تمرین سری دوم

درس مکانیک آماری غیرتعادلی

پائیز ۱۴۰۰

مهلت تحویل

۲۱ آبان هزار و چهارصد

سوال ۱

معادله پخش

منظور از فرایند پخش برآیند حرکت مجموعه‌ای از ذرات از نقطه‌ای با چگالی بالا به نقطه‌ای با چگالی پایین‌تر است، در واقع پخش برخاسته از اختلاف چگالی ذرات در نقاط مختلف فضا می‌باشد. پدیده‌ی پخش را در جاهای دیگری مثل پخش دما در فضا نیز می‌توان مشاهده کرد. می‌خواهیم این پدیده را با استفاده از مفاهیم ولگشت تا حدی مطالعه کنیم برای شروع یک ولگرد که با احتمال p به راست و با احتمال q به چپ می‌رود، یا با احتمال λ در جای خود باقی می‌ماند را در نظر بگیرید. $(\lambda + q + p = 1)$

* احتمال اینکه ولگرد بعد از N قدم در نقطه‌ی x باشد را می‌توان با معادله‌ی بازگشتی زیر نوشت.

$$P_N(x) = pP_{N-1}(x-1) + qP_{N-1}(x+1) + \lambda P_{N-1}x \tag{۱}$$

با استفاده از این معادله و با توجه به اینکه N در معادله‌ی بالا نقش زمان (t) را دارد، سمت راست معادله را بر حسب زمان بسط داده و از روی آن $\frac{\partial P(x)}{\partial t}$ را به‌دست آوردید.

* سمت راست معادله‌ای که در قسمت قبل به‌دست آورده‌اید را بر حسب x با شرط $p = q = \frac{1}{2}, \lambda = 0$ بسط داده و ضریب پخش (D) را در معادله‌ی زیر به‌دست آورید

$$\frac{\partial P_(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P_(x,t)}{\partial x^2} \tag{۲}$$

* محاسبات بالا را برای حالت $p \neq q, \lambda \neq 0$ تکرار کنید و پارامترهای ν و D را در معادله‌ی زیر پیدا کنید.

$$\frac{\partial P_(x,t)}{\partial t} + \nu\frac{\partial P_(x,t)}{\partial x} = D\frac{\partial^2 P_(x,t)}{\partial x^2} \tag{۳}$$

* با شرط اولیه‌ی $P(x, t=0) = \delta(x, 0)$ معادله‌ی بالا را حل کرده و نشان دهید نتیجه به شکل زیر خواهد بود.

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi DT}} e^{-(x-\nu t)^2/4Dt} \tag{۴}$$

سوال ۲

ولگشت با طول قدم‌های متغیر

تا اینجای کار تمام محاسبات را بر اساس یک ولگشت یک بعدی با طول قدم‌های ثابت انجام دادیم، و به معادلات مربوط به پخش یک‌بعدی رسیدم، حالا می‌خواهیم معادلات پخش را برای ولگشت D بعدی، با طول قدم‌های متغیر به‌دست آوریم. فرض کنید قدم‌های ولگرد یک توزیع یکنواخت و همسانگرد در طول زمان داشته و مستقل از هم باشند، یعنی $p_N(\boldsymbol{r}) = p(\boldsymbol{r})$ و $p(\boldsymbol{r})$ تنها تابع فاصله‌ی شعاعی $r = |\boldsymbol{r}|$ باشد.

* مشابه معادله‌ی ۱ اینجا هم یک معادله‌ی بازگشتی برای $P_N(\boldsymbol{R})$ بنویسید.

* با استفاده‌ی از معادله‌ی بازگشتی مربوط به $P_N(\boldsymbol{R})$ و با فرض $\langle r\rangle = 0, \langle r^2\rangle = \sigma^2$ معادله‌ی پخش و ضریب پخش (D) را در شرایط زیر به‌دست آورید.

$$(\lim N \to \infty, P_N(\boldsymbol{R}) = \rho(R, N\Delta t) = \rho(R, t))$$

* تبدیل فوریه‌ی $\rho(x,t)$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{\rho}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik.x}\rho(x,t)d^dx \tag{۵}$$

$$\rho(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik.x}\hat{\rho}(k,t)d^dk \tag{۶}$$

با استفاده از این تبدیل معادله‌ی پخش را در فضای فوریه بازنویسی کنید.

* معادله‌ی به‌دست آمده در قسمت قبل را حل کرده، و با استفاده از تبدیل فوریه‌ی وارون، $\rho(x,t)$ را برای d بعد به‌دست آورید.

* به ازای $t \to \infty$ نشان دهید.

$$\rho(x,t) \simeq \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} \tag{۷}$$

سوال ۳

احتمال بازگشت

ذره‌ای را در نظر بگیرید که از نقطه‌ی ۰ شروع به ولگشت کرده باشد، می‌خواهیم احتمال بازگشت این ذره به نقطه‌ی ۰ را به‌دست آوریم. برای اینکار تابع $F(\boldsymbol{r}, t)$ را معرفی می‌کنیم که برابر است با احتمال اینکه ذره از فاصله‌ی $\boldsymbol{r}$ نسبت به مبدا برای اولین بار در زمان t عبور کند.

* $P(\boldsymbol{r}, t)$ را بر حسب $F(\boldsymbol{r}, t)$ بنویسید.

* عبارت به‌دست آمده در قسمت قبل را در فضای لاپلاس بنویسید و رابطه‌ی بین $F(\boldsymbol{r}, s)$ و $P(\boldsymbol{r}, s)$ را به‌دست آورید.

* احتمال بازگشت به نقطه‌ی صفر به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$R = \int_0^\infty F(0, t) dt = F(0, s = 0) \tag{۸}$$

* طبق معادله‌ی ۷ برای ولگشت یک بعدی داریم $P(\boldsymbol{r}, t) \simeq \frac{1}{(4\pi D t)^{1/2}}$، از روی این رابطه $P(\boldsymbol{r}, s)$ و $F(\boldsymbol{r}, s)$ را برای یک بعد به‌دست آورید.

* R را برای ولگشت یک‌بعدی به‌دست آورید.