تمرین سری اول

درس مکانیک آماری غیرتعادلی

پائیز ۱۴۰۰

مهلت تحویل

۲۱ آبان هزار و چهارصد

سوال ۱

یک ولگشت که در یک بعد حرکت می‌کند طول قدمش یعنی x از تابع توزیع زیر پیروی می‌کند:

$$P(x) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} e^{-\frac{۱}{۲\sigma^۲}(x-x_۰)^۲} \qquad (۱)$$

اگر این ولگشت N قدم بردارد:

* تابع توزیع فاصله از مبدأ را حساب کنید. (فرض کنید که ولگشت از مبدأ مختصات شروع به حرکت می‌کند)
* واریانس این تابع توزیع را محاسبه کنید.

سوال ۲

ولگشتی را در نظر بگیرید که طول هر قدم تصادفی آن از تابع توزیع زیر محاسبه می‌شود:

$$P(x)dx = \frac{۱}{\pi}\frac{a}{x^۲ + a^۲}dx \qquad (۲)$$

تابع توزیع فاصله این ولگرد را از مبدأ بعد از N قدم حساب کنید. آیا نتیجه با قضیه حد مرکزی تطابق دارد؟ آیا انتظار داریم این تطابق برقرار باشد؟

سوال ۳

یک ولگشت با قدم‌های گسسته که با احتمال p به راست و با احتمال q به چپ می‌رود را در نظر بگیرید

* با استفاده از تعریف زیر تابع مولد برای قدم اول ولگشت (Z_1) را به‌دست آورید.

$$Z_N(s) = \sum_x e^{sx} P_N(x) \qquad (۳)$$

* توان دوم این تابع مولد را به دست آورده و ضریب هر کدام از جملات زیر را در عبارت به‌دست آمده تعبیر کنید.

$$e^{-۲s}, e^{۰}, e^{۲s} \qquad (۴)$$

* با استفاده از Z_1^n احتمال اینکه بعد از n قدم، ولگرد در خانه‌ی ۰ باشد را به‌دست آورید

* حالا ولگردی را تصور کنید که طول هر قدم آن از تابع توزیع $p(x)$ به‌دست می‌آید؛ برای این ولگرد تابع مولد را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد.

$$\lambda(k) = \langle e^{ikx} \rangle = \int e^{ikx} p(x) dx \qquad (۵)$$

برای ولگردی با قدم‌های گسسته $p(x)$ را به‌دست آورده و از روی آن $\lambda(k)$ را به‌دست آورید.

* با استفاده از $\lambda(k)$ و به ازای $p = q = \frac{1}{2}$ احتمال حضور ولگرد را بعد از n قدم در خانه‌ی $j < n$ بیابید.

سوال ۴

یک ولگشت با قدم‌های گسسته که با احتمال p به راست و با احتمال q به چپ می‌رود را در نظر بگیرید. می‌خواهیم احتمال رد شدن ولگرد از خانه‌ی k را در دو حالت $(p \geq q)$ و $(p < q)$ به‌دست آوریم. ابتدا دو پارامتر P_1 و P_k را به قرار زیر تعریف می‌کنیم.

$$P_۱ = (\text{احتمال عبور از نقطه‌ی } ۱) \qquad (۶)$$

$$P_k = (\text{احتمال عبور از نقطه‌ی k}) \qquad (۷)$$

* P_k را بر حسب P_1 به‌دست آورید.
* P_1 را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$P_۱ = p \times ۱ + q \times P_۲ \qquad (۸)$$

با استفاده از نتیجه‌ی قسمت قبل P_2 را بر حسب P_1 جاگذاری کرده و معادله‌ی حاصل را حل کرده و P_1 را برای دو حالت $(p \geq q)$ و $(p < q)$ به دست آورید.

* حالا P_k را برای دو حالت $(p \geq q)$ و $(p < q)$ به دست آورید.
* با استفاده از شبیه‌سازی P_{20} را برای دو حالت $(p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3})$ و $(p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3})$ به‌دست آورید.

سوال ۵

سه نوع ذره A، Bو C داریم که قابلیت تبدیل شدن به یکدیگر را دارند.

* نرخ تبدیلات ذرات به صورت زیر می‌باشد:

$$A \xrightarrow{\lambda} B \qquad B \xrightarrow{\lambda} A$$

$$B \xrightarrow{۲\lambda} C \qquad C \xrightarrow{۲\lambda} B$$

$$C \xrightarrow{\lambda} A \qquad A \xrightarrow{۲\lambda} C$$

اگر در لحظه صفر $(t = 0)$ همه‌ی ذرات از نوع A باشند، حالت پایا را محاسبه کنید.

* این فرایند را شبیه‌سازی کرده و نتایج حاصل از شبیه‌سازی را با نتیجه‌ی به‌دست آمده از محاسبات مقایسه کنید.