرسون [۲۳] بین دو نقطه a و b با بعد d به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{cov(a.b)}{\sqrt{cov(a.a) \times cov(b.b)}} \tag{۲۴.۲}$$

که داریم:

$$cov(a.b) = \frac{۱}{d}\sum_{i=۱}^{d}(a_j - a^{'}) \times (b_j - b^{'}) \tag{۲۵.۲}$$

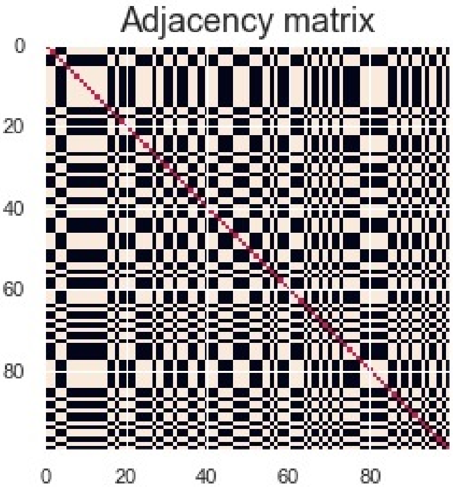
که در آن خواهیم داشت:

$$a^{'} = \frac{۱}{k}\sum_{i=۱}^{k} a_j \tag{۲۶.۲}$$

مقدار این کمیت با توجه به فرمول بیان شده، مقادیری بین -۱الی $+۱$ خواهد گرفت که اگر مقادیر تمام کاملاً همبسته باشد، مقدار آن برابر $+$ و اگر مقادیر کاملاً متفاوت باشند، مقدار آن برابر -۱ خواهد بود.

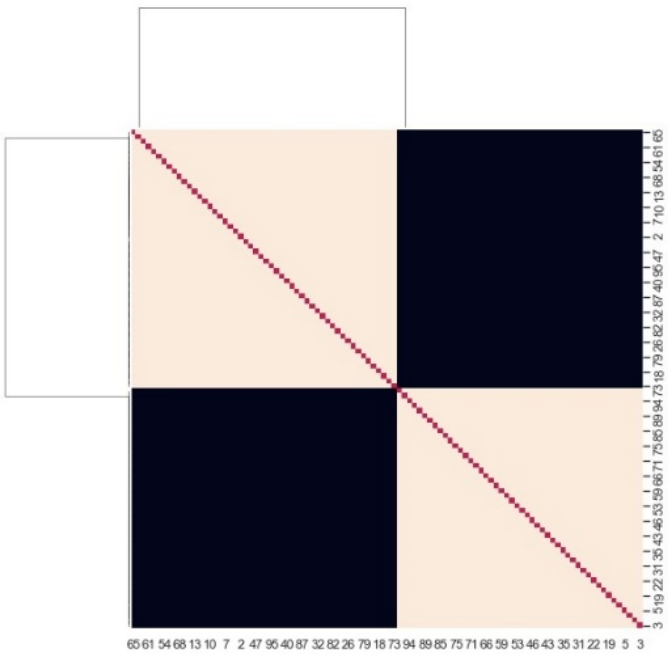
تمام این مواردی که بیان نمودیم، به این علت بود که بتوانیم با ماتریس مجاورت شبکه، حالت مسدود شبکه را تشخیص دهیم. برای این منظور و با استفاده از الگوریتم دندروگرام، می‌توانیم ماتریس مجاورت براین اساس مرتب کنیم و مشاهده کنیم که آیا امکان مرتب کردن ماتریس مجاورت برای مشاهده حالت نهایی تعادل وجود دارد یا خیر. به این علت که اگر در یک حالت مسدود قرار داشته باشیم نمی‌توانیم ماتریس مجاورت را مرتب نماییم. برای مثال شکل (۱۳.۲) را نگاه کنید. این نمودار ماتریس مجاورت سامانه است. اگر از الگوریتم دندروگرام استفاده نماییم به شکل (۱۴.۲) خواهیم رسید. در این الگوریتم از واحد اندازه گیری همبستگی پیرسون برای یک شبکه با ۱۰۰ گره استفاده شده است. دینامیک مورد استفاده، دینامیک توازن بوده است.

[23] Pearson



شکل ۱۳.۲:   ماتریس مجاورت شبکه که به صورت گرمایی نشان داده‌است.

و اگر الگوریتم دندروگرام را استفاده کنیم، خواهیم داشت:



شکل ۱۴.۲:   ماتریس مجاورت شبکه بعد از استفاده از الگوریتم دندروگرام

۸.۲ توازن درشبکه‌های واقعی

از جمله مسائلی که در توازن مطرح است، مسئله شبکه‌های واقعی مانند اینترنت، حمل و نقل، خطوط تلفن و غیره است و این سئوال مطرح است که آیا این شبکه‌ها متوازن هستند و اگر جواب بله است، با چه معیاری به این نتیجه رسیده‌ایم. با وجود تحقیقات بسیاری که برای آن شده‌است، هنوز جواب قطعی برای آن یافت نشده‌است. در این خصوص نیز دو دسته نظر در میان محققین مطرح است، که عده‌ای بر توازن شبکه‌ها اعتقاد دارند و عده‌ای دیگر به عدم توازن آن [۲۸] [۲۹] [۳۰]. اما علت چنین اختلافی چیست؟ برای این مهم، دو دلیل اصلی می‌توان ذکر کرد. دلیل نخست آن است که برای توازن در شبکه می‌توان تعاریف دیگری نیز بیان نمود. تعریف توازنی که از کارترایت و هراری نقل کرده‌ایم، یعنی شبکه‌ای متوازن است که تمام حلقه‌های بستهٔ آن تعداد زوج پیوند منفی داشته باشند، یک تعریف سخت به حساب می‌آید و از آن به عنوان «توازن قوی» یاد می‌شود و به ندرت در یک شبکه واقعی رخ می‌دهد. به همین منظور در ادامه سعی خواهیم کرد که معیارهای نسبی برای توازن به دست بیاوریم به طوری که مشخص کند این شبکه چقدر به شبکه کارترایت و هراری نزدیک شده‌است، بیان کنیم. البته شبکه با توازن قوی دارای ویژگی‌های جذابی است که باعث می‌شود این مدل پرکاربرد باشد. ویژگی‌هایی از جمله خوشه‌پذیر بودن شبکه، به طوری که می‌توان شبکه را به دو خوشه تقسیم کرد به طوری که در هر یک از خوشه‌ها تمام پیوندها مثبت باشد و بین این دو خوشه پیوندها با علامت منفی به یکدیگر متصل باشند [۳۱]. بنابراین توازن قوی می‌تواند معیاری برای انزوا در شبکه نیز نام برد. به این شکل که اگر شبکه‌ای در اجتماع یافتیم که به طور کامل می‌توانست توازن قوی را نشان دهد، سامانه در حالتی قرار گرفته است که که به دو خوشه مجزا تقسیم شده، یا به اصطلاح دو قطبی شده است. در اجتماع انسانی می‌توان این گونه بیان کرد که دو قطب در جامعه شکل گرفته، به گونه‌ای که هر اجتماع در درون خود، عقاید مشترک دارند، اما نسبت به گروه دیگر، در تضاد با یکدیگر هستند.

نکته مهمی که باید به آن توجه کرد این است که توازن قوی شرط کافی رابرای آن که نشان دهد شبکه چند خوشه شده‌است، ارضا می‌کند ولی شرط لازم نیست. به این معنا که اگر یک شبکه دو قطبی مشاهده کردیم، لزوماً بر اثر توازن قوی رخ نداده‌است و ممکن است علت دیگری داشته باشد. برای اینکه شرط لازم را به توانیم مهیا کنیم، می‌توانیم نوع ساده‌تری از توازن را بیان کنیم. دیویس [۲۴] نشان داده‌است برای اینکه یک شبکه خوشگی از خود بروز دهد، نوع ساده‌ای از توازن ساختاری نیز کافی خواهد بود. این شرط را دیویس این گونه بیان می‌کند که اگر در شبکه هیچ حلقه بسته‌ای با دقیقاً تنها یک پیوند منفی وجود نداشته باشد، سیستمی که آن شبکه نمایش می‌دهد در حال توازن است [۳۲].

این شرطی که دیویس بیان می‌کند، در واقع بیانگر نوع دیگری از توازن است که به "توازن ضعیف" مشهور است. بنابر این می‌توانیم ادعا کنیم که در هر شبکه‌ای که توازن قوی برقرار است، مطمئناً توازن ضعیف هم بر قرار است، زیرا توازن قوی به این معنا است که تمام حلقه‌های بسته آن یا هیچ پیوند منفی ندارند یا تعدادشان زوج است که خود این مسئله برقرار کننده شرطی است که بیان می‌کند هیچ حلقه‌ای تنها یک پیوند منفی نخواهد داشت ولی عکس چنین صحبتی برقرار نیست. به این معنا که شرط توازن ضعیف، به تنهایی صرفاً برای نشان دادن و توضیح انزوا در شبکه‌ها و تقسیم شدن شبکه به جوامع مخالف یکدیگر کفایت خواهد کرد.

[24] Davis

از سوی دیگر، می‌توان استنتاج نمود که که اگر شبکه به دو گروه کاملاً مخالف هم یا بیشتر تقسیم گردد، بنابر تعریف، سامانه متوازن شده‌است. به این شکل که اگر شبکه به دو گروه مجزا تقسیم شده باشد، از آن جایی که یک حلقه بسته یا در یک جبهه حضور دارد که در این صورت تمام پیوندهای حلقه مثبت خواهد بود و که این حلقه بین دو جبهه مخالف هم برقرار شده‌است، در این صورت، در حالت گذر از بین جبهه‌ها پرواضح است که به دفعات از زوج پیوندهای منفی گذر خواهد کرد، به همین علت این سامانه دارای توازن قوی است. اگر سامانه به سه گروه یا حتی بیشتر تقسیم شده باشد، به‌طور کلی این شبکه تنها دارای توازن ضعیف خواهد بود.
بر همین اساس تعاریفی که بیان نمودیم، حداقل دو تعریف برای آن که نشان دهیم که آیا سامانه در توازن است یا خیر وجود دارد که در رقابت با یکدیگر قرار دارند و تعریف جامعی وجود ندارد. این عدم وجود تعریف جامع، کار تشخیص اینکه آیا شبکه‌های دنیای واقعی متوازن هستند یا خیر را پیش از پیش سخت نموده‌است.

اما دلیل دوم و مهم‌تری که باعث این عدم تفاهم بر سر متوازن بودن یا نبودن شبکه‌های دنیای واقعی شده‌است، عدم وجود معیار کمی و عددی برای توازن است. به طوری که بتوانیم میزان متوازن بودن یا نبودن شبکه را بسنجیم. بعد از آن که معیاری جهت توازن معرفی نمودیم، حال نیاز به شاخص و خطکشی داریم که بتوانیم با استفاده از آن میزان زیاد یا کم بودن توازن را در شبکه بسنجیم. در قسمت بعد، به سراغ چنین معیاری خواهیم رفت و پس از معرفی شاخص‌های آن، بر روی شبکه‌های واقعی مورد بررسی قرارش خواهیم داد.

۹.۲ معیار توازن

همان‌طور که در قسمت قبل بیان کردیم، در موارد بسیار کمی، توازن کامل در شبکه‌های واقعی رخ می‌دهد و برای آن که بتوانیم میزان توازن چنین شبکه‌هایی را بسنجیم، نیاز به معیار مشخصی داریم تا بتوانیم مشخص کنیم که شبکه‌ای که در حال بررسی هستیم، چه مقدار متوازن است. برای همین منظور، محققان این حوزه، روش‌هایی را جهت اندازه‌گیری توازن شبکه معرفی نموده‌اند [۳۳] [۳۴].

از میان راه کارهای مختلف، به سراغ روش و معیار کنتول [25] و همکارانش می‌رویم. ایشان بیان می‌کنند تعداد حلقه‌های بسته در یک شبکه که توازن قوی یا ضعیف را نقض می‌کنند، مورد بررسی قرار می‌دهیم [۴۱] . این سخن را به این شکل می‌توان تفسیر نمود که حلقه‌هایی که تعداد یال منفی فرد یعنی نقض توازن قوی، یا حلقه‌هایی که دقیقاً یک یال منفی یعنی نقض شرط توازن ضعیف را در شبکه بررسی کنیم و بشماریم. علت آن که به سراغ شمردن حلقه‌های نامتوازن می‌رویم، آن است که با تحولی که برای شبکه تعریف کرده‌ایم، شبکه تمایل دارد که تعداد حلقه‌های متوازن خود را افزایش دهد و به همین علت تعداد حلقه‌های نامتوازن کم‌تر خواهد شد. حال شمردن این حلقه‌های نامتوازن به علت آن که هرچقدر تحول جلوتر می‌رود تعداد آن نیز کم‌تر می‌شود، از لحاظ الگوریتم و سرعت برنامه نیز بسیار سریع‌تر است.

اما در قسمت‌های قبل چرا از مثلث‌ها که کوتاه‌ترین مسیرها هستند سخن نگفتیم در حالی که تحول و مسائلی که در بخش‌های قبل‌تر بودند، همگی بر روی مثلث‌ها بنا شده‌اند. علت این که در این قسمت سراغ مسیرها رفتیم و نه مثلث‌ها این است که در

[25] Cantwell

قسمت‌های قبل با شبکه‌های کامل سر و کار داشتیم و در این شبکه‌ها، برای تعیین وضعیت شبکه مسیرهای سه‌تایی یا همان مثلث‌ها بهترین معیار هستند. در حالی که د ر شبکه‌های واقعی، همان‌طور که پیش‌تر بیان نمودیم کامل نیستند و به همین سبب نمی‌توانیم صرفاً سراغ مثلث‌ها برویم. به سبب آن که دیگر مثلث‌ها ویژگی‌های شبکه‌های واقعی را دیگر به درستی بیان نمی‌کنند و از طرفی نیز کار بر روی شبکه‌های کامل، خاصیت‌ها و مشخصات شبکه‌های واقعی را به خوبی نشان نمی‌دهد. به همین منظور به سراغ مدل‌هایی می‌رویم که به شبکه‌های واقعی نزدیک‌تر است و در این شبکه‌ها صرفاً نمی‌توان به بررسی مثلث‌ها بسنده نمود، به‌طور مثال گاهی در این شبکه‌های واقعی دو عضو بر یکدیگر تأثیر می‌گذارند در حالی که به‌طور مستقیم به یکدیگر متصل نشده‌اند. به همین علت به سراغ حلقه می‌رویم تا بتوانیم روابط دورتر و اثر آن روابط را هم بررسی کنیم و هرچه بیشتر به جهان واقعی نزدیک‌تر شویم.

اما زمانی که از تعداد حلقه‌ها به عنوان معیاری برای توازن صحبت می‌کنیم، باید مسئله مهمی را در نظر داشته باشیم. طبق ویژگی شبکه‌ها، با افزایش طول حلقه، تعداد حلقه‌ها به سرعت افزایش پیدا می‌کند. به همین سبب، طولانی‌ترین حلقه‌ها، به علت آن که تعدادشان از بقیه بیشتر خواهد بود به مرور بر باقی حلقه‌ها غلبه پیدا خواهند کرد. حال آن که می‌دانیم در جهان و شبکه واقعی رابطه‌ها با طول زیاد چندان اهمیتی ندارند. به این شکل که افراد کمی هستند که نوع رابطشان با دوست دوست دوست دوستشان، بر روی رابطه دوستی‌شان اثر گذار است. به همین علت می‌توانیم فرض کنیم که حلقه‌های کوچکتر بر روی توازن شبکه، تأثیری بیشتری از حلقه‌های بزرگ‌تر دارند به همین علت به حلقه‌های کوچکتر نسبت به حلقه‌های بزرگ‌تر، وزن بیشتری نسبت می‌دهیم.

پس حالا به سراغ تعریف معیار توازن می‌رویم. یک شبکه بدون جهت G را در نظر بگیرید. طبق تعریف حلقه یک مسیر بسته‌است که ابتدا و انتهای آن یک گره باشد و به غیر از گره ابتدا و انتها، از یک گره دوبار عبور نکند. با توجه به این توضیحات معیار $B(z)$ را این گونه تعریف می‌نماییم:

$$B(z) = \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{I_k}{z^k} \tag{۲۷.۲}$$

و آن را مرتبه نامتوازن بودن یک شبکه نام می‌نهیم. در این معادله I_k تعداد حلقه‌های نامتوازن به طول k و $z > ۱$ یک پارامتر آزاد است. در واقع در این جمع وزن‌دار با کمک فاکتور z^k سعی داریم که وزن طول‌های بزرگ‌تر را کم‌تر کنیم. لازم است ذکر شود که در برخی مقالات، محققان این فاکتور را با $z!$ جایگزین کرده‌اند که فاکتور بزرگ‌تری محسوب می‌شود اما ما از شکل توانی آن که به نظر مناسب‌تر می‌رسد استفاده می‌کنیم [۲۹] . در جمع بالا صرفاً برای زیبا شدن فرمول k را از یک شروع کرده‌ایم، حال آن که باید از سه شروع می‌کردیم زیرا حلقه‌هایی به طول یک و دو در شبکه وجود ندارد. حال با این معیار به سراغ توصیف توازن قوی و ضعیف می‌رویم.

۱۰.۲ معیار توازن ضعیف

نخست به سراغ معیار توزان ضعیف جهت بررسی آن می‌رویم. طبق فرمول در توازن ضعیف، I_k تعداد حلقه‌های با طول k است که دقیقاً یک پیوند منفی دارند. در فصل اول بیان کرده بودیم که اگر ماتریس مجاورت یک شبکه را در خودش k مرتبه ضرب کنیم، درایه ij ام ماتریس، نشان دهنده تعداد مسیرهای به طول k بین گره‌های i و j است و بر همین اساس ، عددهای روی قطر اصلی نیز تعداد مسیرهای بسته را نشان می‌دهند. در نتیجه، اگر بر روی قطر اصلی جمع بزنیم و به علت آن که هر مسیر را $2k$ بار می‌شماریم، بر $\frac{1}{2k}$ تقسیم کنیم، تعداد کل حلقه‌های به طول k به دست می‌آید.

برای شمردن تعداد حلقه‌های نامتوازن ضعیف از یک سازوکار ساده استفاده می‌کنیم. در قدم نخست تمام یال‌های منفی شبکه را حذف می‌کنیم و در قدم بعدی تعداد مسیرهای به طول $k-1$ را بین دو گره‌ای که دو سر یال منفی بوده‌است را می‌شماریم. در قدم آخر نیز آن یال منفی را برگردانده و حلقه را می‌بینیدیم و به این شکل حلقه‌هایی با طول k خواهیم داشت که دقیقاً یک یال منفی دارند.

حال سعی خواهیم کرد که آنچه را بیان نمودیم، به صورت ریاضی نیز بیان کنیم. دو ماتریس P و N را به شبکه به این شکل نسبت می‌دهیم که در ماتریس P اگر گره‌های i و j با پیوند مثبت به یکدیگر متصل بودند در ماتریس به این شکل قرار می‌گیرد:

$$P_{ij} = 1$$

در غیر این صورت عدد صفر را قرا می‌دهیم. به همین شکل برای ماتریس N خواهیم داشت:

$$N_{ij} = 1$$

در صورتی که پیوند بین i و j منفی باشد و در غیر این صورت برابر با صفر قرار می‌دهیم. با توجه به تعاریفی که کردیم، حال می‌توانیم معیار نامتوازن بودن با تعریف توازن ضعیف را که با $B_w(z)$ نشان می‌دهیم به شکل رابطه زیر نمایش دهیم:

$$B_W(z) = \frac{1}{2} \sum_{ij} N_{ij} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} \left[P^{k-1}\right]_{ji} = \frac{1}{2}\, \mathrm{Tr}\left[N(zI-P)^{-1}\right] \qquad (۲۸.۲)$$

در این رابطه عامل $\frac{1}{2}$ به این سبب به کار برده شده‌است که هر حلقه در جمع دو بار شمرده شده‌است. برای ساده‌تر شدن رابطه، یک متغیر بازمقیاس شده به کار می‌بریم به این صورت زیر تعریف می‌کنیم که

$$\alpha = z/\lambda_P$$

به طوری که λ_P مثبت‌ترین ویژه مقدار مثبت ماتریس P باشد و در صورتی که $\alpha > 1$ باشد تضمین می‌کند که معادله‌ی به دست آمده واگرا نخواهد بود و جواب درستی خواهد داشت. پس معیار نامتوازن بودن را می‌توان به صورت زیر با توجه به

پارامتری که تعریف کردیم نمایش داد:

$$B_W(\alpha) = \frac{۱}{۲} Tr \left[N \left(\alpha \lambda_P I - P \right)^{-۱} \right] \qquad (۲۹.۲)$$

ازتوصیفات دیگر α می‌توان به این اشاره کرد که می‌توان α را به شکل $\alpha^{-k} = e^{-k/k.}$ نوشت که در آن $k. = ۱/\ln\alpha$ طول فروپاشی [۲۶] نام دارد که نشان دهنده طول مقیاسی است که از آن جا به بعد مسیرهای طولانی‌تر اثر چندانی بر روی معیار ما ندارند.

۱۱.۲ معیار توازن قوی

حال در این بخش، سعی خواهیم کرد بر اساس تعریفی که از توازن قوی داشتیم، رابطه‌ای نیز برای آن ارائه کنیم. $B_s(z)$ را برابر با تعداد حلقه‌های نامتوازن، یعنی حلقه‌هایی که تعداد یال‌های منفی‌شان فرد است، قرار می‌دهیم. در این قسمت نیز ماتریس P و N را مانند تعریف قسمت قبل در نظر می‌گیریم. ماتریس $P - N$ به ازای پیوندهای مثبت دارای درایه $+$ و به ازای پیوندهای منفی دارای درایه $-$ است. اگر این ماتریس را به توان k برسانیم، مسیرهای به طول k را می‌شماریم و اگر ضریب $+$ داشته باشد یعنی تعداد پیوندهای آن مسیر زوج است و اگر ضریب منفی به دست آید به معنی آن است که تعداد فرد پیوند منفی دارد. بر همین اساس درایه‌های قطر اصلی ماتریس $[(P-N)^k]_{ii}$ برابر است با تفاضل تعداد حلقه‌های متوازن که از گره i شروع می‌شود و به همان ختم می‌گردد با تعداد حلقه‌های نامتوازن [۳۶]. بر همین اساس اگر بر روی تمام گره‌ها که همان قطر اصلی است، جمع بزنیم خواهیم داشت که:

$$B_k - I_k = \frac{۱}{۲k} \operatorname{Tr} \left[(P-N)^k \right] \qquad (۳۰.۲)$$

در رابطه به دست آمده، B_k تعداد کل حلقه‌های متوازن و I_k تعداد کل حلقه‌های نامتوازن به طول k را نمایش می‌دهد. فاکتور $\frac{۱}{۲k}$ به این علت است که هر حلقه دوبار و هر بار به ازای k گره شمرده شده‌است.

حال ماتریس شبکه $P + N$ را در نظر بگیرید. این ماتریس همسایگی شبکه به صورت کامل است به این گونه که علامت‌ها در نظر گرفته نشده‌اند. به این معنا که به ازای هر پیوند، چه منفی و چه مثبت در درایه مربوطه یک قرار دارد. پس همان‌طور که قبلاً نیز گفته‌ایم اگر این ماتریس را به توان k برسانیم، کل مسیرها به طول k، فارغ از اینکه متوازن است یا خیر را نشان خواهد داد. پس تعداد کل حلقه‌های متوازن و نامتوازن برابر است با:

$$B_k + I_k = \frac{۱}{۲k} \operatorname{Tr} \left[(P+N)^k \right] \qquad (۳۱.۲)$$

حال واضح است که برای به دست آوردن تعداد کل حلقه های نامتوازن، کافی است معادله ۳۰.۲ رااز معادله ۳۱.۲

[26] Decay length

کم کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$I_k = \frac{۱}{۴k} Tr\left[(P+N)^k\right] - \frac{۱}{۴k} Tr\left[(P-N)^k\right] \tag{۳۲.۲}$$

حال کافی است عبارتی که به دست آورده‌ایم را در فرمول اصلی یعنی ۲۷.۲ قرار دهیم تا بتوانیم معیار نامتوازن بودن بر اساس توازن قوی را به دست آوریم. یعنی داریم:

$$B_s(z) = \frac{۱}{۴}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{kz^k}\operatorname{Tr}\left[(P+N)^k\right] - \frac{۱}{۴}\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{kz^k}\operatorname{Tr}\left[(P-N)^k\right] \tag{۳۳.۲}$$

البته این عبارت پیچیده‌است و نوشتن آن به صورت یک برنامه و اجرای آن زمان زیادی خواهد گرفت. برای بهتر شدن این فرمول از ویژگی‌های ماتریس استفاده می‌کنیم. ویژگی‌های زیر را از جبر ماتریسی می‌دانستیم. یعنی داریم:

$$\begin{gathered} \log\det(M) = Tr[\log M] \\ \log M = \textstyle\sum_k^{\infty}(-۱)^{k+۱}\frac{(M-I)^k}{k} \end{gathered} \tag{۳۴.۲}$$

پس با ترکیب عبارات ۳۴.۲ با یکدیگر خواهیم داشت:

$$\log\det(M) = \operatorname{Tr}\left[\sum_k^{\infty}(-۱)^{k+۱}\frac{(M-I)^k}{k}\right] = \sum_k^{\infty}(-۱)^{k+۱}\frac{\operatorname{Tr}(M-I)^k}{k} \tag{۳۵.۲}$$

یک تغییر متغیر ساده انجام می‌دهیم. اگر فرض کنیم که $M = I - M'$ با یک تغییر خواهیم داشت : $M - I = -M'$ و با جای‌گذاری عبارت‌هایی که به دست آوردیم به جای M خواهیم داشت:

$$\log\det\left(I-M'\right) = \sum_k^{\infty}(-۱)^{k+۱}\frac{\operatorname{Tr}\left(-M'\right)^k}{k} = \sum_k^{\infty}(-۱)^{k+۱}(-۱)^k\frac{\operatorname{Tr}\left(M'\right)^k}{k} = \sum_k^{\infty}(-۱)^{۲k+۱}\frac{\operatorname{Tr}\left(M'\right)^k}{k} \tag{۳۶.۲}$$

پس می‌توانیم ادعا کنیم که برای ماتریس‌ها این ویژگی برقرار است :

$$\log\det(I-M) = -\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{\operatorname{Tr} M^k}{k} \tag{۳۷.۲}$$

حال با توجه به عبارتی که به دست آوردیم، می‌توانیم رابطه ۳۳.۲ را ساده‌تر کنیم و به شکل زیر بنویسم:

$$B_S(z) = \frac{۱}{۴}\log\frac{\det[zI-(P-N)]}{\det[zI-(P+N)]} \tag{۳۸.۲}$$

همان‌طور که برای معیار توازن ضعیف نشان دادیم که باید شرط‌هایی برقرار باشد تا رابطه همگرا گردد، برای معیار توازن قوی نیز باید این شرط‌ها را برقرار کنیم. پس برای باز مقیاس کردن فرمول داریم که $\alpha = z/\lambda^*$ که در آن λ^* بزرگ‌ترین ویژه مقدار ماتریس های $P+N$ و $P-N$ است. پس خواهیم داشت:

$$B_S(\alpha) = \frac{۱}{۴} \log \frac{\det\left[\alpha\lambda^* I - (P-N)\right]}{\det\left[\alpha\lambda^* I - (P+N)\right]} \qquad (۳۹.۲)$$

هنگامی که $\alpha > ۱$ باشد، تضمین می‌کند که جمع‌ها همگرا هستند و حتما جواب خواهیم داشت [۱۸].

فصل ۳

سن در نظریه توازن

۱.۳ مقدمه

قبل از آن که به پژوهش و نتایج آن بپردازیم، برای آن که ابعاد و اهمیت پژوهش مشخص شود لازم است که سئوال‌هایی را مطرح کنیم. ارتباط ما با افراد پیرامونمان در محیط‌های مختلف متأثر از مسائل مختلفی است. گاهی دوستی‌هایی به دشمنی تبدیل شده‌است یا دشمنی‌هایی به دوستی. به راستی چه عواملی سبب این گونه تغییرات پیرامون افراد هست؟ به نظر یکی از مهم‌ترین دلایل آن سعی انسان برای کاهش حداکثری تنش در اطراف خود است. افرادی از دوستانمان به شهرها و کشورهای دیگر رفته‌اند و به همین سبب ارتباط قبلی ما با آن‌ها قطع شده‌است. افرادی از دایره دوستی یا دشمنی‌هایمان کم شده‌اند و افراد دیگری جای آن‌ها را گرفته‌اند.

فرض کنید که در یک شرکت استخدام شده‌اید و قرار است کار خود را شروع کنید. اما از افراد شرکت، فرد خاصی را نمی‌شناسید. احساس شما نسبت به آن‌ها چگونه است؟ نسبت به آنان احساس دوستی یا دشمنی دارید؟ اصلاً احساس خاصی نسبت به تک تک افرادی که در آنجا کار می‌کنند دارید؟ در واقع احساسی که احتمالاً همان اوایل کار و روزهای اول در شرکت داریم، جمعی از دوستی و دشمنی هاست که البته به آن‌ها نیز اطمینان نداریم. با کمی اغماض می‌توان بیان کرد که ارتباط ما با افراد دیگر شاغل در شرکت، یک مجموعه از روابط دوستی (مثبت) و دشمنی (منفی) است، که در روزهای اول تقریباً تصادفی قرار گرفته‌است. این اتفاق در اجتماعات دیگر نیز، زمانی که یک عضو جدید اضافه می‌شود رخ می‌دهد.

به‌طور مثال در جامعه جنگل که یک گونه جدید به اکوسیستم آن اضافه می‌شود، مدتی زمان خواهد برد که جایگاه و نحوه تعامل آن جانور مشخص شود یا در مثالی دیگر اگر سراغ شبکه‌های اجتماعی برویم، یک عضو جدید، به‌طور مثال در توییتر، اینستاگرام یا دیگر شبکه‌ها، در روزهای نخست ممکن است یک نگاه و نظر خاصی در مورد افراد نداشته باشد یا صرفاً نظر سطحی در ذهنش شکل گرفته باشد. یعنی مجموعه ای تصادفی از دوستی (مثبت) و دشمنی (منفی) در ذهنش شکل گرفته باشد که در طول زمان اصلاح و دقیق تر خواهد شد. اما سئوالی که می‌توان مطرح کرد این است که مقدار زمان جهت اصلاح

و بازسازی روابط چقدر خواهد بود؟ ایا به تعداد افراد آن اجتماع وابسته است؟

مثال شرکت را به یاد بیاورید. اگر همان روز اول که در محل کار حاضر شدیم، استعفا بدهیم، آیا توانسته‌ایم دوستی‌ها و دشمنی‌هایمان را مشخص کنیم؟ آیا گونه جدیدی که به جنگل اضافه شده‌است، اگر در کمترین زمان، توسط عامل انسانی حذف شود، توانسته‌است که نوع روابط خود و جایگاهش در اکوسیستم را مشخص کند ؟ جواب سئوال‌هایی که مطرح کردیم و سئوال‌هایی از این نوع، به وضوح خیر است. به این معنی که برای آن که روابط در یک شبکه اجتماعی که بر روی ارتباطات بنا شده‌است، مشخص شود و شبکه به یک تعادل برسد و از هم نگسلد، به یک حداقل زمانی برای ایجاد و مشخص شدن نوع روابط (دوستی یا دشمنی) نیاز است. اما این حداقل زمان به چه چیزهایی وابسته است و چگونه تعریف می‌شود؟

از طرف دیگر می‌دانیم که اگر به این شبکه مدت زمان بی‌نهایت نسبت دهیم– در مثال استخدام در شرکت به این شکل تعریف می‌شود که مدت زمان زیادی را در شرکت مشغول به کار باشد تا به‌طور مثال زمان بازنشستگی اش فرا برسد – می‌تواند شبکه افراد پیرامونش را بر اساس دوستی و دشمنی مرتب کند تا با یک شبکه «کم‌تنش یا به تعادل رسیده» برساند.

از مثال گفته شده، به صورت خلاصه دو مطب را استنتاج می‌کنیم. نخست آن که یک حداقل زمانی برای آن که بتوانیم در شبکه‌های اجتماعی که در آن‌ها حضور داریم نوع روابط مان را بین دوستی و دشمنی مشخص کنیم وجود دارد. دوم آن که اگر مدت زمان بی‌نهایت در یک شبکه باشیم عملاً روابطمان را اصلاح کرده‌ایم و به یک تعادل در روابطمان رسیده‌ایم . پس به نظر می‌رسد در یک زمان خاص یا یک دوره زمانی، عامل‌ها در شبکه‌های مختلف می‌توانند روابط خود را اصلاح و پی ریزی کنند و مقدار تنش در روابط خود را به حداقل برسانند و روابط پایداری ایجاد نمایند.

اما در همین قسمت سئوال‌های جدیدی مطرح می‌شود. آیا یک دوره زمانی طول خواهد کشید؟ یا در یک زمان خاص نسبت به تعداد افراد شبکه اتفاق خواهد افتاد ؟ برای بررسی سئوالات مطرح شده، در این پژوهش سعی خواهیم کرد که از ساده‌ترین مدل، مسئله را بررسی کرده و پاسخ‌های اولیه ای برای آن‌ها بیابیم. برای این پژوهش، به سراغ شبکه‌های کامل و مدل توازن خواهیم رفت و متناسب با مسئله مان آن‌ها را بیان خواهیم نمود.

برای بررسی سئوال‌ها سراغ شبکه کامل می‌رویم. همان‌طور که در فصل اول بیان نموده‌ایم، شبکه کامل، شبکه ای است که تمام پیوندهای بین گره‌های آن، متصل شده باشد. به همین علت برای یک شبکه کامل شامل N گره، درجه هر گره برابر خواهد بود با:

$$D = N - ۱$$

در این پژوهش فعلاً در مورد شبکه‌های جهت دار کامل، شبکه‌های تنک [1] صحبتی نخواهیم کرد و این موارد را در پژوهش‌های آینده دنبال خواهیم کرد.

برای تحول شبکه نیز، به سراغ مدل توازن که دارای خصوصیات اجتماعی هست می‌رویم و سعی خواهیم کرد که مدل را متانسب با سئوال‌ها بیان نماییم. مدل توازن را در فصل دوم با جزییات آن بیان نمودیم و مفهوم‌هایی مانند انرژی و کاهش آن،

[1] Sparse

مثلث‌های متوازن و نامتوازن و نحوه تعامل آن‌ها در شبکه را نشان دادیم. قبل از آن که به بخش بعدی برویم، یک مثال کاربردی را مطرح می‌کنیم و سعی خواهیم کرد دوباره در انتهای فصل به آن بازگردیم و جواب آن را با توجه به نتایج بیابیم. فرض کنید پنج نفر در یک اتاق قرار گرفته‌اند. برق‌ها خاموش بوده‌است و به ناگاه روشن می‌شود. این افراد برای اولین بار یک دیگر را می‌بینند. طبق تحقیقات اریک وارگو [۲] ، افراد در کمتر از ۱۰ ثانیه یا چشم برهم‌زنی برداشت‌های خود که شامل نکات منفی و مثبت از دیگران است را در ذهن خود ثبت می‌کنند [۳۷]. حال اگر این افراد و برداشت‌های خودشان را یک شبکه کامل با علامت‌های مثبت (برداشت مثبت) و منفی (برداشت منفی) در نظر بگیریم، بین آن‌ها $\binom{۵}{۲} = ۱۰$ پیوند ایجاد شده‌است.

حال سئوالی که در نظر داریم این است که حداقل چه تعداد پیوند را تغییر دهیم (مثبت به منفی یا منفی به مثبت به شرط کاهش تنش شبکه) تا این شبکه به توازن برسد؟ جواب این سئوال را در انتهای فصل خواهیم داد.

۲.۳ ساختن مدل

حال یک شبکه کامل را در نظر بگیرید. این شبکه مجموعه ای از عوامل هستند که هنوز نوع رابطه خود را (دوستی (مثبت) و دشمنی (منفی)) مشخص نکرده‌اند و در واقع می‌توان صرفاً یک علامت منفی به عنوان دشمنی و یک علامت مثبت به عنوان دوستی به صورت تصادفی روی رابطه‌ها قرار داد تا زمانی که نوع رابطه مشخص شود. ممکن است خواننده سئوال نماید چگونه می‌توان به یک پیوند که هنوز دقیق مشخص نیست، یک نوع رابطه از بین دوستی و دشمنی نسبت داد؟

بر اساس پژوهش‌های اخیر [۳۷] افراد حتی قبل از آن که ارتباط خاصی از لحاظ گفتار یا همکاری یا موارد دیگر با فرد دیگر داشته باشند، یک احساس اولیه نسبت به شخص خواهند داشت. به‌طور مثال وقتی فردی ناشناس را می‌بینند تنها در کمتر از ۱۰ ثانیه یک احساس اولیه مثبت یا منفی نسبت به آن شخص پیدا می‌کنند که البته ممکن است که در آینده بر اثر رابطه مستقیم، جای خود را به احساس دیگری بدهد. به‌طور مثال ممکن است در نگاه نخست نسبت به فرد احساس خوب و دوستی نمایند اما در طی زمان و بر اثر شکل‌گیری رابطه‌های دیگر و ارتباطات بیشتر، آن احساس دوستی اولیه، جای خود را به یک دشمنی مشخص بدهد. پس افراد یک شبکه اگر از وجود هم آگاه باشند، یک احساس اولیه تصادفی نسبت به یکدیگر که حاوی دشمنی یا دوستی است، خواهند داشت.

به همین علت، زمانی که یک شبکه کامل را در نظر می‌گیریم، در زمان شروع تحول، نوع پیوندها را بر اثر تصادف، از میان دوستی (پیوند مثبت) و دشمنی (پیوند منفی) انتخاب می‌نماییم. حال مانند نظریه توازن برای چنین شبکه ای مفهومی به نام تنش که معادل انرژی در نظریه توازن است را تعریف می‌کنیم. در طرح اولیه زمانی که پیوندها مشخص نیستند و صرفاً بر اثر حس اولیه شکل گرفته‌است، سطح تنش در بالاترین مقدار خود است. به همین علت اگر از تعریف انرژی در توازن استفاده کنیم (در این پژوهش، به جای انرژی، آن را تنش می‌نامیم)، مقدار تنش این شبکه تقریباً برابر است با صفر یعنی خواهیم داشت:

$$U = \frac{-۱}{\binom{N}{۳}} \times \sum S_{ij} S_{jk} S_{ki} \cong ۰ \qquad (۱.۳)$$

[2] Eric Wargo

به علت آن که علامت پیوندها به صورت تصادفی و احتمال $\frac{1}{2}$ انتخاب شده است یعنی داریم:

$$S_{mn} = Random\, choice(-۱, ۱) \tag{۲.۳}$$

۳.۳ زمان در توازن

حال می‌دانیم در این شبکه، اعضا تمایل دارند که در طول زمان، مقدار تنش خود را با پیرامون خود کم نمایند. برای آن که اعضا تنش خود را کم نمایند، از تحول معرفی شده برای مدل توازن کمک خواهیم گرفت. اما مسئله ای که در این پژوهش بدان می‌پردازیم و نسبت به مدل توازن تفاوت دارد این است که توازن را در حضور زمان بررسی می‌کنیم.

در این مدل توازن، شبکه مدت محدودی دارد که بتواند پیوندهای خود را بسازد و اصلاح کند تا تنش در شبکه کاهش یابد. در مدل عادی توازن، شبکه مدت زمان نامحدودی دارد که به کمترین تنش برسد و پیوندهای خود را اصلاح کنداما قبل از آن که به جزییات مسئله داخل شویم، بهتر است منظور خود را از زمان در توازن بیان کنیم.

زمان را در تحول توازن به این گونه معنا می‌کنیم که در هر چرخه از تحول، پیوند انتخاب شده طبق تحول توازن، چه تغییر بکند چه تغییر نکند، شبکه یک قدم زمانی به جلو حرکت کرده‌است. حال اگر به شبکه، مدت زمان کمی اجازه تغییر دهیم، چه روی می‌دهد؟ اگر مدت زمان زیادی اجازه دهیم، چه تفاوتی خواهد کرد ؟

در واقع ما جواب سئوال دوم را تقریباً می‌دانیم زیرا از آن استفاده می‌کرده‌ایم حتی اگر بدان آگاه نبوده باشیم. وقتی به شبکه مدت زمان زیادی اجازه تغییر بدهیم شبکه به احتمال زیاد به حالت کمترین تنش دست پیدا خواهد کرد. (این که از کلمه به احتمال زیاد استفاده نمودیم در واقع به خاطر وجود حالت‌های مسدود در شبکه در تحول توازن است که قبل تر به آن‌ها پرداخته‌ایم).

حال برای آن که تفاوت دو حالت گفته شده را در یابیم، نوع تحول خود را معرفی می‌نماییم. تحول توازنی که مورد استفاده قرار دادیم، مدل CTD است که در فصل مربوط به توازن در مورد آن توضیحات کافی داده شده‌است. اما چیزی که به آن مدل اضافه کردیم، مفهوم سن برای پیوندها و حداکثر سن قابل دست یابی توسط آن‌ها است. به این معنی که هر پیوند مهلت مشخصی برای تعیین شدن و باقی ماندن در حالت پایدار دارد و اگر به سقف مهلت برسد، جای خود را به یک پیوند تصادفی خواهد داد و بر اثر چنین رخدادی، سن پیوند جدید، از ابتدا صفر خواهد شد. سقف زمانی را با علامت

$$\tau = Life\, Time \tag{۳.۳}$$

مشخص می‌نماییم.

با تعیین کردن یک سقف زمانی برای شبکه، قصد داریم نقش زمان را در رسیدن سامانه به حالت کمترین تنش بیابیم؛ و این سقف زمانی را به عنوان سن پیوندهاتعبیر می‌کنیم. منظور از سقف زمانی این است که هر پیوند تا مدت مشخصی امکان تعیین شدن یا حفظ کردن وضعیت خود را دارد و در صورتی که به سقف زمانی برسد باید جای خود را به یک پیوند با علامت تصادفی مثبت یا منفی بدهد. اما تعبیر چنین رویدادی چیست؟

در مدل توازنی که استفاده می‌شود، و از آن به عنوان مدلی که تا حدی می‌تواند روابط اجتماعی را مدل کند یاد می‌شود، هیچ گونه محدودیت زمانی برای پیوندها در نظر نمی‌گیرد، حال آن که می‌دانیم در واقعیت‌های اجتماعی چنین چیزی تقریباً نیست. به این معنی که روابط اجتماعی تنها تحت تأثیر این که ما در حال اصلاح آن هستیم تا به کمترین تنش در روابطمان برسیم نیست و عوامل خیلی زیاد دیگری نیز در تحول پیوند تأثیر گذارند که یکی از مهم‌ترین آن‌ها زمان است.

یکی از راه‌های تأثیر گذاری زمان، حضور آن به عنوان عامل نابود کننده پیوند است. یعنی آن که یک پیوند ممکن است فقط تا یک زمان مشخصی پایدار بماند و بعد از آن حوادثی مانند مرگ، تغییر شغل، عوض شدن گره‌ها یا اعضا باعث شود که پیوندها صرفاً در زمان مشخصی امکان حیات داشته باشند و اگر به سقف زمانی خود برسند، تغییر کنند. (از روشن‌ترین این اتفاقات مرگ است، به طوری که کاملاً پیوند از هم می‌گسلد و نوع جایگزین آن مشخص نیست).

در این پژوهش، ما نیز سعی کرده‌ایم که یک مدل ساده از توازن را در چارچوب زمانی ببینیم و برای مدل‌های پیشرفته‌تر و واقعی تر دیدهای مناسب تری پیدا کنیم. در مدل ما زمان برای یک پیوند این گونه تعبیر می‌شود که زمانی که بر روی شبکه کامل پیوندها بصورت تصادفی از بین مثبت و منفی قرار داده می‌شوند، ما این زمان اولیه را زمان شروع در نظر می‌گیریم و به هر پیوند یک سن نسبت می‌دهیم که در شروع برابر با یک است.

اما با هر تحول در شبکه، که از تحول CTD پیروی می‌کند، سن پیوندهایی که در تحول تغییر پیدا نکرده‌اند، به اندازه یک واحد افزایش می‌یابد؛ و پیوندی که بر اثر تحول، علامت آن تغییر کرده‌است، سن اش به یک تغییر می‌کند و به عنوان یک پیوند جدید شناخته می‌شود.

در طی تمام این تحول و قبل از آن که تحول بعدی بررسی شود، یک سقف زمانی برای تمام پیوندها بررسی می‌شود. به این شکل که اگر یک پیوند بعد از یک تحول به سقف زمانی خود برسد، باید جای خود را به یک پیوند تصادفی مثبت یا منفی بدهد و سن آن نیز به علت آن که با یک پیوند جدید مواجه هستیم، برابر با یک می‌گردد. همان‌طور که در عبارت ۳.۳ از یک نشانه برای سقف زمانی یا زمان حیات صحبت کردیم، حال قصد داریم آن را برای یک پیوند بررسی کنیم و ببینیم در طی زمان برای آن پیوند روی خواهد داد. اگر یک پیوند S را در نظر بگیریم. خواهیم داشت:

$$S \Rightarrow S \times (۱ - \theta(t-\tau)) + S' \times \theta(t-\tau)[۳۸] \qquad (۴.۳)$$

به طوری که برای S' داریم:

$$S' = rand[-۱, ۱] \qquad (۵.۳)$$

همان طور که از (۴.۳) مشخص است، در طی آن که زمان یا همان دینامیک شبکه در حال حرکت به جلو است، سن پیوندها (t) نیز در حال افزایش است و مادامی که به مقدار سقف زمانی (τ) نزدیک می‌شود اثر پیوند قبلی کمتر و پیوند جدید جایگزین آن می‌شود. البته همان‌طور که بالاتر بیان نمودیم، اگر پیوند در طی تحول و بر اثر دینامیک علامت آن تغییر کند سن آن نیز به یک بازگردانده می‌شود.

در ادامه نیز برای آن که بتوانیم بین شبکه با تعداد پیوندهای متفاوت یک زبان مشترک از نظر زمانی پیدا کنیم و بتوانیم مسئله را خارج از تعداد پیوندها بررسی کنیم و به صورت جهان شمول به مسئله نگاه کنیم، مفهوم طول عمر [3] را به شکل زیر معرفی نماییم به این شکل هر واحد زمانی به صورت:

$$\tau = \frac{t}{\binom{N}{۲}} \tag{۶.۳}$$

$$t = dynamic\ step$$

$$N = number\ of\ node$$

تعریف می‌نماییم. در قدم‌های جلوتر مفهوم آن را به صورت روشن تری بررسی می‌نماییم.

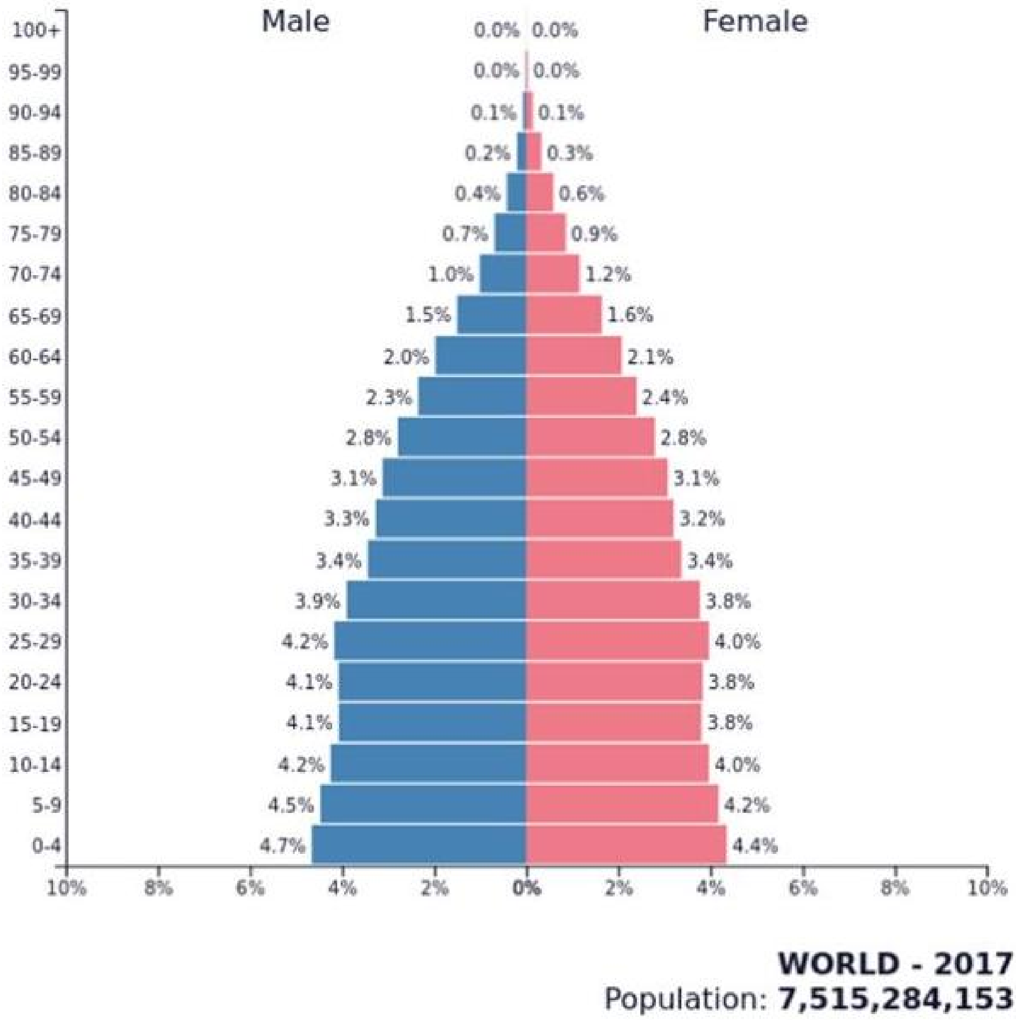
۴.۳ گام‌های شبیه‌سازی

حال گام‌هایی را که در شبیه‌سازی برداشته ایم، به ترتیب بیان می‌کنیم.

- گام اول: تعیین حداکثر سن برای پیوندها، بطوریکه پیوندها حداکثر تا سن مشخصی امکان داشتن علامت خاص خود را خواهند داشت، که همان طول عمری است که قبل‌تر در مورد آن صحبت کردیم.
- گام دوم: ساخت یک شبکه کامل که علامت پیوندهای به صورت تصادفی یکنواخت [4] از مثبت یک و منفی یک انتخاب شده‌اند.
- گام سوم: در گام سوم ما قصد داریم که سن پیوندها را در ابتدا تعیین کنیم. قبل تر گفتیم که یک پیوند در ابتدا شروع تحول، دارای سن یک خواهد بود. اما می‌توان یک رویکرد دیگر که برای آن که بیشتر شبیه به شبکه‌های واقعی شود پیش گرفت. در این رویکرد که با توجه به توزیع سن انسان‌ها در دنیا انتخاب شده‌است، توزیع سن ورودی برای پیوندها در نظر گرفته می‌شود. با توجه به شکل (۱.۳) توزیع سن انسان‌ها، یک توزیع سن تقریباً نیم گوسی است. علت آن که چنین چیزی انتخاب می‌شود این است که وقتی یک عضو داخل مجموعه ای می‌شود، لزوماً آن مجموعه نیز به تازگی با یکدیگر آشنا نشده‌اند، بلکه ممکن است زمانی از پیوندهای بین خودشان گذشته باشد که با ورود عضو یا اعضا جدید برای شبکه جدیدی که پدید آمده‌است باید سعی کنند به کمترین تنش دست یابند. پس می‌توان برای پژوهش، در مورد سن شروع تحول دو رویکرد داشت. نخستین رویکرد آنکه تمام روابط به تازگی آغاز شده‌اند و به همین علت، سن روابط

[3] LifeTime
[4] Uniforme Random

از یک شروع می‌شود. در رویکرد دوم و برای آن که مسئله هر چه به مسائل واقعی تر نزدیک شود، توزیع سن شروع پیوندها را بصورت نیم گوسی انتخاب می‌کنیم. در واقع یک توزیع عددی با واریانس و میانگین مشخص به تمام پیوندها نسبت می‌دهیم. برای انتخاب واریانس و میانگین، طوری عمل می‌نماییم که سقف سن گذاشته شده برای هر تعداد گره را نقض ننماید.



شکل ۱.۳:   توزیع سن جمعیت جهان [۳۹]

- گام چهارم: سپس یک شرط برای دینامیک تعریف می‌کنیم به این شکل که در قدم نخست شروع دینامیک، بررسی کند که آیا سن پیوندی بیشتر از طول عمر مجاز شده است یا خیر. در صورتی که آن پیوند سنی بیشتر از طول عمر مجاز پیدا کرده باشد، سن پیوند به یک و علامت آن به صورت تصادفی از بین ۱− یا ۱+ انتخاب خواهد شد. در واقع با این کار، یعنی رسیدن سن پیوند به طول عمر تعیین شده، پیوند می‌میرد و یک پیوند جدید شکل خواهد گرفت.

- گام پنجم:از این نقطه به بعد فرایند CTD را انجام می‌دهیم. در گام پنجم بعد از آن که در قدم قبل بررسی کردیم که آیا سن پیوندی بیشتر از طول عمر تعریفی هست یا خیر تا آن‌هایی که بیشتر هستند را یک کنیم، یک پیوند را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم.

- گام ششم: حال پیوند انتخاب شده را تغییر علامت می‌دهیم. سپس بررسی می‌کنیم که آیا با تغییر علامت پیوند انتخاب شده، انرژی سامانه کاهش می‌یابد یا خیر.

- گام هفتم: در صورت کاهش انرژی سامانه، تغییر پیوند را قبول می‌کنیم و سن پیوند تغییر یافته را به یک تغییر داده و به سن سایر پیوندها یک واحد اضافه می‌کنیم.

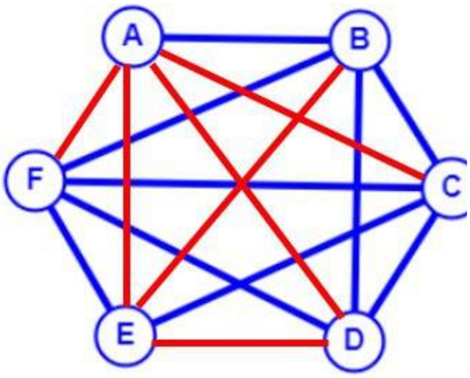
- گام هشتم: در صورتی که انرژی سامانه بیشتر شد، علامت پیوند را به حالت اول بازمی‌گردانیم و به سن تمام پیوندها یک واحد اضافه می‌کنیم.

- گام نهم: اگر با تغییر پیوند، انرژی سامانه تغییر نکرد، یعنی نه زیاد و نه کم شد، تغییر پیوند را با احتمال $\frac{1}{2}$ انتخاب می‌کنیم. در صورتی که تغییر قبول شد، سن پیوند را یک کرده و یک علامت تصادفی به آن می‌دهیم و به سن سایر پیوندها یک واحد اضافه می‌کنیم. در صورتی که تغییر قبول نشد، علامت پیوند را به حالت اول بازگردانده و به سن همه پیوندها یک واحد اضافه می‌کنیم.

- گام دهم: سپس گام چهارم تا گام نهم را به تعداد حداقل بیشتر از N^2 بار تکرار می‌کنیم و متوسط انرژی را حساب می‌کنیم.

۵.۳ نتایج شبیه‌سازی

برای آن که نتایج شبیه‌سازی که در بخش قبل گفته شد را نشان دهیم، باید مواردی را از قسمت شبکه و شبکه‌های علامت دار یادآوری کنیم. برای یک شبکه ساده غیر جهت‌دار و بدون وزن و البته سن‌دار، یک ماتریس مجاورت تعریف می‌کنیم. به‌طور مثال به شکل (۲.۳) نگاه کنید.



	A	B	C	D	E	F
A	۰	۱	۱	۱	۱	۱
B	۱	۰	۱	۱	۱	۱
C	۱	۱	۰	۱	۱	۱
D	۱	۱	۱	۰	۱	۱
E	۱	۱	۱	۱	۰	۱
F	۱	۱	۱	۱	۱	۰

شکل ۲.۳: یک شبکه کامل به همراه ماتریس مجاورت آن

در این شکل یک شبکه کامل اتصال بین گره‌ها با یک ماتریس مجاورت نمایش داده شده‌است. اما ما به ماتریسی جهت نشان دادن سن پیوندها و همین‌طور نوع پیوند ــ دوستی یا دشمنی ــ نیاز خواهیم داشت و ماتریس مجاورت به تنهایی پاسخ گوی محاسبات ما نخواهد بود. در شکل (۳.۳) ماتریس سن‌های پیوند و در شکل (۴.۳) ماتریس نوع پیوند را مشاهده می‌کنید.

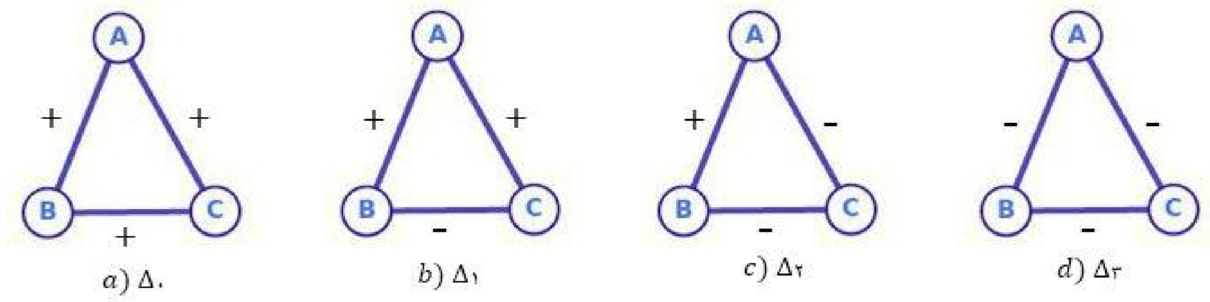
	A	B	C	D	E	F
A	۰	۱	۵	۳	۷	۱
B	۱	۰	۲	۸	۷	۴
C	۵	۲	۰	۱	۸	۲
D	۳	۸	۱	۰	۴	۵
E	۷	۷	۸	۴	۰	۱
F	۱	۴	۲	۵	۱	۰

شکل ۳.۳:   ماتریس نشان دهنده سن پیوندهای بین گره‌ها

	A	B	C	D	E	F
A	۰	۱	-۱	-۱	-۱	-۱
B	۱	۰	۱	۱	-۱	۱
C	-۱	۱	۰	۱	۱	۱
D	-۱	۱	۱	۰	-۱	۱
E	-۱	-۱	۱	-۱	۰	۱
F	-۱	۱	۱	۱	۱	۰

شکل ۴.۳:   ماتریس نشان دهنده نوع پیوندهای بین گره، قرمز برای دشمنی یا ۱− و آبی برای دوستی یا ۱+

در بخش قبل بیان کردیم برای آن که انرژی شبکه را برای طول عمرهای مختلف اندازه بگیریم، نیاز است که برای هر طول عمر به تعداد کافی، سامانه گام‌های گفته شده در قسمت قبل را طی کند و سپس از انرژی آن میانگین گرفته شود. برای محاسبه انرژی نیز به تعداد مثلث‌ها و نوع آن‌ها از لحاظ این که در حالت توازن هستند یا خیر نیاز داریم. مثلث‌های در حال توازن و نامتوازن نیز در شکل (۵.۳) مشخص هستند.



شکل ۵.۳:   مثلث‌های متوازن و نامتوازن ، $\triangle_۱$ و $\triangle_۳$ مثلث متوازن هستند و باقی نامتوازن.

پس باید تعداد مثلث‌های متوازن و نامتوازن را در هر اجرای گام‌ها حساب کنیم و بر تعداد مثلث‌ها تقسیم نماییم و تمام

این کارها را برای هر طول عمر باید تکرار کنیم. پس برای محاسبه انرژی خواهیم داشت:

$$U = \frac{-۱}{\binom{N}{۳}} \times \sum S_{ij}S_{jk}S_{ki} \tag{۷.۳}$$

اما از ریاضیات شبکه می‌دانیم که اگر ماتریس مجاورت یک شبکه را توان عددی مانند d برسانیم، اعدادی که در درایه‌های ماتریس ظاهر می‌شوند، تعداد راه‌های رسیدن از یک گره به گره دیگر با تعداد مشخصی قدم است. به‌طور مثال اگر S ماتریس مجاورت یک شبکه کامل باشد، هر عضو آن را با S_{ij} نمایش می‌دهیم. در این ماتریس، هر عضو آن مانند شکل (۴.۳) نشان دهنده نوع اتصال بین دو گره است. به غیر از قطر ماتریس که صفر است. حال در ماتریس S^d، درایه‌ها نشان دهنده تعداد راه‌های بین پیوندها هستند. یعنی S_{dij} به معنی آن است که تعداد راه‌های بین پیوند i و j که دارای d قدم باشد؛ و اعدادی که بر روی قطر ماتریس S^d به وجود می‌آیند، تعداد کل راه‌های d قدمی است که از آن درایه می‌گذرد. با توجه به این موضوع پس ما برای آن که بتوانیم انرژی شبکه را محاسبه کنیم، تنها کافی است اثر [5] توان سوم ماتریس نوع پیوندها ۴.۳ را محاسبه کنیم. یعنی داریم:

$$U = \frac{۱}{۶} \times \frac{-۱}{\binom{N}{۳}} tr(S^{۳}) \tag{۸.۳}$$

ضریب $\frac{۱}{۶}$ را به این علت وارد کردیم که هر مثلث در این روش ۶ بار شمرده می‌شود. همچنین نیاز هست که بر روی مقادیر مثلث‌های S میانگین گرفته شود. هم چنین بعد از به توان سه رساندن ماتریس نوع پیوندها، عددی که برای درایه‌های قطر ظاهر می‌شود، $(N-۱)(N-۲)$ است که چون N درایه داریم پس در کل اثر ماتریس برابر می‌شود با

$$(N-۲)(N-۱)N$$

پس رابطه ۸.۳ پس از ساده سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{-۱}{N(N-۱)(N-۲)} \operatorname{tr}\left(S^{۳}\right) \\ \langle U\rangle &= \tfrac{-۱}{N(N-۱)(N-۲)} \left\langle \operatorname{tr}\left(S^{۳}\right)\right\rangle \\ &= -\langle S\rangle \end{aligned} \tag{۹.۳}$$

حال که برای انرژی، معیاری برای محاسبه پیدا کردیم و با توجه به مفهوم طول عمری که قبل‌تر معرفی کردیم، با گذاشتن طول عمرهای مختلف، مقدار انرژی آن را بررسی می‌کنیم. با توجه به تعریف طول عمر که به شکل زیر است:

$$\tau = \frac{t}{\binom{N}{۲}} \tag{۱۰.۳}$$

[5] Trace

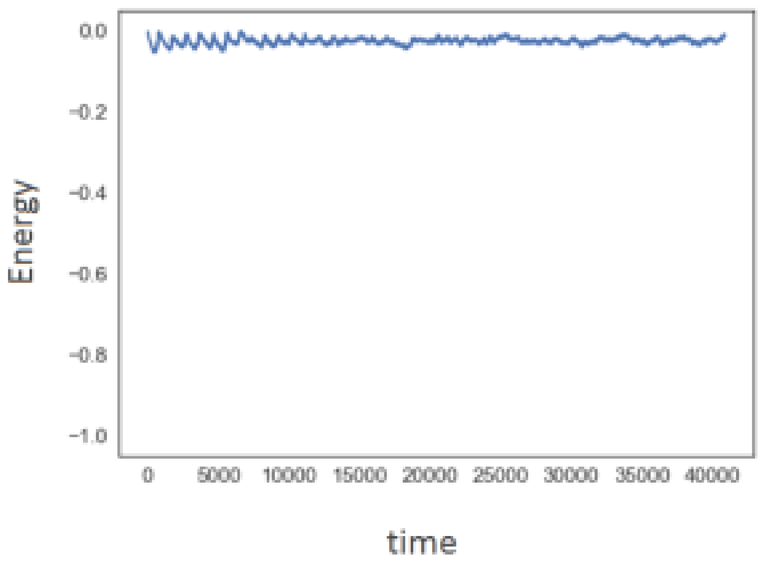
اگر به زمان t اجازه ندهیم که مدت زیادی طول بکشد یا معادل آن، این است که مقدار τ خیلی کمتر از یک باشد، سامانه فرصت رسیدن به توازن را پیدا نمی‌کند. به همین شکل اگر به اندازه کافی t اجازه بدهیم که سامانه فرصت پیدا کند، مانند زمان بی‌نهایتی که در توازن عادی داریم، سامانه به راحتی به توازن خواهد رسید. حال اگر بخواهیم این نوشتار را در رابطه وارد کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lim_{\tau<<۱}\langle U\rangle &= ۰ \\ \lim_{\tau>>۱}\langle U\rangle &= -۱ \end{aligned} \qquad (۱۱.۳)$$

حال بررسی می‌کنیم که در شبیه‌سازی اگر در قسمت اول گام‌ها که در حال بررسی رسیدن پیوندها به آستانه طول عمر است، اگر طول عمر را خیلی کمتر از یک قرار دهیم چه روی خواهد داد. به این معنا که هر پیوند بعد از رسیدن به سن مشخصی، ازبین برود و پیوند دیگری با علامت تصادفی، جای آن را بگیرد. این شبیه‌سازی را برای یک شبکه ۶۴ گره‌ای انجام داده‌ایم و ۱۶ آنسامبل از آن گرفته‌ایم. آستانه قدم‌های زمانی را ۳۰۰ قرار داده‌ایم که با توجه به رابطه ۱۰.۳ مقداری که برای آستانه طول عمر حساب خواهد شد برابر است با:

$$\tau = \frac{۳۰۰}{\binom{۶۴}{۲}} \simeq ۰/۱۵$$

حال اگر نمودار انرژی بر حسب گام های زمانی را رسم کنیم، خواهیم داشت:



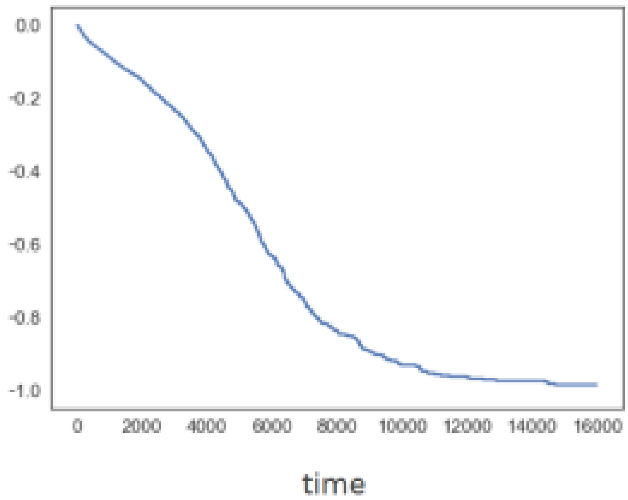
شکل ۶.۳: شبیه سازی برای ۶۴ گره و ۱۶ آنسامبل و آستانه طول عمر برای پیوند ها برابر با ۰/۱۵. همان طور که مشاهده می‌شود سامانه به توازن نرسیده است. [۳۸]

اما این نرسیدن سامانه به توازن به چه معناست؟ در توازن عادی، چیزی که به آن توجه نداشتیم مفهوم زمان بود. در واقع یک فرض پنهان وجود داشت که سامانه زمان زیادی در اختیار دارد تا به توازن برسد. حال آن که می‌توان این زمان را مورد بررسی قرار داد. اگر با فرض توازن عادی، یعنی فرصت زمانی بی‌نهایت به سامانه برای رسیدن به توازن، دوباره شبیه‌سازی را انجام

دهیم نتیجه‌ای شبیه به نتایج همیشگی خواهیم گرفت یعنی داشته باشیم:

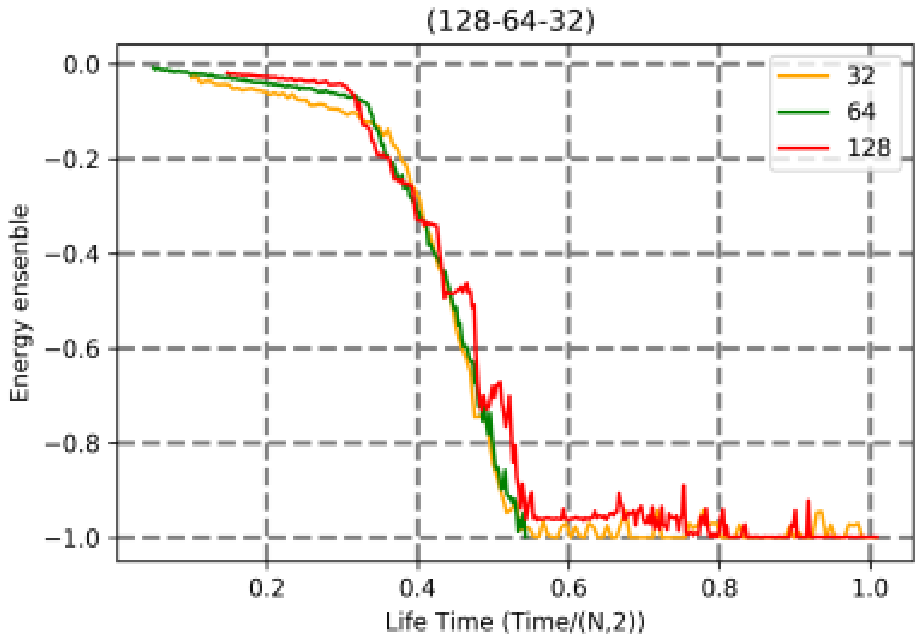
$$\tau = \frac{t_\infty}{\binom{۶۴}{۲}} \simeq \infty$$

انتظار داریم نتیجه‌ای مانند توازن عادی خروجی دهد که در شکل ۷.۳ می‌بینیم:



شکل ۷.۳: شبیه‌سازی برای ۶۴ گره و ۱۶ آنسامبل و آستانه طول عمر بینهایت برای پیوندها. همان طور که مشاهده می‌شود سامانه به توازن رسیده است. [۳۸]

همان‌طور که انتظار داشتیم، در حالتی که زمان بینهایت در اختیار سامانه باشد، مانند گذشته به توازن خواهد رسید. اما سئوالی که در اوایل بحث کرده‌ایم را دوباره می‌پرسیم. آیا بین طول عمر بینهایت ($\tau >> ۱$) و طول عمر بسیار کم ($\tau << ۱$)، عدد خاصی وجود دارد که بعد از آن طول عمر تقریباً مطمئن باشیم که سامانه به توازن خواهد رسید و قبل از آن به صورت تصادفی باقی خواهد ماند؟ برای شبیه‌سازی این حالت، سامانه رابرای ۳۲، ۶۴ و ۱۲۸ گره اجرا خواهیم کرد. هم چنین از طول عمر بسیار کم تا طول عمر بینهایت، تعدادی از طول عمرها را در نظر خواهیم گرفت. بعد از اجرا شبکه به شکل ۸.۳ خواهیم رسید.



شکل ۸.۳: شبیه‌سازی برای ۳۲، ۶۴ و ۱۲۸ گره و ۱۶ آنسامبل و آستانه طول عمرهای مختلف. محور عرضی نشان دهنده طول عمر مختلف و محور عمودی ، نشان دهنده میانگین انرژی در هر طول عمر است. [۳۸]

همان طور که از شکل ۸.۳ مشخص است، در طول عمر کوتاه، میانگین انرژی برابر با صفر است و در طول عمر بینهایت برابر با ۱− خواهد بود. در این بین با توجه به شکل در حدود ۰/۴۵ انرژی سامانه از صفر به صورت نزولی به سمت منفی یک حرکت می‌کند. پس مرز طول عمر ۰/۴۵ ، سامانه وارد فاز توازن می‌شود؛ و درواقع توازن دارای حد زمانی است. این حد برای ۳۲ گره برابر است با:

$$\tau = \frac{t}{\binom{۳۲}{۲}} \simeq ۰/۴۵$$
$$t \simeq ۲۲۳$$

برای ۶۴ گره برابر است با:

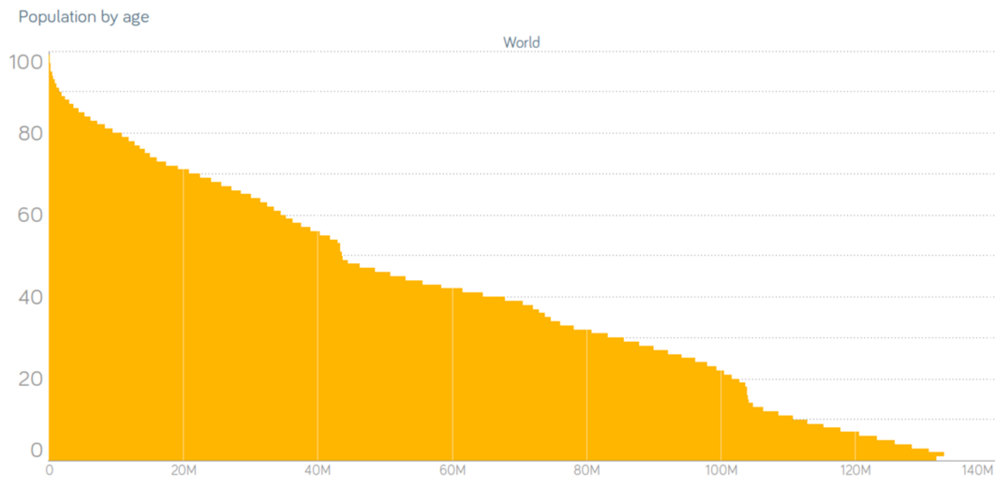
$$\tau = \frac{t}{\binom{۶۴}{۲}} \simeq ۰/۴۵$$
$$t \simeq ۹۰۷$$

و برای ۱۲۸ گره برابر است با:

$$\tau = \frac{t}{\binom{۱۲۸}{۲}} \simeq ۰/۴۵$$
$$t \simeq ۳۶۵۷$$

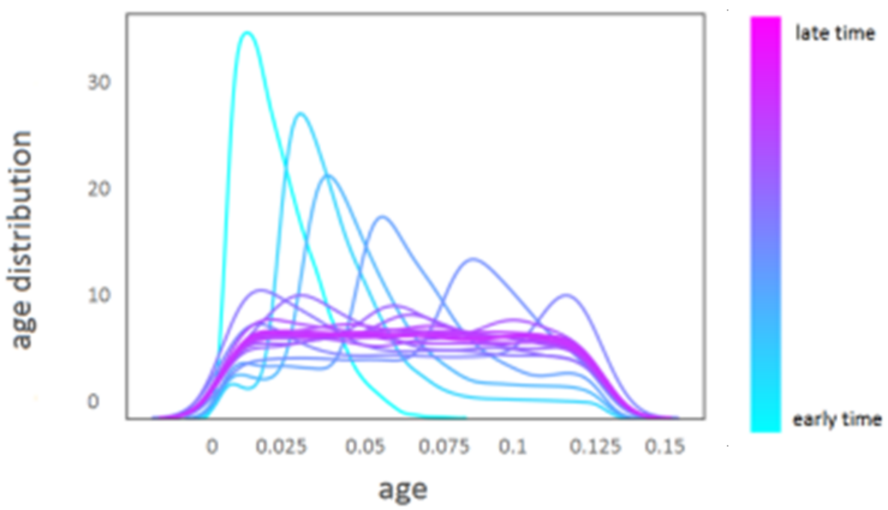
لازم است که کمی دربارهٔ آنچه روی داده‌است صحبت شود. همان‌طور که انتظار می‌رفت در میان طول عمر بینهایت و طول عمر تقریباً صفر، یک طول عمر نمایان شد که می‌توان گفت سامانه قبل از آن به توازن نرسیده‌است و بعد از آن عدد، به سمت توازن در حال حرکت است و البته این عدد برای تمام تعداد گره‌های مختلف یکسان است.

اما ما در این پژوهش یک فرضی را در توزیع سن اولیه پیوندها مورد استفاده قرار دادیم و البته قبل‌تر نیز به آن اشاره کردیم. توزیعی که برای شروع سن پیوندها در نظر گرفتیم، یک توزیع نیمه‌ـ‌گوسی است. این توزیع برگرفته شده از توزیع جمعیت جهان است [۴۰].



شکل ۹.۳: همان طور که از شکل جمعتی سال ۱۹۹۱ مشخص است، توزیع جمعیتی، توزیعی شبیه به نیم‌گوسی دارد. [۴۰]

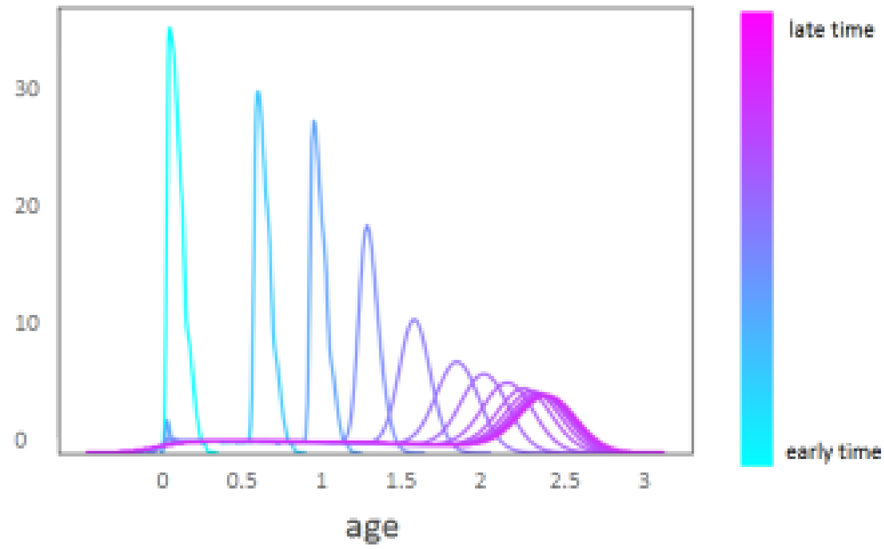
بر همین اساس نمودارهای دیگری که باید بررسی کنیم، نمودارهای مربوط به توزیع سن در گام‌های زمانی مختلف است. نخست سراغ طول عمر کوتاه می‌رویم و توزیع سن آن را بررسی می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۶.۳ مشاهده می‌کنیم، اگر طول عمر را برای ۶۴ گره، حدود ۰/۱۵ قرار دهیم، انتظار خواهیم داشت که در صورت رسیدن سن یک پیوند به ۰/۱۵، سن آن صفر گردد و علامت به صورت تصادفی انتخاب شود. حال توزیع سن پیوندهای آن را بر حسب سن پیوندها می‌کشیم. خواهیم داشت:



شکل ۱۰.۳: توزیع سن پیوندهای یک شبکه ۶۴ گره‌ای با طول عمر ۰/۱۵. همان طور که از شکل مشخص است توزیع اولیه سن پیوند ها، یک نیم‌گوسی بوده است [۳۸].

حال اگر مقدار آستانه طول عمر را به سمت بینهایت ببریم، انتظار داریم که سامانه بدون مشکلی به توازن برسد. مانند آنچه در شکل ۷.۳ روی داده‌است و سامانه بدون مشکل به مقدار ۱− رسیده‌است.

حال اگر نمودار توزیع سن را بکشیم خواهیم داشت:



شکل ۱۱.۳: توزیع سن پیوندهای یک شبکه ۶۴ گره‌ای با طول عمر ۰/۱۵. همان طور که از شکل مشخص است توزیع اولیه سن پیوند ها، یک نیم‌گوسی بوده است [۳۸].

همان‌طور که می‌بینیم در حالتی که آستانه طول عمر ۰/۱۵ است، پس از شروع سامانه، توزیع سن‌های پیوندها پس از مدتی، از حالت نیم‌گوسی به یک حالت پهن گونه‌ای که شامل تمامی سن‌ها می‌شود ختم می‌شود؛ و بیشترین مقدار آن هم بر حسب گام زمانی برابر است با:

$$\tau \simeq ۰/۱۵$$
$$\tau = \frac{t}{\binom{۶۴}{۲}}$$
$$t \simeq \binom{۶۴}{۲} \times ۰/۱۵ \simeq ۳۰۰$$

در حالتی که طول عمر خیلی بیشتر از طول عمر بحرانی یا ۰/۴۵ قرار می‌گیرد، در واقع فقط مدت زمان بیشتری به سامانه اجازه داده‌ایم که پیوندهایش افزایش سن داشته باشند. به‌طور مثال در شکل ۱۱.۳ مقدار طول عمر برابر ۳ گذاشته شده‌است که برابر می‌شود با حدود ۶۰۰۰ قدم زمانی یعنی داریم که:

$$\tau \simeq ۳$$
$$\tau = \frac{t}{\binom{۶۴}{۲}}$$
$$t \simeq \binom{۶۴}{۲} \times ۳ \simeq ۶۰۰۰$$

با توجه به شکل‌های ۱۱.۳ و ۱۰.۳ سعی خواهیم کرد یک رابطه کلی برای آن‌ها محاسبه کنیم. این فرمول یک قسمت مربوط به دم توزیع خواهد داشت که با توجه به مقدار طول عمر تغییر خواهد کرد و قسمتی دیگر، خود تابع توزیع گوسی را نشان

خواهد داد. پس با توجه به مطالب گفته شده، خواهیم داشت:

$$P(x,\tau) = \frac{۰/۹}{\tau} + \frac{(۱-e^{-\tau})}{\sigma\sqrt{۲\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^{۲}}{\sigma^{۲}}\right) \quad (۱۲.۳)$$

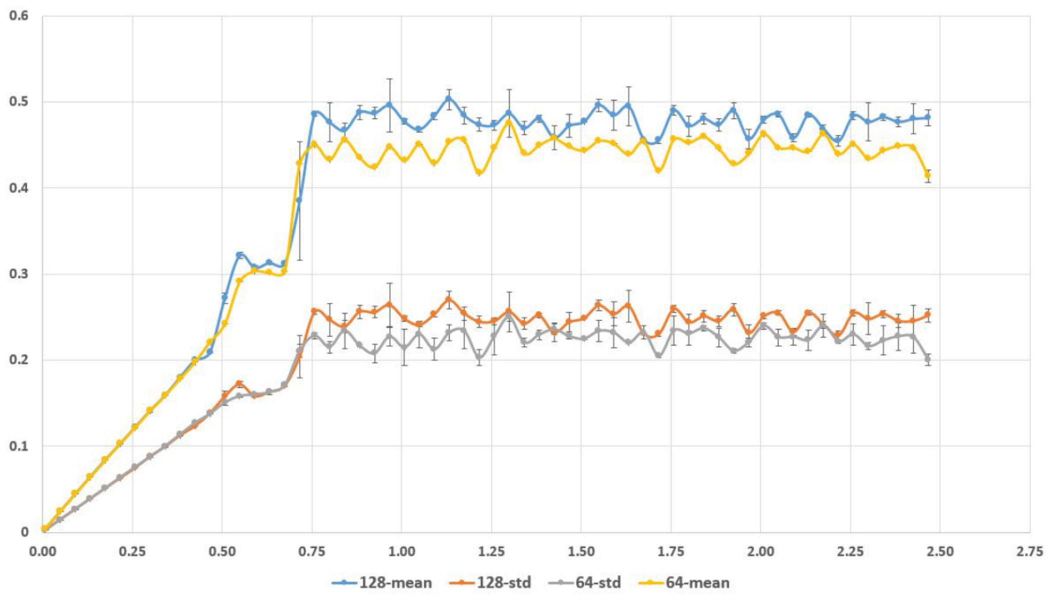
که در اینجا داریم:

$$\tau = Life\ time$$

$$x = age\ or\ t$$

حال باید بررسی کنیم آیا برای تمام گره‌ها هم میانگین و واریانس یکسان محاسبه خواهد شد یا خیر. برای این منظور به سراغ رسم رسم میانگین و انحراف معیار برای توزیع سن‌های ۶۴ و ۱۲۸ می‌رویم.

برای این منظور برای طول عمرهای مختلف سامانه را اجرا کرده، و میانگین و انحراف معیار هر طول عمر را ثبت می‌کنیم. پس خواهیم داشت:



شکل ۱۲.۳: توزیع میانگین و انحراف معیار سامانه برای ۶۴ و ۳۲ گره برای طول عمرهای مختلف. [۳۸].

همان‌طور که از رفتار میانگین و انحراف معیار مشخص است، در اوایل نمودار که طول عمر از مقدار بحرانی کمتر است، نمودار خطی است. به طوری که شیب نمودار میانگین، برابر ۰/۴۵ و شیب برای انحراف معیار برابر با ۰/۳ است.

همان‌طور که از شکل نیز مشخص است، با توجه به هنجارسازی که بر اساس تعداد پیوندها صورت گرفته، هر دو نمودار میانگین ۶۴ و ۱۲۸ بر روی هم قرار گرفته‌است. این وضعیت برای انجراف از معیار نیز تکرار شده‌است که نشان دهنده آن است که این نمودارها وابسته به تعداد گره نیست.

هم‌چنین بعد از یک طول عمر بحرانی که ما آن را τ^* می‌نامیم، و مقدار حدودی آن برابر است با:

$$\tau^* \approx ۰/۷۵$$

مقدار میانگین و انحراف معیار به سمت مقدار ثابتی حرکت می‌کند که این مقدار برابر است با:

$$\mu \simeq ۰/۴۶$$
$$\sigma \simeq ۰/۲۴$$

حال با توجه به رابطه ۱۲.۳ می‌توانیم رابطه را به دو قسمت قبل و بعد از τ^* بازنویسی کنیم. یعنی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \tau << \tau^*: \quad P(x,\tau) = \frac{۰/۹}{\tau} & ; \mu = ۰/۴۵\tau \quad ; \sigma = ۰/۳۱\tau \\ \tau >> \tau^*: \quad P(x,\tau) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^۲}{\sigma^۲}\right) & ; \mu = ۰/۴۶ \quad ; \sigma = ۰/۲۴ \end{cases} \tag{۱۳.۳}$$

به طوری که داریم:

$$\mu = \langle x \rangle = \int xp(x)dx \tag{۱۴.۳}$$

و

$$\sigma = \sqrt{\langle x^۲ \rangle - \langle x \rangle^۲} \tag{۱۵.۳}$$

و

$$\langle x^۲ \rangle = \int x^۲ p(x)dx \tag{۱۶.۳}$$

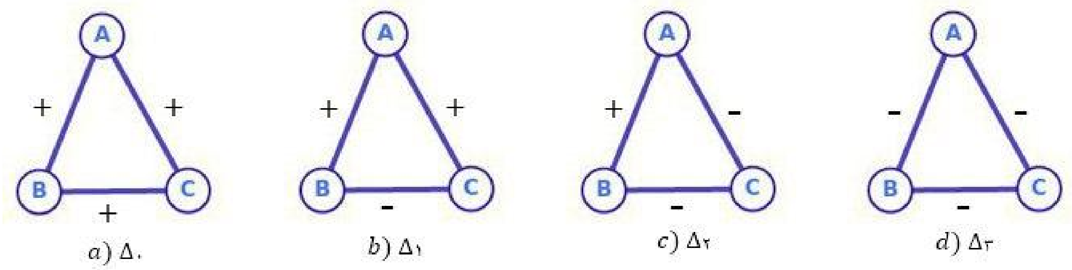
که با نتایج به دست آمده درشکل ۱۲.۳ هماهنگی دارد.

اما سئوالی که پیش می‌آید این است که چه رابطه‌ای بین مقدار $\tau^* = ۰/۷۵$ و مقدار طول عمر بحرانی توازن یا $\tau = ۰/۴۵$ وجود دارد؟ و از اختلاف این دو عدد چه مفهومی را می‌توان برداشت کرد؟ نکته‌ای که باید به آن توجه کرد، مقدار بحرانی طول عمر توازن صرفاً محل شروع حرکت سامانه برای رسیدن به توازن است و مقدار زمانی طول خواهد کشید تا سامانه کاملاً وارد فاز توازن شود و مقادیر میانگین و انحراف معیار آن بر عدد ثابتی قرار گیرد. بعد از این مدت، وقتی انرژی یا تنش سامانه به کم‌ترین مقدار خود رسید، دیگر پیوندها تمایلی برای تغییر در فرایند ندارند، زیرا در صورت تغییر انرژی یا تنش سامانه افزایش می‌یابد. اما آستانه طول عمر به هرحال وجود دارد و باعث می‌شود که پیوندها در صورت افزایش سن و رسیدن به آستانه طول

عمر، سن پیوند صفر شده، و مقدارعلامت تصادفی خواهد گشت.

۶.۳ تحول مثلث‌ها

در ادامه بررسی تغییر ساختار سامانه، به سراغ تغییر تعداد انواع مثلث‌ها در سامانه می‌رویم. بر اساس دینامیکی که برای شبکه قبل‌تر و در فصل توازن مطرح کردیم، در شبکه چهار نوع مثلث داریم که در شکل زیر مشخص است.



شکل ۱۳.۳: چهار نوع مثلثی که در شبکه قرار دارند.

حال برای دو حالتی که سامانه زمان بی‌نهایت در اختیار داشته باشد یا طول عمر بسیار کمی برای سامانه در نظر گرفته باشیم، تحول مثلث‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. نخست احتمال حضور هر یک از مثلث‌ها را حساب می‌کنیم. می‌دانیم با توجه به آن که سه ضلع داریم و برای هر ضلع دو انتخاب از میان منفی یا مثبت داریم، پس تعداد کل حالات مثلث‌ها برابر خواهد بود با:

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times = ۸$$

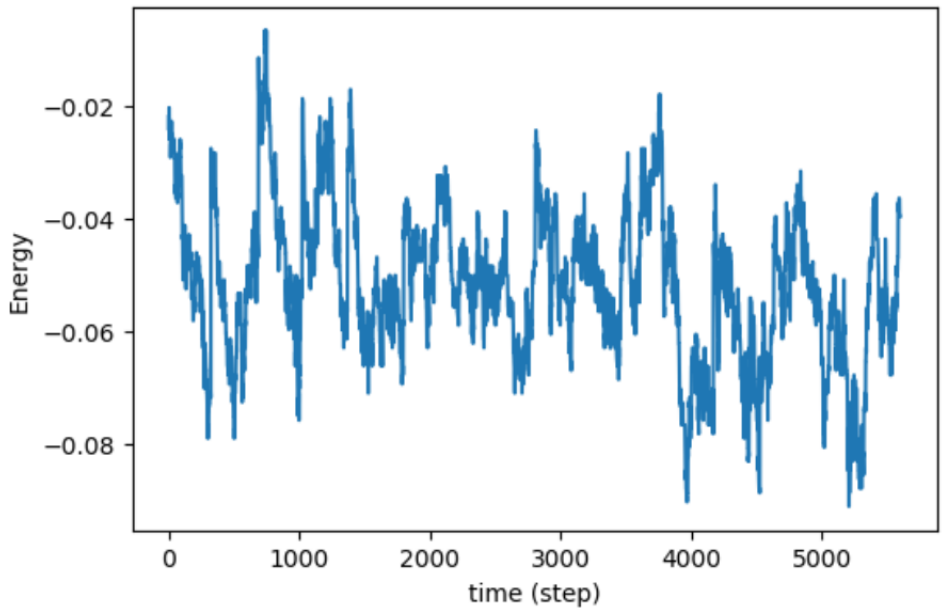
حال احتمال رخداد هر یک از چهار نوع مثلث را از بین این هشت حالت می‌سنجیم. برای $\triangle_.$ و $\triangle_۳$ خواهیم داشت:

$$\triangle_۳ \; and \; \triangle_. = \frac{۱}{۸} \tag{۱۷.۳}$$

به علت آن که برای هر علامت هر ضلع فقط یک انتخاب داریم. حال برای مثلث‌های $\triangle_۱$ و $\triangle_۲$ خواهیم داشت:

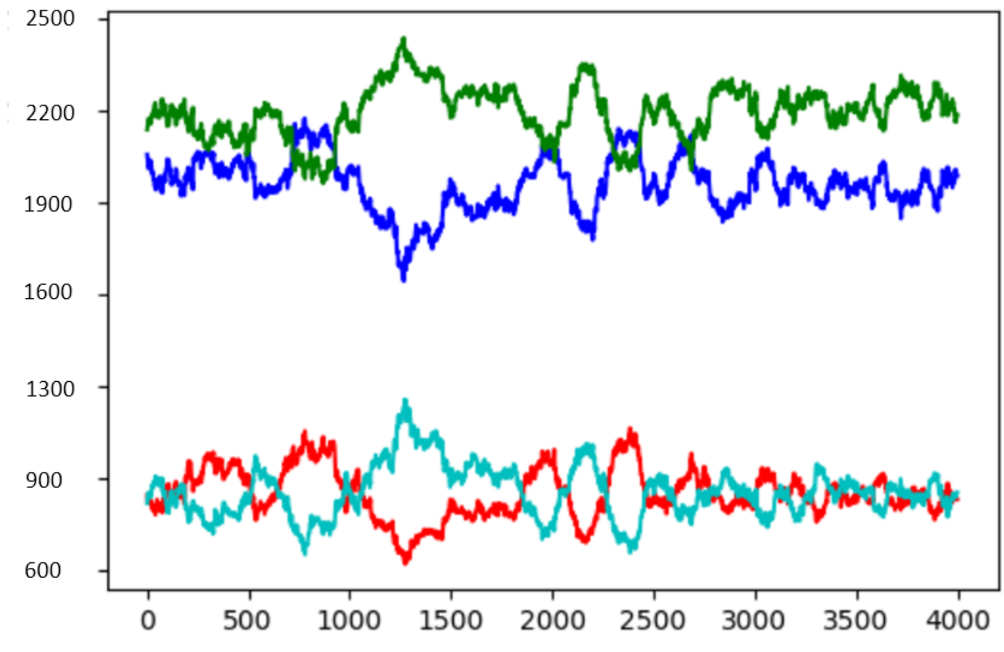
$$\triangle_۱ \; and \; \triangle_۲ = \frac{\binom{۳}{۱}}{۸} = \frac{۳}{۸} \tag{۱۸.۳}$$

به علت آن که کافی است فقط یکی از اضلاع را انتخاب کنیم و علامت آن را مخالف با بقیه قرار دهیم. پس با توجه به احتمالاتی که محاسبه کردیم، به سراغ حالت نخست می‌رویم که در آن طول عمر را بسیار کم در نظر گرفته‌ایم. این شبیه‌سازی برای یک شبکه با ۳۲ گره انجام شده‌است. با توجه به مطالب قبلی، در مورد انرژی خواهیم داشت:



شکل ۱۴.۳: نمودار انرژی برای یک شبکه با ۳۲ گره و حد طول عمر بسیار پایین (حدود ۲.۰)

همان‌طور که از شکل مشخص است سامانه نتوانسته‌است، به حالت توازن برسد. حال به سراغ تحول تعداد مثلث‌ها می‌رویم. خواهیم داشت:

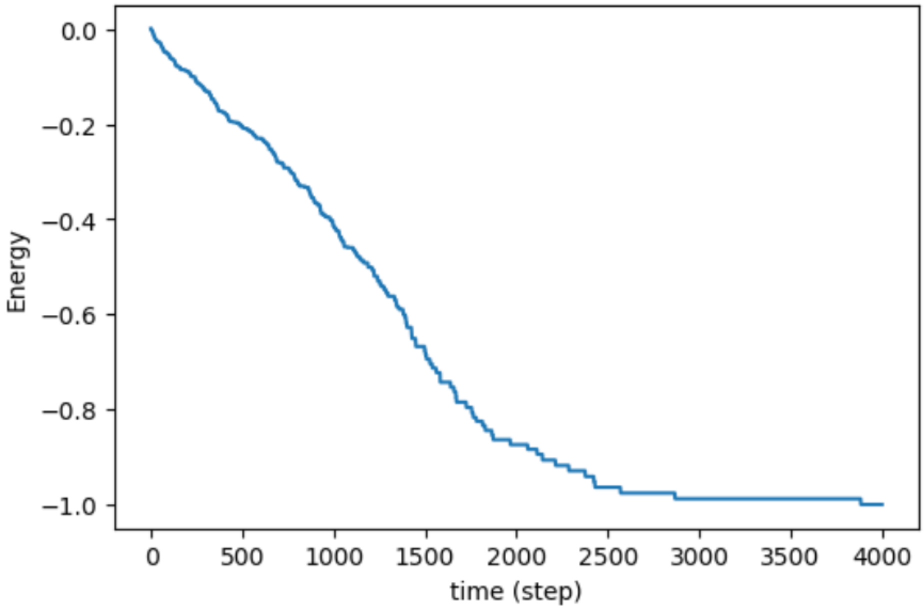


شکل ۱۵.۳: نمودار تعداد مثلث‌ها در زمان (محور عمودی در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌شود). رنگ قرمز $\triangle_0$، رنگ آبی $\triangle_1$، رنگ سبز $\triangle_2$ و رنگ فیروزه‌ای $\triangle_3$

همان‌طور که انتظار می‌رود، بر اساس احتمالی که در ۱۸.۳ و ۱۷.۳ محاسبه کردیم، تعداد مثلث‌های $\triangle_1$ و $\triangle_2$ بیشتر از $\triangle_0$ و $\triangle_3$ و در شکل حاصله نیز مشخص است و به علت آن که سامانه فرصت رسیدن به توازن را ندارد، میانگین انرژی کل

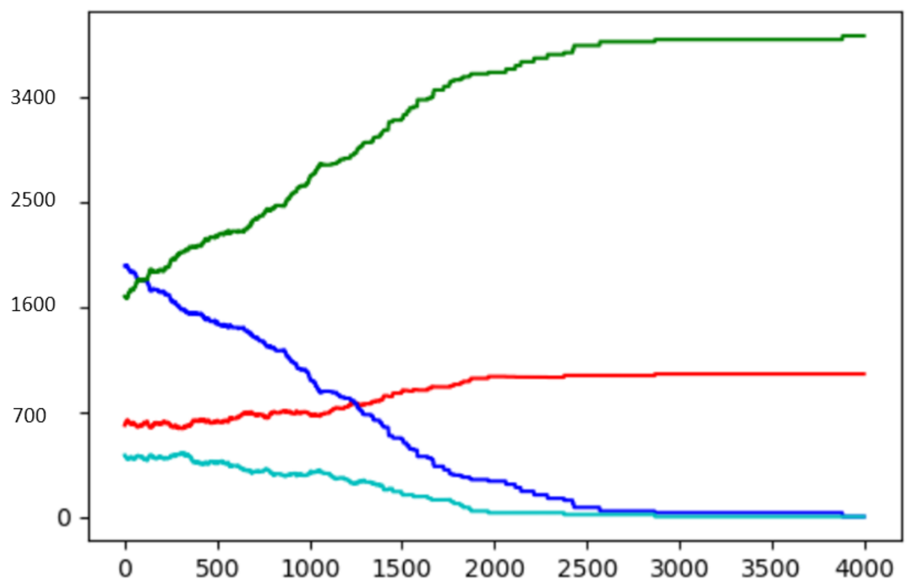
برابر صفر شده‌است و مثلث‌های مختلف همدیگر را خنثی کرده‌است.

حال به سراغ حالتی می‌رویم که سامانه طول عمر محدودی نداشته باشد. در این حالت برای انرژی خواهیم داشت:



شکل ۱۶.۳: نمودار انرژی برای یک شبکه با ۳۲ گره و حد طول عمر بسیاربالا (حدود ۱.۲)

همان‌طور که از شکل مشخص است، سامانه فرصت رسیدن به توازن را پیدا کرده‌است. حال به سراغ تعداد مثلث‌های مختلف می‌رویم. بر این اساس خواهیم داشت:



شکل ۱۷.۳: نمودار تعداد مثلث‌ها در زمان (محور عمودی در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌شود). رنگ قرمز $\triangle_0$، رنگ آبی $\triangle_1$، رنگ سبز $\triangle_2$ و رنگ فیروزه‌ای $\triangle_3$

همان‌طور که از شکل مشخص است در این حالت سامانه فرصت رسیدن به توازن را داشته‌است و به همین سبب مثلث‌های $\triangle_{۲}$ توانسته‌است در سامانه بیشترین تعداد را شامل شود. زمان حدودی تغییر تعداد مثلث‌ها در سامانه در حدود

$$\frac{۲۲۳}{\binom{۳۲}{۲}} \simeq ۰/۴۵$$

است که با یافته‌های قبلی ما در این مسئله مطابقت می‌کند.

۷.۳ نتیجه گیری

همان‌طور که قبل تر بیان کردیم، یک فرض پنهان در شبکه و نظریه توازن وجود دارد که سامانه زمان نامحدودی برای رسیدن به توازن دارد و بعد از آن نیز از نظر زمانی محدودیتی برای آن که سامانه را در حالت توازن نگه دارد، نخواهد داشت. اما می‌دانیم در دنیای واقعی چنین نخواهد بود. در دنیای واقعی پارامتر های زیادی وجود دارد، که بر روی پیوندها تأثیر بگذارند و حتی ممکن است که باعث شوند، تنش سامانه افزایش یابد.

ما در این پژوهش، برای سادگی، یک مدل ساده از یک شبکه کامل بدون وزن و بدون جهت را انتخاب کردیم و در چارچوب نظریه توازن به سراغ آن رفتیم. سپس متغیر سن را به پیوندها اضافه کردیم تا تأثیر طولانی بودن پیوند بر توازن را درک کنیم. همان‌طور که انتظار داشتیم، زمانی که به سامانه اجازه دست‌یابی به طول عمرهای بالاتر را می‌دهیم، سامانه به راحتی به حالت توازن می‌رسد مانند شکل ۷.۳ . اما در حالتی که به سامانه اجازه دست یابی به طول عمرهای بالا را ندهیم، همان‌طور که از شکل ۶.۳ به دست آمد، شبکه فرصت دستیابی به توازن را نمی‌یابد. اما این مسئله برای طول عمرهایی با عددی میان بینهایت و نزدیک به صفر چندان واضح نیست. برای این منظور به سراغ شبیه‌سازی طول عمرهای مختلف رفتیم. برای شبیه‌سازی این مسئله یک شبکه اولیه کامل با علامت‌های تصادفی ایجاد کردیم؛ و سپس با روش CTD و شرط طول عمر، مقدار انرژی یا تنش سامانه را در حالت‌های نهایی هر یک از طول عمرها محاسبه کردیم.

همان‌طور که از شکل ۸.۳ مشخص است، تغییر فازی در سامانه، در انرژی و طول عمر خاصی دیده می‌شود. در این نقطه که حدود است، سامانه از حالت نامتوازن، به سمت حالت متوازن حرکت می‌کند؛ و مسئله مهم آن است که این نقطه وابسته به سایز شبکه نیست؛ و می‌توان به آن به عنوان یک متغیر مؤثر در در رسیدن یک شبکه به حالت توازن نگاه کرد.

به‌طور مثال اگر به یک شبکه واقعی، زمان کافی یا فرصت کافی برای ایجاد پیوندهای اصلی‌ایش داده شود می‌تواند ساختارهای با معنی در گذر زمان ایجاد کند، ساختارهایی مانند تمدن یا پیشرفت‌های تکنولوژیک. هم‌چنین به سراغ شناخت ساختار شبکه رفتیم و در آن جا با بررسی توزیع سن، میانگین و انحراف معیار آن یک فرمول با مقادیر ثابت که برای هر تعداد گره به درستی عمل می‌کند معرفی کردیم.

۸.۳ پیشنهادها

ما در این پژوهش اگر چه از مدلی استفاده کردیم که تماماً یک شبکه واقعی را شبیه‌سازی نمی‌کند، اما سعی کردیم تا با رفع کردن اثر سایز و سایر موارد، آن را به یک مدل واقعی نزدیک‌تر کنیم. برای کارهای آینده یکی از گزینه‌های اصلی برای پژوهش‌های بیشتر، مورد استفاده قرار دادن شبکه‌های تنگ [۶] است که باعث می‌شود که مدل به واقعیت نزدیک‌تر شود [۴۱]. هم‌چنین می‌توانیم به پیوندها علاوه بر سن، حافظه نیز نسبت دهیم. به این معنا ممکن است یک پیوند بر اثر تحول از بین برود ولی با داشتن حافظه تغییر نکند. به‌طور مثال اگر یک فردی از فرد دیگر خاطره خوبی داشته باشد، حتی اگر عوض کردن این پیوند باعث شود تنش شبکه‌اش کم‌تر شود، ولی باز آن را تغییر نمی‌دهد.

[6] Sparse Network

کتاب‌نامه

[1] P. W. Anderson, "More Is Different," 1972.

[2] G. Bock, J. Goode, and Novartis Foundation., The limits of reductionism in biology. J. Wiley, 1998.

[3] N. Goldenfeld and L. P. Kadanoff, "Simple lessons from complexity," Science (80-.)., vol. 284, no. 5411, pp. 87–89, 1999.

[4] G. M. Whitesides and R. F. Ismagilov, "Complexity in chemistry.," Science, vol. 284, no. 5411, pp. 89–92, Apr. 1999.

[5] J. K. Parrish, J. K. Parrish, and L. Edelstein-keshet, "Complexity , Pattern , and Evolutionary Trade-Offs in Animal Aggregation," Science (80-.)., vol. 99, no. 1999, pp. 36–39, 2010.

[6] G. Weng, U. S. Bhalla, and R. Iyengar, "Complexity in biological signaling systems.," Science, vol. 284, no. 5411, pp. 92–6, Apr. 1999.

[7] D.Rind, "Complexity and climate," Science (80-.)., vol. 284, no. April, p. 105, 1999.

[8] W. B. Arthur, "Complexity and the economy," Science (80-.)., vol. 284, no. 5411, pp. 107–109, 1999.

[9] W. Royal, "editorial No man is an island," Nat. Phys., vol. 5, no. January, pp. 2009–2009, 2009.

[10] P. A. Corning, "The re-emergence of emergence, and the causal role of synergy in emergent evolution," Synthese, vol. 185, no. 2, pp. 295–317, Mar. 2012.

[11] Newman, Mark. Networks. Oxford university press, 2018.

[12] Albert, Réka, and Albert-László Barabási. "Statistical mechanics of complex networks." Reviews of modern physics 74, no. 1 (2002): 47.

[13] Heider, Fritz. "Attitudes and cognitive organization." The Journal of psychology 21, no. 1 (1946): 107-112.

[14] Cartwright, Dorwin, and Frank Harary. "Structural balance: a generalization of Heider's theory." Psychological review 63, no. 5 (1956): 277.

[15] Antal, Tibor, Pavel L. Krapivsky, and Sidney Redner. "Dynamics of social balance on networks." Physical Review E 72, no. 3 (2005): 036121.

[16] Marvel, Seth A., Steven H. Strogatz, and Jon M. Kleinberg. "Energy landscape of social balance." Physical review letters 103, no. 19 (2009): 198701.

[۱۷] حکیمی سیبنی، محمد حسین، دینامیک شبکه با حافظه تصادفی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۹۵

[۱۸] شربی، ریحانه، تعمیم نظریه توازن به شبکه‌های تنک، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۹۸

[۱۹] ابراهیمی، مهدیه، شکست تقارن در یک شبکه اسپینی با هامیلتونی سه‌تایی‌های جفت‌شده، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۹۷.

[20] S. A. Marvel, S. H. Strogatz, and J. M. Kleinberg, "Energy landscape of social balance," Phys. Rev. Lett., vol. 103, no. 19, pp. 1–4, 2009.

[21] T. A. P. L. K. S. Redner, “Social Balance on Networks : The Dynamics of Friendship and Enmity arXiv : physics / 0605183v1 [physics . gen-ph] 21 May 2006,” no. February 2008, pp. 1–16.

[22] J. J. Seidel, “A survey of two-graphs.” Accademia Nazionale dei Lincei, pp. 481–511, 1976.

[23] B. Bollobás, Random graphs. Cambridge University Press, 2001.

[24] L. Hedayatifar, F. Hassanibesheli, A. H. Shirazi, and S. V. Farahani, “Pseudo paths towards minimum energy states in network dynamics,” Physica A, vol. 483, pp. 109–116, 2017.

[25] F. Krzakala et al., “Spectral redemption: clustering sparse networks,” 2013.

[26] G. Jafari, A. H. Shirazi, A. Namaki, and R. Raei, “Coupled time series analysis: Methods and applications,” Comput. Sci. Eng., vol. 13, no. 6, pp. 84–89, 2011.

[27] https://online.visual-paradigm.com/diagrams/examples/dendrogram/cluster-dendrogram/

[28] G. Facchetti, G. Iacono, and C. Altafini, “Computing global structural balance in large-scale signed social networks,” Proceedings of the National Academy of Sciences, vol.108, no.52, pp.20953–20958, 2011.

[29] E. Estrada and M. Benzi, “Are social networks really balanced?,” arXiv preprint arXiv:1406.2132, 2014.

[30] E. Estrada and M. Benzi, “Walk-based measure of balance in signed networks: Detecting lack of balance in social networks,” Physical Review E, vol.90, no.4, p.042802, 2014.

[31] F. Harary et al., “On the notion of balance of a signed graph.,” The Michigan Mathematical Journal, vol.2, no.2, pp.143–146, 1953.

[32] J. A. Davis, “Clustering and structural balance in graphs,” Human relations, vol.20, no.2, pp.181–187, 1967.

[33] R. Singh and B. Adhikari, “Measuring the balance of signed networks and its application to sign prediction,” Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, vol.2017, no.6, p.063302, 2017.

[34] R. Z. Norman and F. S. Roberts, “A derivation of a measure of relative balance for social structures and a characterization of extensive ratio systems,” Journal of mathematical psychology, vol.9, no.1, pp.66–91, 1972.

[35] A. Kirkley, G. T. Cantwell, and M. Newman, “Balance in signed networks,” Physical Review E, vol.99, no.1, p.012320, 2019.

[36] V. Latora, V. Nicosia, and G. Russo. Complex Networks: Principles, Methods and Applications. Complex Networks: Principles, Methods and Applications, Cambridge University Press, 2017.

[37] Wargo, Eric. ”How many seconds to a first impression?.” APS Observer 19, no. 7 (2006).

[38] S. Arabzadeh, M. Sherafati, F. Atyabi, G. Jafari, K. Kuakowski,Critical lifetime phenomenain evolving social balance dynamics, (2019)

[39] https://www.populationpyramid.net/

[40] https://www.gapminder.org/tools/

[41] Kirkley, A., Cantwell, G. T., & Newman, M. E. J. (2019). Balance in signed networks. Physical Review E, 99(1),012320.

Abstract

From the beginning until now, human has been a social being, and accordingly, he tries to satisfy his needs through community and participation. Because of this idea, communicating with others has always attempted to minimize the tensions around him so that he could survive. However, this means that reducing stress requires having enough time for a person to improve their relationships. Now, what if he did not have enough time?

With an instance, we will make the subject a little clearer. Suppose you are hired at a company, and it is your first business day. At the beginning of your entry into the company, you build your initial links that include friendship or hostility. But without the opportunity to try to alleviate the tension, you get fired the first day. So you practically do not have enough time to correct, and your communication is virtually intact. However, what if you have the opportunity? You will probably be able to modify your relationships and reduce stress.

The idea that will be pursued in this study is to investigate the role of time in reducing stress in the network, including nodes and links. To this end, we turn to the Balance theory of Heider. Heider divides a network into three-node components and defines balanced and unbalanced states [13] For the triangle created by those three members, enabled him to quantify the level of tension in the network by defining the stress (energy) for the network, which was based on his theory. In later work, Cartwright and Harary discussed the structure, the amount of grid stress, and the minimum local characteristics, showing that the maximum energy of these states does not exceed the midpoint of the spectrum [14].

However, the point that is less addressed in this theory is that it takes time to reach the least stress and is assumed to be infinite. In this study, by examining the different values of this lifetime, we investigate its effect on the network and try to obtain a distribution at different times for the age of the links in the network.

In the first chapter of this study, we discussed the network and its properties, discussed some of the issues that can be investigated quantitatively, and finally discussed the complete network used in this study and discussed its properties.

In Chapter Two, we go into Heider's theory of balance and explain its properties and then examine those properties in a complete network. At the end of the chapter, we went into the jammed states and their features and ended the chapter with strategies to identify the jammed states.

In the third chapter, we move on to the element of time and life in the theory of balance and try to visualize the impact of this often-unseen feature by computer simulation. In the following sections, we examine the effect of this feature on the formation of network structures such as We studied the number of triangles and the change in the age distribution of the links and provided a term for the distribution of the links' age across different lifetimes.

Keywords: signed network, balanced network, critical relation age

Shahid Beheshti University
Physics Department

Master of Science Thesis

Complex Systems and non-linear dynamic

Topic

The effect of relationship life time on balance formation in social structure

By

Mohammad Sherafati

Supervisor

Dr. Gholamreza Jafari

Dec 2019