به نام بی‌نام تو

مثال مربوط به زاد و ولد و مرگ و میر :

معادله تحول : $$\frac{\partial}{\partial t} p(n,t) = \lambda(n-1)\,p(n-1,t) + \mu\,(n+1)\,p(n+1,t) - n(\lambda+\mu)\,p(n,t)$$

حال اگر بخواهیم تحول ممان ها را بررسی کنیم خواهیم داشت :

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\sum_n n\,p(n,t) = \sum n\,\frac{\partial p}{\partial t} = \lambda\sum n(n-1)\,p(n-1,t) + \mu\sum (n+1)\,n\,p(n+1,t) - (\lambda+\mu)\sum n^2\,p(n,t)$$

$$= \lambda\langle n(n+1)\rangle + \mu\langle n(n-1)\rangle - (\lambda+\mu)\langle n^2\rangle \quad 1$$

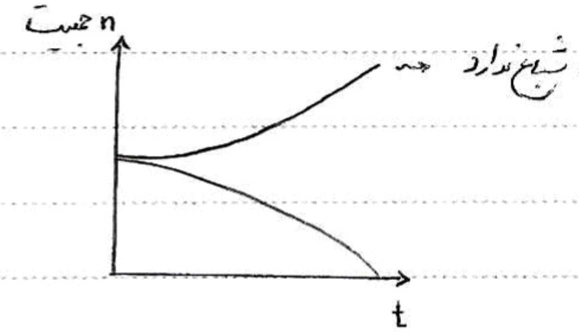
$$= (\lambda-\mu)\langle n\rangle \quad ✓ \quad 2$$

به طور کلی هنگامی که در یک معادله ممان ها با هم ارتباط داشته باشند (یعنی یک ممان به ممان های بالاتر بستگی داشته باشد) بیانگر این است که در این سیستم برهم کنش وجود دارد .

در مورد مثالی که ما بررسی کردیم برهم کنشی بین سیستم وجود نداشت یعنی تحولات مرگ و میر و زاد و ولد از یکدیگر مستقل بودند همانطور که در رابطه 1 می بینیم با ساده سازی این وابستگی از میان می رود (رابطه 2)

حالت کلی : $$\rightsquigarrow \langle n(t)\rangle = \langle n(t=0)\rangle\, e^{(\lambda-\mu)t}$$

Subject
Date



if $\begin{cases} \lambda > \mu \rightsquigarrow \text{رشد} \\ \lambda < \mu \rightsquigarrow \text{افت (در نهایت نسل منقرض می‌شود)} \end{cases}$

واگر $\mu = \lambda$ باشد متوسط جمعیت ثابت باقی می‌ماند. (n_0)

✓ تحول ممان دوم :

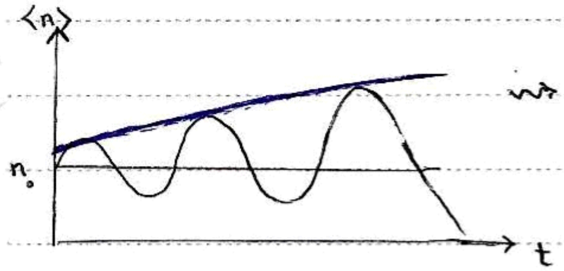
$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n^2\rangle = \frac{\partial}{\partial t}\sum n^2 P(n,t) = \lambda\langle (n+1)^2 n\rangle$$

$$+\mu\langle (n-1)^2 n\rangle - (\lambda+\mu)\langle n^3\rangle$$

$$= 2(\lambda-\mu)\langle n^2\rangle + (\lambda+\mu)\langle n\rangle \rightsquigarrow$$ برهم‌کنش وجود ندارد

* if $\mu = \lambda \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial t}\langle n^2\rangle = 2\lambda\langle n\rangle = 2\lambda n_0$ ✓

$\langle n^2\rangle = 2\lambda n_0 t \rightsquigarrow$ نشان می‌دهد که افت و خیزها با زمان رشد می‌کنند.



✓ افت و خیز از مرتبه $\sqrt{\langle n^2\rangle}$ است $\rightsquigarrow n = \langle n\rangle \pm \sqrt{\langle n^2\rangle} \rightsquigarrow$

* برای درک بهتر سیستم (RW) را در نظر می‌گیریم. اگر در سیستم (drift) وجود نداشته باشد (متوسط صفر باشد) به این معنا نیست که ذره هیچ حرکتی نمی‌کند بلکه نشان می‌دهد احتمال به چپ رفتن و به راست رفتن مساوی است و میزان حرکتی که می‌کند ناشی از نویز است. (مثل بحث مربوط به آلودگی)

⇓

« مفهوم ممان دوم »

* چون موبست دوم با زمان افزایش می یابد، این رشد می تواند به یک مقدار حدی برسد و محور صفر را قطع کند.

در یک سیستم جمعیتی : اگر جمعیت ثابت باشد به دلیل پدیده نوسان انتظار داریم که در این نسل انقراض رخ دهد.

✓ موبست دوم سیستم همشکل های دو نقطه ای را مدل می کند.

حال اگر یک جمله به معادله تحول اضافه کنیم، قادر خواهیم بود تا هم‌جنس‌کشی را در سیستم مشاهده کنیم ← اصلاح مدل

$$\frac{\partial}{\partial t} p(n,t) = \lambda(n-1)\, p(n-1,t) + \left[\mu(n+1) + \gamma n(n+1)\right] p(n+1,t)$$

$$- \left(\lambda n + \mu n + \gamma n(n-1)\right) p(n,t)$$

هنگامی که محدودیت منابع غذایی را به سیستم اضافه کنیم، نوعی رقابت به وجود خواهد آمد. بنابراین با افزایش جمعیت، به دلیل کمبود منابع، مرگ و میر افزایش خواهد یافت. بنابراین ترم اجازه نمی دهد که جمعیت از یک حدی بیشتر شود.

if $\gamma = \frac{2}{\Omega}$ ⇝ — با توجه به این تعریف هنگامی که منبع غذایی زیاد می شود ($\Omega \uparrow$)، دیگر رقابتی در این سیستم وجود ندارد و سیستم به همان حالت قبلی (بی هم‌جنس‌کشی) بر می گردد.

✓ تحول زمانی موبست اول :

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle n \rangle = \lambda \langle n(n+1) \rangle + \gamma \langle n(n-1)^2 \rangle + \mu \langle n(n-1) \rangle - \lambda \langle n^2 \rangle$$

$$- \mu \langle n^2 \rangle - \gamma \langle n^2 (n-1) \rangle$$

Subject

Date

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\langle n\rangle = (\lambda-\mu)\langle n\rangle - \gamma\langle n(n-1)\rangle$$

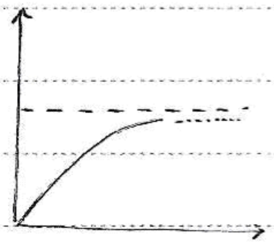
با استفاده از تقریب Mean Field : $\langle n(n-1)\rangle \simeq \langle n\rangle\langle n-1\rangle$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial t}\langle n\rangle = (\lambda-\mu)\langle n\rangle - \gamma\langle n-1\rangle\langle n$$

در واقع رابطه بالا یک معادله دیفرانسیلی ساده به صورت زیر است:

$$\dot{y} = (\lambda-\mu)y - \gamma(y-1)y$$

$\rightsquigarrow$ حل معادله $\rightarrow$



اشباع وجود دارد.

← در واقع رقابت باعث می‌شود که در نهایت سیستم به یک حالت تعادلی میل کند.

* هنگامی که در مدل هم زمان و هم مکان را گسسته در نظر بگیریم:

M.E: $p(n,t) = p\,P(n-1,t-1) + q\,P(n+1,t-1)$, $p+q=1$

* در حالتی که زمان پیوسته و مکان گسسته باشد:

معادله تحول: $\frac{\partial}{\partial t}p(n,t) = \lambda\, p(n-1,t) + \mu\, p(n+1,t) - (\lambda+\mu)\, p(n,t)$, $\lambda+\mu \neq 1$

- حرکت یک ذره را در یک بعد در نظر می‌گیریم. این ذره با نرخ احتمال λ به جلو و با نرخ احتمال μ به عقب حرکت می‌کند.

در اینجا می‌خواهیم هم زمان و هم مکان پیوسته باشند. در این صورت برای پیوسته کردن فضا از رابطه زیر

کمک می‌گیریم و آن را به سمت صفر میل می‌دهیم. $n_i - n_{i-1} = \Delta n$

$n=0$

$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad | \quad l \quad \cdot \quad l \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \rightsquigarrow \quad x = nl$ در فضای پیوسته

در این صورت عبارت $p(x,t)\Delta x$ احتمال حضور ذره در فاصله x و $x+\Delta x$ را بیان می‌کند.

گسسته $p(n,t) \longrightarrow p(x,t)$ پیوسته $\Rightarrow p(n,t)\Delta n = p(x,t)\Delta x \Rightarrow p(x,t) = \dfrac{p(n,t)}{l}$

R.W: $\dfrac{\partial p(n,t)}{\partial t} = \lambda p(n-1,t) + \mu p(n+1,t) - (\lambda+\mu) p(n,t)$

فرم پیوسته: $\dfrac{\partial}{\partial t} \cancel{l} (p(x,t)) = \lambda \cancel{l} p(x-l,t) + \mu \cancel{l} p(x+l,t) - (\lambda+\mu) \cancel{l} p(x,t)$

اگر $l \to 0$ میل کند عبارت بالا صفر خواهد بود یعنی $\dfrac{dp(x,t)}{dt} = 0$ که نتیجه اشتباه است. در واقع ضرایب μ و λ توابعی مقیاسی هستند یعنی با l تغییر می‌کنند. (وجود خواص بازهنجارش)

* بنابراین برای یافتن وابستگی ضرایب λ و μ با l به صورت زیر کار را دنبال می‌کنیم:

I: $\dfrac{\partial}{\partial t}\langle n(t)\rangle = (\lambda-\mu) \xrightarrow{\times l} \dfrac{\partial}{\partial t}\langle x(t)\rangle = (\lambda-\mu)l \rightsquigarrow$ از جنس سرعت

$\Rightarrow (\lambda-\mu)l = v \rightsquigarrow$ "drift سرعت"

II: $\langle n^2(t)\rangle - \langle n(t)\rangle^2 = (\mu+\lambda)t \xrightarrow{\times l^2} \underbrace{\langle x^2(t)\rangle - \langle x(t)\rangle^2}_{} = (\lambda+\mu)l^2 t$

$2Dt$: $t \times$ ضریب پخش

$\Rightarrow (\lambda-\mu)l = v \quad \& \quad (\lambda+\mu) = 2D \quad \Rightarrow$

Subject

Date

$\checkmark\ \lambda = \frac{D}{\ell^2} + \frac{v}{2\ell}$ & $\checkmark\ \mu = \frac{D}{\ell^2} - \frac{v}{2\ell}$

با جایگذاری ←

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{D}{\ell^2} + \frac{v}{2\ell}\right) p(x-\ell,t) + \left(\frac{D}{\ell^2} - \frac{v}{2\ell}\right) p(x+\ell,t) - \frac{2D}{\ell^2} p(x,t)$$

$$\xrightarrow[\ell \to 0]{} \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial} - v \frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow$$ معادله کلی پخش با جمله drift

$\checkmark$ if $D = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -v \frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow$ یعنی تابع توزیع احتمال با سرعت ثابت v به سمت چپ یا راست می رود

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p = -v \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) = v^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \rightsquigarrow$$ معادله موج

$\checkmark$ if $v = 0 \rightarrow \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t}$ * حالتی که در سیستم فقط پخش وجود داشته باشد:

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{ikx} p(k,t)\, dk \,, \quad p(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ikx} p(x,t)\, dx$$

برای حل معادله از تبدیل فوریه استفاده می کنیم:

$$\frac{\partial p(k,t)}{\partial t} = -Dk^2 p(k,t) \Rightarrow p(k,t) = p(k,0)\, e^{-Dk^2 t}$$

اگر در شرط اولیه فرض کنیم که سیستم در مبدا قرار داشته است:

$x=0, t=0 \rightsquigarrow p(x,0) = \delta_x \rightarrow p(k,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

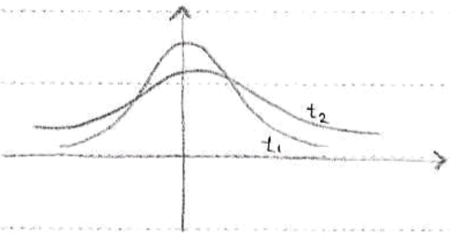
Phoenix

Subject (۹۱)

Date ۱۱،۲۸

$$\Rightarrow p(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ikx - Dk^2 t}\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2Dt}}\, e^{-x^2/4Dt} \quad (\mathrm{I})$$

در واقع در حالتی که فقط پخش داریم تابع توزیع، بدون جابه‌جایی، یک تغییر شکل پیوسته می‌دهد یعنی با افزایش زمان واریانس افزایش می‌یابد و تابع توزیع پهن‌تر می‌شود.



برای به دست آوردن جواب کلی :

برای به دست آوردن جواب همراه با ترم سرعت می‌توان از تبدیل گالیله استفاده کرد و با جاگذاری در معادله پخش (I) خواهیم داشت :

$$x \to x - vt \quad \& \quad t \to t$$

$$\Rightarrow p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\, e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}$$