بنام بی‌نام تو

8 Random_walk ✓

سمبل پدیده‌های فیزیکی است که می‌تواند حافظه داشته باشد یا نداشته باشد. در واقع یک سمبل ریاضی است برای توصیف تمام پدیده‌های مستقل. در حالت کلی اگر سیستمی را در نظر بگیریم. این سیستم تحت یک سری فعالیت‌های داخلی تحول پیدا می‌کند و ممکن است در این سیستم استقلالی وجود داشته باشد که از آن به عنوان RW یاد می‌کنیم. حال اگر برهم کنش‌هایی در این ترکیب دیده شوند، یعنی سیستم دارای حافظه باشد

می‌توان نشان داد که هر حافظه‌ای که سیستم پیدا می‌کند از طریق پارامترهایی مانند (بعد فرکتالی، نمای هارست و یا RW با حافظه) توصیف می‌گردد. به بیانی دیگر هیچ پدیده‌ای به طور مجرد، مستقل از RW با حافظه وجود ندارد.

✓ سیستم‌های با برهم کنش 8

یک محلول را در نظر می‌گیریم. این سیستم حاوی تعداد زیادی ذره است که این ذرات با یکدیگر برهم کنش دارند، در مسئله قبل فرض کردیم این ذرات هیچ‌گاه یکدیگر را نمی‌بینند و با هم برهم کنشی ندارند. اما به محض اینکه ذره‌ها بتوانند از یکدیگر اطلاع پیدا کنند (یعنی وقتی که چگالی ذرات بالا رود و یا نیروهای حاکم بین آنها قوی‌تر باشند) دیگر این ذرات از یکدیگر مستقل نیستند و می‌بایستی ذرات را با هم در نظر بگیریم.

Subject

Date

ایده‌ای که ما برای تک ذره‌ای به کار بردیم، در مورد این مسئله کارساز نخواهد بود. در مسئله تک ذره‌ای، تحولاتی که ما به کار می‌بردیم همزمان نبودند. یعنی یک تحول انجام می‌شد و برای تحول بعدی منتظر می‌ماندیم که چه اتفاقی خواهد افتاد.

اما در مورد چند ذره‌ای، اتفاقات به طور همزمان رخ می‌دهند و نمی‌توان با نگاه تکی مسئله را بررسی کرد.

✓ مثال‌هایی از سیستم‌های با برهم‌کنش:

✓ * مسئله چند ذره که به طور همزمان حرکت می‌کنند را می‌توان با استفاده از یک پدیده شناختی توصیف کرد. یعنی یک جمله غیرخطی برهم‌کنشی را به معادله پخش اضافه می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \mu n^2$$

اگر معادله تحول میانگین را در نظر بگیریم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\rangle = D\frac{\partial^2\langle n\rangle}{\partial x^2} - \underbrace{\mu\langle n^2\rangle}_{\text{ذرات حضور یکدیگر را حس می‌کنند}} + O(\ldots\ldots)$$

✓ * اپیدمی:

این مسئله می‌تواند شامل پخش یک بیماری و یا شایعه باشد که می‌توانند به صورت زیر با یکدیگر برهم‌کنش داشته باشند

$S + B \xrightarrow{\lambda} B + B$ ⤳ با یک احتمالی بیماری سرایت می‌کند

برای توزیع اتفاق، دو معادله جداگانه می‌نویسیم و به طور همزمان حل می‌کنیم ← Coupling

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = D\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \lambda BS \longrightarrow \text{کم شدن سالم‌ها} \\ \dfrac{\partial B}{\partial t} = D'\dfrac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \lambda BS \end{cases}$$

✓ این بحث را می‌توان در مورد رأی گیری نیز به کار برد. دو گروه آدم وجود دارند که هر کدام طرفدار یک رقیب هستند. ممکن است در حین مباحثه بتوانند طرف مقابل خود را قانع کرده و با خود هم رأی کنند. می‌توان در این بحث اثر تبلیغات را نیز در نظر گرفت (اثرهای خارجی)

$$\begin{cases} S + B \xrightarrow{\mu} S + S \\ S + B \xrightarrow{\lambda} B + B \end{cases}$$

& تبلیغات : $S \xrightarrow{\gamma} B$ &

به طور کلی Coupling منجر به اتفاقات خاصی می‌شوند. برای مثال در بحث بیماری‌ها، اپیدمی می‌تواند رخ دهد یعنی یک گذاری صورت گرفته است و سیستم وارد یک رژیم کنش جدیدی شده است. و یا در بحث رأی گیری پیش بینی می‌شود که از یک مرحله به بعد نقش تبلیغات می‌تواند اثر منفی بر روند رأی گیری بگذارد (گذار).

✓ بحث جمعیت 8

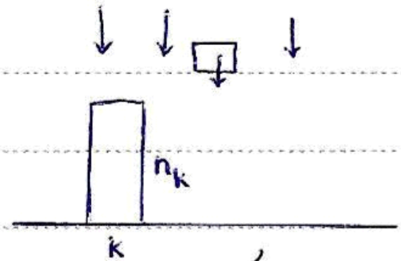
یک خرگوش (R)، روباه (F) و هیچ را در نظر می‌گیریم:

$$\left\{ R + F \xrightarrow{\lambda} F + 0 \quad \& \quad R + \overset{\text{هیچ}}{H} \xrightarrow{\mu} R + 0 \right\}$$

جمعیت انجام می‌شود

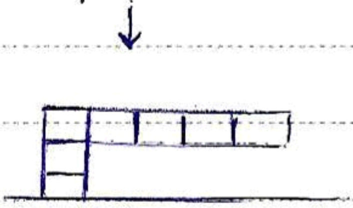
$o \xrightarrow{\gamma} H \rightsquigarrow$ رویش هویج در یک مزرعه

✓ بحث رشد سطوح :



تعدادی ذره وجود دارند که تحت قوانین خاصی روی زیرلایه می‌نشینند (دانه‌های برف)

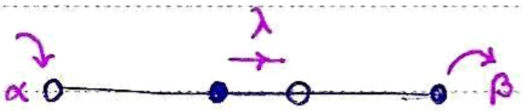
اگر ستون‌های مادهٔ مجاور بتوانند به طور تصادفی به هم بچسبند، یک همبستگی در سیستم به وجود خواهد آمد (برهم‌کنش)



در این بحث علاقه‌مندیم بدانیم، به طور متوسط ارتفاع چگونه رشد می‌کند و یا اینکه مومنت‌های بالاتر چگونه رشد می‌کنند. به راحتی می‌توان معادله تحول ارتفاعات را به دست آورد و مقدار مومنت‌ها را از روی این معادله محاسبه کرد. این بحث را می‌توان به ترافیک نیز تعمیم داد. به این صورت که یک سری ماشین با سرعت‌های مختلف حرکت می‌کنند اما به دلیل ترافیک سرعت آنها به یکدیگر همبسته می‌شود ← اتفاقات بلند برد شکل می‌گیرد

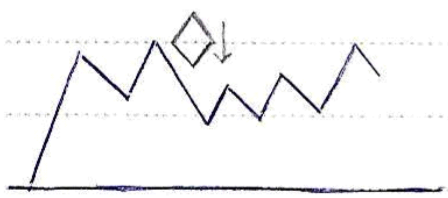
: Asymmetric Simple Exclusion process (ASEP) ✓

در این قسمت مدلی را معرفی می‌کنیم که قادر است سیستم‌های با برهم‌کنش را مدل کند. که معادل معادله پخش و واکنش است. برای سادگی یک شبکه یک بعدی در نظر می‌گیریم. در این حالت ذره با نرخ λ به جلو حرکت می‌کند و با نرخ α ذره وارد زنجیره شده و با نرخ β از زنجیره خارج می‌شود.



این مدل را می‌توان با یک نگاشت به یک مدل رشد سطح تبدیل کرد. یعنی نگاه خود به مسئله، نیز رنگ‌های مختلفی را در بر می‌گیرد.

اگر سیستم را در مقیاس بزرگتری بررسی کنیم خواهیم داشت:



درواقع مسئله (سطح ساخته شده از (ASEP) تبدیل به یک مسئله در رشد سطوح شد که در کلاس جهانی KPZ قرار می‌گیرد. اگر سطح یک سطح سیال باشد یعنی در سیستم Relaxation وجود داشته باشد، منجر به معادله برگرز (Bergers) می‌شود. درواقع چنین mapهای (نگاشت‌ها) نشان می‌دهند که چگونه یک اتفاق خود خاص صرفاً با یک توصیف جدید به یک اتفاق در سیستم دیگر از فیزیک تبدیل می‌شود. ← مفهوم universality

درواقع این مسئله از این نظر مهم است که با حل آن می‌توانیم به سیستم‌های بی‌شماری دسترسی پیدا کنیم که دارای برهم‌کنش هستند و جدا از اینکه چه نوع برهم‌کنشی وجود دارد می‌توانیم همه این سیستم‌ها را در قالب اینکه (α و β و γ) آنها چقدر است با یک پدیده فیزیکی معادل کنیم.

* در این مسئله گذارهای فاز وجود دارند که به شرایط مرزی وابسته‌اند. برای مثال اگر $\alpha = 0$ باشد یعنی زنجیره خالی می‌شود و اگر $\alpha \to \infty$ زنجیره پر می‌شود و یا در حالتی که $\beta \to \infty$ شبکه از ذرات خالی می‌گردد.

مثال 8

یک سیستم دو ذره‌ای در نظر می‌گیریم که با نرخ λ به جلو حرکت می‌کنند. در اینجا فرض می‌کنیم فاصله دو ذره از یک بیشتر است.

$$|n_1-n_2|>1 \quad , \quad -\infty<n_1<n_2<\infty$$

Master equation: $$\frac{\partial p(n_1,n_2,t)}{\partial t} = \lambda p(n_1-1,n_2)+\lambda p(n_1,n_2-1)-2\lambda p(n_1,n_2$$

حال اگر دو ذره کنار هم باشند باید یک معادله دیگر بنویسیم:

$$n_2=n_1+1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} p(n_1,n_1+1,t) = \lambda p(n-1,n+1)+0-\lambda p(n_1,n_1+1)$$

برای این سیستم دو ذره‌ای می‌بایستی دو معادله را به طور همزمان حل کنیم. حال اگر N ذره داشته باشیم مجبوریم N تا معادله را به طور همزمان حل کنیم که کار بسیار سختی خواهد بود. بنابراین باید از روش‌های کارآمدتری برای حل این معادلات استفاده کرد.

* می‌خواهیم این مسئله را از دیدگاه عملگری مورد بررسی قرار دهیم: ابتدا حل مسئله تک ذره‌ای را به روش عملگری یادآوری می‌کنیم.

ابتدا یک فضای هیلبرتی می‌سازیم که شامل بردارهای پایه $|n\rangle$ بود.

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad , \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \dots$$

$\langle S| = \langle 1| + \langle 2| + \dots = \langle 1, 1, 1, \dots |$ یک بردار S معرفی کردیم :

$\langle n | p(t) \rangle = p(n,t)$, $\frac{\partial}{\partial t} | p(t) \rangle = -H \, | p(t) \rangle$

تحولات p(t) به کمک هامیلتونی به دست می‌آید. یکی از علاقه‌مندی‌های ما این است که هامیلتونی را قطری کنیم ـــ به دنبال حالت پایا سیستم بودیم. در این حالت ویژه مقادیری که Real آنها برابر صفر بود را پیدا می‌کنیم ـــ توجه: برای سیستم‌هایی که هامیلتونی آنها به طور مستقیم وابسته به زمان نباشد

$$\Rightarrow |p(t)\rangle = e^{-Ht} \, |p(0)\rangle$$

RW: 

حال معادله I را به زبان عملگری می‌نویسیم :

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n,t) = \lambda \, p(n-1,t) + \mu \, p(n+1,t) - (\lambda+\mu) \, p(n,t) \quad (I)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle n|p\rangle = \lambda \, \langle n-1|p\rangle + \mu \, \langle n+1|p\rangle - (\lambda+\mu) \langle n|p\rangle$$

* عملگرهای R و L و X را به صورت زیر معرفی می‌کنیم :

$\uparrow$ 1, $R|n\rangle = |n+1\rangle \Rightarrow \langle n|R = \langle n-1|$ هرمیتی نیست ـــ

$(L = R^{-1})$

$\downarrow$ 2, $L|n\rangle = |n-1\rangle \Rightarrow \langle n|L = \langle n+1|$

3, $X|n\rangle = n|n\rangle$

Subject

Date

اثبات ساده: $\langle n'|R|n\rangle = \langle n'|n+1\rangle = \langle n'-1|n\rangle = \langle n'|R|n\rangle \Rightarrow \langle n'|R = \langle n'-1|$

می‌خواهیم با استفاده از این روابط معادله تحول را بازسازی کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n|p\rangle = \lambda\langle n|R|p\rangle + \mu\langle n|R^{-1}|p\rangle - (\lambda+\mu)\langle n|p\rangle$$

$$\Rightarrow H = (\lambda+\mu) - \lambda R - \mu R^{-1}$$

$\lambda=\mu$: در حالت پیوستاری $\underset{l\to 0}{R = e^{-ilP_x}}$ و H معادل خواهد بود با ∇^2 ← منجر به معادله پخش می‌شود

هم‌چنین برای ممنتم‌ها خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}\langle X\rangle = \langle [H,X]\rangle = \langle -\lambda[R,X] - \mu[R^{-1},X]\rangle =$$

$R|n\rangle = |n+1\rangle \qquad XR|n\rangle = (n+1)|n+1\rangle \qquad [X,R] = R$

$\Rightarrow \qquad\qquad \Rightarrow$

$X|n\rangle = n|n\rangle \qquad RX|n\rangle = n|n+1\rangle \qquad [X,R^{-1}] = -R^{-1}$

$$\Rightarrow \langle -\lambda(-R) - \mu R^{-1}\rangle = \langle \lambda R - \mu R^{-1}\rangle = \langle S|\lambda R - \mu R^{-1}|p\rangle = \lambda - \mu$$

داشتیم: $\langle S|R = \langle S| \;\&\; \langle S|R^{-1} = \langle S|$

یعنی مکان متوسط ذره با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

وقتی سیستم دو ذره ای را بررسی می کردیم (نسبت به جایگاهی که ذرات نسبت به هم داشتند) با یک معادله ما در به توصیف تحولات آن نبودیم و می بایست دو معادله را به طور همزمان حل کنیم. حال اگر مسئله به N ذره تعمیم داده شود این سری، سری اشتباه های بررسی پدیده خواهد بود.

ایده ای که به کار می بریم مشابه آن چیزی است که در مغناطیس کوانتومی با آن برخورد کرده ایم: زنجیری با N ذره در اختیار داریم، هر سایت را می توان، خالی و یا پر (۱ و ۰) در نظر گرفت (مشابه این ها) سم "second quantization"

از کنار هم قرار گرفتن این سایت ها فضای هیلبرت بزرگی ایجاد می شود که شامل ضرب تانسوری فضای دو بعدی هر کدام از این سایت هاست. (فضای 2N بعدی)

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \& \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* عملگرها:

۱) عملگر خلق:
$$\begin{cases} \sigma^- |0\rangle = |1\rangle \\ \sigma^- |1\rangle = 0 \end{cases} \longrightarrow \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

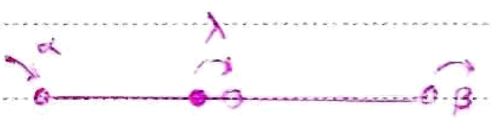
2) عملگر فنا:
$$\begin{cases} \sigma^+ |0\rangle = 0 \\ \sigma^+ |1\rangle = |0\rangle \end{cases} \longrightarrow \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\langle s| = \langle 0| + \langle 1|$ ⟵ جمع تمام حالات.

ایده‌ای که در اینجا به کار می‌بریم توانایی مدل کردن آشفتگی‌های جریان را دارد. تحول در اینجا به این معناست که سیستم از یک حالت به حالت دیگری می‌رود.

✓ به دنبال هامیلتونی سیستم هستیم:

یک زنجیره یک‌بعدی داریم که دارای N ذره است. این ذرات می‌توانند با نرخ تحول λ به سمت جلو حرکت کنند. البته می‌توان مسئله را گسترده‌تر در نظر گرفت. برای مثال در نقطه‌ای که ذره وجود ندارد، ذره تولید شود و یا بالعکس. نمود این مسئله در پدیده‌های سطحی، جذب و واجذبی است. و یا اینکه ذره با نرخ α وارد زنجیره شود و با نرخ β خارج گردد.



در مرحله اول، تنها حرکت به سوی جلو با نرخ λ را بررسی می‌کنیم و هامیلتونی را تشکیل می‌دهیم. توجه کنیم که برهم‌کنش از نوع همسایه اول وجود دارد.

$$H = \sum_k h_{k,k+1} = \sum_k \underbrace{-\lambda\left(\sigma_k^+ \sigma_{k+1}^-\right)}_{\text{احتمال گذار}}^{①} + \underbrace{\left(\text{عناصر قطری}\right)}_{\text{احتمال ماندن}}$$

① یعنی یک ذره‌ای در جایگاه k نابود شود و در جایگاه $k+1$ خلق شود.

Subject (2)

Date

علامت منفی بیانگر این مطلب است که حالت kام با نرخ λ کم می‌شود.

* برای به دست آوردن عناصر قطری به صورت زیر عمل می‌کنیم:

می‌دانیم: $\langle S|H = 0$ & $H \equiv$ (عناصر غیرقطری + عناصر قطری)

پس می‌توان نتیجه گرفت که مجموع عناصر غیرقطری با علامت منفی معادل عناصر قطری خواهد بود.

$$\langle S| h_{k,k+1} = \langle \dots, S_k, S_{k+1}, \dots | h_{k,k+1}$$

$\checkmark\ [n,\sigma^+] = \sigma^+ \ , \ [n,\sigma^-] = \sigma^-$

$$\langle SS| \sigma_k^+ \sigma_{k+1}^- = \langle SS| n_k (1 - n_{k+1})$$

1, $\langle S|\sigma^+ = (\langle 0| + \langle 1|)\sigma^+ = \langle 1| \equiv \langle S| n$

2, $\langle S|\sigma^- = (\langle 0| + \langle 1|)\sigma^- = \langle 0| = \langle S| (1-n)$

$\Rightarrow [\ominus n_k (1 - n_{k+1})] \rightsquigarrow$ عناصر قطری

بنابراین هامیلتونی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H = -\sum_k \lambda \left(\sigma_k^+ \sigma_{k+1}^- - n_k (1 - n_{k+1}) \right)$$

اگر دو ذره در کنار هم قرار داشتند، معادله تحول عوض می‌شد. اما با استفاده از این روش توانستیم با یک معادله دیفرانسیل تمام اتفاقاتی که مجبور بودیم به طور جداگانه بررسی کنیم را در قالب یک هامیلتونی توصیف کنیم.

Subject

Date

$* \ \sigma_k^+ \sigma_{k+1}^- |11\rangle = 0$ ✓ وقتی که دو ذره همسایه می‌باشند

می‌توانیم شرایط بیشتری را به مسئله اضافه کنیم. مثلاً ذره‌ای با نرخ μ خلق و با نرخ μ' نابود شود.

خلق: $\mu\left(\sigma_k^- - (1-n_k)\right)$ عناصر قطری: $\langle s|\sigma_k^-$

نابودی: $\mu'\left(\sigma_k^+ - n_k\right)$ عناصر قطری: $\langle s|\sigma_k^+$

$$\Rightarrow H = -\sum_k \lambda\left(\sigma_k^+\sigma_{k+1}^- - n_k(1-n_{k+1})\right) + \mu\left(\sigma_k^- - (1-n_k)\right) + \mu'\left(\sigma_k^+ - n_k\right)$$ ✓

* در این مسئله پایستگی تعداد ذرات به دلیل خلق و فنا وجود ندارد:

$$*\left[N, \sum_{k=1}^{N} \sigma_k^+ \sigma_{k+1}^-\right] \neq 0$$

*حال اگر ذره با نرخ α وارد و با نرخ β از سایت آخر خارج شود. می‌خواهیم اثر این دو جمله را به هامیلتونی اضافه کنیم:

$$H = H_B + h_1 + h_N \longrightarrow \begin{cases} * \ h_1 = -\alpha\left(\sigma_1^- - (1-n_1)\right) \\ * \ h_N = -\beta\left(\sigma_N^+ - n_k\right) \end{cases}$$

✓ اگر بخواهیم تعداد ذرات ثابت باشد جملات شامل h_1، h_N و μ، μ' می‌بایست صفر باشند.

✓ می‌توانیم یک حلقه بسته در نظر بگیریم که در این صورت خواهیم داشت: $N+1 \equiv 1$

به نام خداوند

در جلسه گذشته مسئله‌ای را بررسی کردیم که در آن ذرات با احتمال λ در یک بعد گذار می‌کنند. هامیلتونی سیستم را با کمک عملگرهای خلق و فنا (σ^+, σ^-) محاسبه کردیم.

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

با این ایده توانستیم تحولات سیستم را مستقل از تعداد ذرات به طور همزمان مورد بررسی قرار دهیم.

$$H = -\sum_k \lambda \left(\sigma_k^+ \sigma_{k+1}^- - n_k(1-n_{k+1}) \right)$$

حال با داشتن هامیلتونی سیستم برای محاسبه تحولات موضعی‌ها کافی است جابه‌جاگر آن‌ها را با هامیلتونی حساب کنیم.

$$\frac{d}{dt}\langle n_k \rangle = \langle [H, n_k] \rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle n_k, n_{k'} \rangle = \langle [H, n_k n_{k'}] \rangle$$

اگر تحول معکوس با نرخ λ را نیز در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$H = -\lambda \sum_k \left(\sigma_k^+ \sigma_{k+1}^- - n_k(1-n_{k+1}) \right) - \lambda \sum \left(\sigma_k^+ \sigma_{k-1}^- - n_k(1-n_{k-1}) \right)$$

بنابراین با محاسبه تحول موضعی اول می‌توانیم چگالی جریان را در سمت چپ و راست به دست آوریم.

$$\frac{d}{dt}\langle n_k \rangle = J_{in} - J_{out}$$

ت: رابطه بالا اثبات شود.

هامیلتونی های بزرگ:

برای به دست آوردن هامیلتونی های بزرگ ما باید هر سه درجه آزادی را برای سیستم در نظر بگیریم. بنابراین از تبدیلات زیر استفاده می کنیم.

$$\sigma^+ = \frac{x+iy}{2}, \quad \sigma^- = \frac{x-iy}{2}, \quad n = \frac{1-Z}{2}, \quad 1-n = \frac{1+Z}{2}$$

$$H = -\frac{1}{4} \sum (x+iy)(x-iy) + (x-iy)(x+iy) - (1-Z)(1+Z)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\sum 2x_k x_{k+1} + 2y_k y_{k+1} - 2Z_k Z_{k+1} - 2\right)$$

* مشاهده می شود که با استفاده از تبدیلات بالا به هامیلتونی شکل اسپینی با همسایه اول در سه بعد رسیدیم.

* حالات کلی واکنش های نزدیک‌ترین همسایه:

تمام اتفاقاتی که در یک بعد رخ می دهند را در نظر می گیریم.

حالت ابتدایی		حالت نهایی			
00	⇝	01	→	λ_{01}	خلق
00	⇝	10	→	λ_{02}	خلق
00	⇝	11	→	λ_{03}	خلق
01	⇝	00	→	λ_{10}	فنا
01	⇝	10	→	λ_{12}	پخش
01	⇝	11	→	λ_{13}	جذب

λ_{ij}: i اولیه، j ثانویه

Subject (2)

Date

نرخ تحول اتفاقات میان بیت

$10 \rightsquigarrow 00 \longrightarrow \lambda_{20}$

$10 \rightsquigarrow 01 \longrightarrow \lambda_{21}$

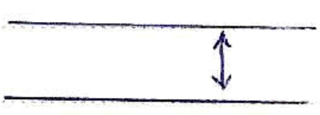
$10 \rightsquigarrow 11 \longrightarrow \lambda_{23}$

$11 \rightsquigarrow 00 \longrightarrow \lambda_{30}$

$11 \rightsquigarrow 01 \longrightarrow \lambda_{31}$

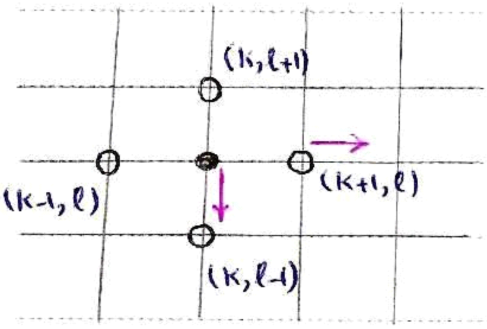
$11 \rightsquigarrow 10 \longrightarrow \lambda_{32}$

* زمان واهلش: مؤلفه‌های هامیلتونی از جنس ($\frac{d}{dt}$) ω هستند پس عکس هامیلتونی دینامیک زمان را به ما می‌دهد. اگر هامیلتونی را قطری کنیم و مقدار اختلاف بین H_0 و H_1 (حالت برانگیخته) را معکوس کنیم در واقع زمان relaxation را محاسبه کرده‌ایم. یعنی اگر انرژی به سیستم وارد شود T زمان طول می‌کشد تا سیستم به حالت پایا برسد.



$\rightsquigarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{\Delta E}$

* مدل کردن نزدیک‌ترین همسایه در دو بعد:



$\overbrace{\underset{(k,l)}{\overset{1}{\downarrow}} \quad \underset{(k+1,l)}{\overset{0}{\downarrow}}} \longrightarrow \overbrace{\underset{(k,l)}{\overset{0}{\downarrow}} \quad \underset{(k+1,l)}{\overset{1}{\downarrow}}}$

$$\Rightarrow H = -\lambda \sum_{k,l} \sigma^+_{k,l}\, \sigma^-_{k+1,l} - n_{kl}\,(1 - n_{k+1,l})$$

Phoenix

Subject
Date

* ممکن است در سیستم بیش از یک ذره وجود داشته باشند مثل فرایند رأی گیری یا اپیدمی. (هر نوع جمعیتی با دو نوع متفاوت)

$$* \begin{cases} A + B \xrightarrow{\lambda} B + B \\ A + B \xrightarrow{\beta} A + A \end{cases}$$

- این حالت را می توانیم معادل یک شبکه یک بعدی در نظر بگیریم که برای هر سایت سه حالت وجود دارد. ۱) ذره از جنس A ۲) ذره از جنس B و ۳) ذره ای وجود ندارد.

$$1, |\phi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 2, |A\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad 3, |B\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

* خلق A از خلاء : $|A\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv E_{10}$

* نابودی A : $|\phi\rangle\langle A| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv E_{01}$

تبدیل
* تبدیل A به B : $|B\rangle\langle A| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv E_{21}$

$$|\phi\rangle \to |0\rangle \ , \quad |A\rangle \to |1\rangle \ , \quad |B\rangle \to |2\rangle$$

$A \to B : E_{21}$, $\phi \to B : E_{20}$

Phoenix

* برای بخش $\underline{\underline{A}}$ داریم :

* $H = -\lambda \sum (E_{01})_k (E_{10})_{k+1} - (E_{11})_k (E_{00})_{k+1}$

نماد قطری : $\langle s| = (1\ 1 \ldots 1) \Rightarrow \langle s| E_{ij} = \sum_k \langle k|i\rangle \langle j| = \langle j| = \langle s|E_{jj}$

* برای بخش $\underline{\underline{B}}$:

* $H = -\lambda \sum_k (E_{02})_k (E_{20})_{k+1} - (E_{22})_k (E_{00})_{k+1}$

* تبدیل $\underline{\underline{B}}$ به $\underline{\underline{A}}$:

* $H = -\lambda \sum_k (E_{11})_k (E_{12})_{k+1} - (E_{11})_k (E_{22})_{k+1}$