۲. ریاضیات کسری

هر شخصی که محاسبات مقدماتی را مطالعه کرده باشد، با مفهوم انتگرال‌گیری و مشتق‌گیری آشنایی دارد. می‌دانیم که اگر $f(x) = x^2$ آن‌گاه انتگرال تابع تا مرتبه اول برابر خواهد بود با $\int f(x)dx = \frac{1}{3}x^3 + c_1$ و انتگرال‌گیری همان تابع تا مرتبه دوم منجر به نتیجه $\int[\int f(x)dx]\, dx = \frac{1}{12}x^4 + c_1x + c_2$ می‌شود. به صورت مشابه $\frac{d}{dx}f(x) = 2x$، و $\frac{d^2}{dx^2}f(x) = 2x$. حال چه می‌شود اگر بخواهیم انتگرال مرتبه $1/2$ این تابع یا مشتق مرتبه $1/2$ آن‌را محاسبه کنیم؟ چگونه می‌توانیم عملگر خود را تعریف کنیم؟ یا سوال بهتر این است که آیا نتایج حاصل همانند عملگرهای با مرتبه صحیح دارای معنا و مفهوم و کاربرد هستند؟

در فصل پیش رو، به توصیف این حوزه از محاسبات پرداخته و برخی از عملگرهای معروف و پرکاربرد دنیای ریاضیات کسری معرفی کرده و مفاهیم موجود در این دسته از عملگرها را بیان می‌کنیم.

۲,۱ منشاء محاسبات کسری

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه غیر صحیح به هیچ وجه مفهومی جدید نیست. علاقه‌مندی به مفاهیم آن تقریبا هم‌زمان با شناخته شدن محاسبات کلاسیک به چشم می‌خورد به طوری‌که لایبنیتز[۱] (۱۸۵۹) این ایده را در نامه‌ای به هوپیتال[۲] مطرح می‌کند. مطالعه‌های کمابیش سیستماتیک بیشتر در ابتدا و نیمه‌ی قرن نوزدهم توسط لیوویل[۳] (۱۸۳۲)،

---

۱ Leibniz
۲ L'Hopital
۳ Liouville

هولمگرن[۱] (۱۸۶۴)، اویلر[۲] (۱۷۳۰)، لاگرانژ[۳] (۱۷۷۲) و ریمان[۴] (۱۹۵۳) صورت گرفت، حتی در سال‌های اخیر نیز افرادی در این حیطه سهیم بوده‌اند.

لیوویل اولین شخصی بود که توابع را برحسب توابع نمایی بسط داد و مشتق مرتبه q چنین بسطی را با وارد آوردن عملگر بر یکایک جملات تعریف کرد به‌گونه‌ای که گویا q یک عدد صحیح مثبت است. ریمان تعریف متفاوتی ارائه کرد شامل یک انتگرال معین که قابلیت کاربرد در مورد سری‌های توانی با نمای غیر صحیح را دارا بود. ظاهرا گراند[۵] و کراگ[۶] اولین بار نتایج ریمان و لیوویل را به فرمی یکپارچه تبدیل کردند. گراند که از محدودیت‌های موجود بر رهیافت لیوویل آشفته شده بود، به عنوان نقطه شروع، مشتق را به صورت حد یک تفاضل کسری[۷] تعریف کرد و به فرمول انتگرال معین برای مشتق مرتبهq ام رسید. کراگ با شروع از فرمول انتگرال کوشی برای مشتق مرتبه صحیح، نشان داد که انتگرال معین ریمان باید این‌گونه تفسیر شود که دارای یک حد پایین محدود است؛ در صورتی‌که در تعریف لیوویل هیچ حد پایین محدود مشخصی ظاهر نمی‌شود و این معادل است با این‌که حد پایین منفی بی‌نهایت است.

به موازات این تعاریف تئوری، به‌کارگیری محاسبه‌های کسری در مسائل مختلف نیز آغاز شده بود. اولین این‌ها در ۱۸۲۳ توسط آبل[۸] انجام شد که در آن حل معادله انتگرالی برای تاتوکرون[۹] از طریق یک تبدیل انتگرالی به یک مشتق از مرتبه $\frac{1}{2}$ ممکن بود. محاسبه‌های عملیاتی هوویساید[۱۰] (۱۸۹۳،۱۸۹۲و۱۹۲۰) که برای حل مسائلی مشخص در تئوری الکترومغناطیس گسترش یافت، مهم‌ترین گام بعدی در کاربرد مشتق با مرتبه کلی بود؛ وی مشتق‌گیری کسری را در بررسی تئوری خطوط انتقال بکار برد. گمانت[۱۱] (۱۹۳۶) این مفهوم را در مسائل ،کشسانی مورد استفاده قرار داد.

---

۱ Holmgren
۲ Euler
۳ Lagrange
۴ Riemann
۵ Grunwald
۶ Krug
۷ The limit of a difference quotient
۸ Abel
۹ Tautochrone
۱۰ Heaviside
۱۱ Gemant

در قرن اخیر، تلاش‌های عمده‌ای هم در تئوری و هم در کاربرد محاسبات کسری صورت گرفته است. وایل[۱] (۱۹۱۷)، هاردی[۲] (۱۹۱۷)، کوبر[۳] (۱۹۴۰) و کاتنر[۴] (۱۹۵۳) برخی از خواص تا حدی ویژه اما طبیعی انتگرال–مشتق‌های توابع خاص متعلق به کلاس‌های لبسک[۵] و لیفشیتز[۶] را آزمودند.

۲,۲ تعریف محاسبات کسری

در طی سالیان ریاضیدان‌های زیادی، با استفاده از نمادگذاری و رهیافت خودشان تعاریف مختلفی را ارائه دادند که با ایده انتگرال و مشتق غیرصحیح متناسب بود. یکی از تعاریفی که در دنیای محاسبات کسری بسیار معروف شد، تعریف ریمان– لیوویل است. از آنجا که بسیاری دیگر از صورت‌های معرفی شده برای عملگرهای کسری شکلی تغییر یافته از نوع ریمان– لیوویل هستند، این فرم را بیان می‌کنیم.

۲,۳ انتگرال کسری ریمان– لیوویل

این بخش را با معرفی کوتاهی از نمادگذاری بکار رفته آغاز می‌کنیم. ${}_cD_x^{-\upsilon}f(x)$ نشان‌دهنده انتگرال تابع $f(x)$ تا مرتبه دلخواه υ و در امتداد محور x هاست. در این نمادگذاری υ یک عدد مثبت حقیقی است و c و x حدود انتگرالند.

۲,۳,۱ تعریف انتگرال کسری ریمان– لیوویل

فرض کنید که υ عددی حقیقی و غیرمنفی باشد. درنظر می‌گیریم که f به صورت تکه‌ای بر بازه $J' = (0,\infty)$ پیوسته و بر روی هر زیر بازه محدود از $J = [0,\infty]$ انتگرال‌پذیر باشد. در این‌صورت، برای $t>0$، انتگرال ریمان– لیوویل تابع f از مرتبه υ به صورت زیر خواهد بود[۵۵-۵۳] :

$$ {}_cD_x^{-v}f(x) = \frac{1}{\Gamma(v)}\int_c^x (x-t)^{v-1}f(t)dt, \qquad v>0. \tag{۲- ۱}$$

رابطه۲-۱ را می‌توان از راه‌های مختلفی بدست آورد.

مثالی برای انتگرال کسری

---

۱ Weyl
۲ Hardy
۳ Kober
۴ Kuttner
۵ Lebesgue
۶ Lipschitz

به عنوان نمونه‌ای از انتگرال کسری، انتگرال $D^{-\upsilon}x^{\mu}$ را برای $\upsilon > 0$ ، $\mu > -1$ محاسبه می‌کنیم. با توجه به تعریف:

$$D^{-v}x^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mathrm{v})}\int_0^x (x-t)^{v-1}t^{\mu}\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mathrm{v})}\int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{v-1} x^{v-1}t^{\mu}\,dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mathrm{v})}\int_0^1 (1-u)^{v-1}x^{v-1}(xu)^{\mu}\,xdu\,,\ \left(u=\frac{t}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mathrm{v})}x^{\mu+v}\int_0^1 u^{\mu}(1-u)^{v-1}\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mathrm{v})}x^{\mu+v}\mathrm{B}(\mu+1,v)$$

$$= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\mathrm{v}+1)}\mathrm{x}^{\mu+\mathrm{v}}.$$

مشاهده می‌شود که انتگرال کسری تابع توانی، یک تابع توانی است.

۲,۳,۲ تبدیل لاپلاس

همان‌طور که در محاسبات معمول یکی از روش‌های رایج و مناسب حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه صحیح استفاده از تبدیل لاپلاس است، در این‌جا نیز می‌توان با بدست آوردن تعریف لاپلاس مشتق و انتگرال کسری، از آن برای حل معادلات استفاده کرد.

تبدیل لاپلاس تابع $y(x)$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st}\,dt. \qquad (۲- ۲)$$

یادآوری می‌شود که لاپلاس عملگری خطی است. همچنین قضیه مهم و کاربردی کانوولوشن[۱] در مورد این تبدیل وجود دارد که طبق آن تبدیل لاپلاس کانوولوشن دو تابع برابر است با حاصل‌ضرب تبدیل لاپلاسشان. از این رو اگر $F(s)$ و$G(s)$ به ترتیب تبدیل لاپلاس دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ باشند، خواهیم داشت:

$$L\{f(t)*g(t);s\} = F(s)G(s). \qquad (۳- ۲)$$

---

۱ convolution

۲,۳,۳ تبدیل لاپلاس عملگر انتگرال کسری

در واقع انتگرال کسری از مرتبه υ از تابع $y(t)$

$$D^{-\nu}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-z)^{\nu-1}y(z)dz, \qquad \nu>0. \tag{۲- ۴}$$

یک کانوولوشن است. بنابراین با استفاده از تبدیل لاپلاس برای تابع توانی، می‌توان دید که:

$$\mathcal{L}\{D^{-\nu}y(t)\}=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\mathcal{L}\{t^{\nu-1}\}\mathcal{L}\{y(t)\}=s^{-\nu}Y(s), \quad \nu>0\ . \tag{۲- ۵}$$

معادله (۲- ۵) تبدیل لاپلاس انتگرال کسری است. به عنوان نمونه برای $\upsilon>0$ ، $\mu>-1$ داریم:

$$\mathcal{L}\{D^{-\nu}t^{\mu}\}=\frac{\Gamma(\mu+1)}{s^{\mu+\nu+1}}\ \text{ and }\ \mathcal{L}\{D^{-\nu}e^{at}\}=\frac{1}{s^{\nu}(s-a)}. \tag{۲- ۶}$$

۲,٤ مشتق کسری ریمان-لیوویل

در بخش قبلی انتگرال کسری را معرفی کردیم، در این‌جا نمادگذاری مشابهی را وارد می‌کنیم؛ در این متن ${}_cD_x^{\upsilon}f(x)$ نشان دهنده مشتق کسری تابع $f(x)$ از مرتبه $\upsilon>0$ است. در این‌جا صرفا اندیس $-\upsilon$ را با مقدار مخالفش جایگزین کردیم. و این یادآوری می‌کند که مشتق‌گیری بسادگی به‌صورت عکس عملیات انتگرال‌گیری تعریف می‌شود.

۲,٤,۱ تعریف مشتق کسری ریمان-لیوویل

مشتق کسری را می‌توان از طریق انتگرال کسری تعریف کرد. بدین منظور فرض کنید که $\upsilon=n-u$ است، که $0<\upsilon<1$ و n کوچکترین عدد صحیح بزرگ‌تر از u است. در این صورت مشتق کسری تابع $f(x)$ از مرتبه u به این صورت است:

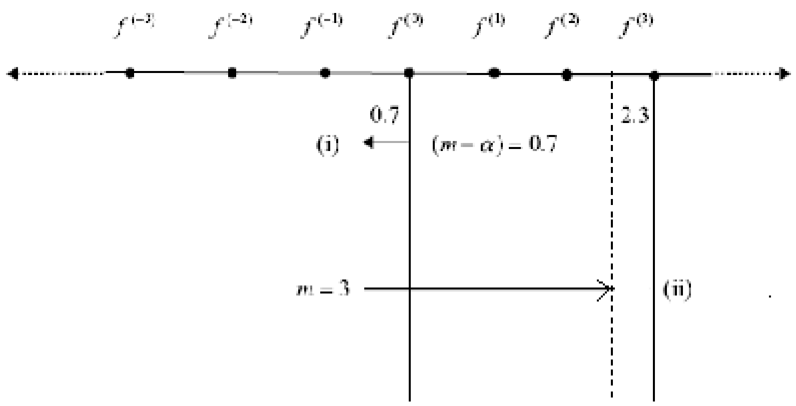
$$D^{u}f(x)=D^{n}[D^{-\nu}f(x)] \tag{۲- ۷}$$

مثال

فرض کنید که میخواهیم مشتق کسری از مرتبه υ تابع $f(x)=x^{\mu}$ برای $\mu\geq 0$ را محاسبه کنیم. برای استفاده از رابطه ۲-۷ کافیست جای u و υ را عوض کنیم. در نتیجه برای $n=1$ و $u=1-\upsilon$ داریم:

$$
\begin{aligned}
D^{\nu} f(x) &= D^{1}\left[\mathrm{D}^{-(1-\nu)} f(x)\right] \\
&= D^{1}\left[\mathrm{D}^{-(1-\nu)} x^{\mu}\right] \\
&= D^{1}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma((\mu-\nu+1)+1)} x^{\mu-\nu+1}\right] \\
&= (\mu-\nu+1)\frac{\Gamma(\mu+1)}{(\mu-\nu+1)\Gamma(\mu-\nu+1)} x^{\mu-\nu} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\nu+1)} x^{\mu-\nu}
\end{aligned}
$$

می‌بینیم که طبق تعریف فوق مشتق عدد ثابت $(\mu = 0)$، صفر نیست. در زیر به صورت شماتیک نحوه مشتق‌گیری طبق تعریف ریمان–لیوویل نشان داده شده است. همان‌طور که می‌بینیم برای انجام مشتق مرتبه ۲.۳ ابتدا انتگرال کسری $۲.۳ - ۳ = ۰.۷$، سپس مشتق صحیح از مرتبه ۳ گرفته می‌شود (شکل ۲-۱).



شکل ۲-۱: مشتق کسری از مرتبه ۲,۳

۲,٤,۲ تبدیل لاپلاس مشتق ریمان–لیوویل

اگر فرض کنیم که تبدیل لاپلاس تابع$y(x)$ وجود داشته باشد و با توجه به تبدیل لاپلاس در بحث عملگر های مرتبه‌ی صحیح،

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^{n}Y - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{n-1}(0)$$

$$= s^{n}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} y^{k}(0) \qquad (۲- ۸)$$

و استفاده از تعریف مشتق ریمان–لوویل،

$$D^{\nu}y(t) = D^{n}\left[\mathrm{D}^{-(n-\nu)}y(t)\right]. \tag{۲- ۹}$$

می‌توان تبدیل لاپلاس مشتق ریمان- لیوویل را به این صورت بدست آورد:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{D^{\nu}y(t)\} &= \mathcal{L}\{D^{n}\left[\mathrm{D}^{-(n-\nu)}y(t)\right]\} \\
&= s^{n}\mathcal{L}\{D^{-(n-\nu)}y(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^{k}\,[D^{-(n-\nu)}y(t)]_{t=0} \\
&= s^{n}[s^{-(n-\nu)}Y(s)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^{k-(n-\nu)}\,y(0) \\
&= s^{\nu}Y(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}D^{k-n+\nu}\,y(0)
\end{aligned} \tag{۲- ۱۰}$$

۲,۵ عملگر کاپوتو[۱]

عملگر مشتق کسری ریمان- لیوویل در هنگام کاربرد در مورد پدیده‌های واقعی دارای یک سری کاستی‌هاست.، از جمله این‌که امکان حضور تکینگی و در نتیجه واگرا شدن، در سر بازه‌ها وجود دارد. همچنین از آن‌جا که تبدیل لاپلاس این عملگر به مقادیر اولیه‌ی مشتقات غیرصحیح تابع بستگی دارد که این امر از نظر فیزیکی معنادار نیست، در کاربرد آن دچار مشکل می‌شویم.

عملگر دیگری که در این‌جا معرفی می‌شود، عملگر کاپوتو است که به این صورت تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
{}_{b}^{C}D_{x}^{\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{b}^{x}(x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt, \qquad n=\lfloor \mathrm{Re}(\alpha)\rfloor+1; \mathrm{Re}(\alpha)\geq 0; x>b. \\
{}_{x}^{C}D_{b}^{\alpha} f(x) &= \frac{(-1)^{n}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{x}^{b}(t-x)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)dt, \qquad n=\lfloor \mathrm{Re}(\alpha)\rfloor+1; \mathrm{Re}(\alpha)\geq 0; x<b.
\end{aligned} \tag{۲- ۱۱}$$

نماد c نشان دهنده عملگر کاپوتو است، و همانطور که دیده می‌شود در این‌جا برای انجام مشتق کسری از مرتبه α، ابتدا مشتق صحیحی از مرتبه n گرفته می‌شود، که n کوچکترین عدد صحیح بزرگ‌تر از α می‌باشد، سپس با استفاده از تعریف انتگرال کسری ریمان- لیوویل، انتگرالی از مرتبه‌ی $n-\alpha$ گرفته می‌شود.

به‌سادگی می‌توان نشان داد که تعریف کاپوتو همان تعریف ریمان- لیوویل است که تکینگی سر بازه‌ی آن حذف شده است.

---

[۱] Caputo

$$ {}_b^C D_x^\alpha f(x) = {}_b D_x^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k \right], \qquad n = \lfloor \mathrm{Re}(\alpha) \rfloor + 1 $$

$$ {}_x^C D_b^\alpha f(x) = {}_x D_b^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-x)^k \right]. \qquad n = \lfloor \mathrm{Re}(\alpha) \rfloor + 1 $$

(۲- ۱۲)

۲,۵,۱ تبدیل لاپلاس

با توجه به این که کاپوتو، انتگرال ناصحیح از یک مشتق صحیح است، برای تبدیل لاپلاس آن داریم:

$$ L\left\{ {}_0^C D_t^\alpha f(t); s \right\} = L\left\{ {}_0 D_t^{\alpha-n} f^{(n)}(t); s \right\} = s^{\alpha-n} \left[s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \right] $$

$$ = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \qquad n = \lfloor \mathrm{Re}(\alpha) \rfloor + 1 $$

(۲- ۱۳)

۲,٦ عملگر وایل

عملگر وایل که به عنوان عملگر نیم‌محور هم شناخته می‌شود، در واقع با به سمت بی‌نهایت میل دادن حد پایین (بالا) انتگرال در تعریف ریمان- لیوویل چپ (راست) حاصل می‌شود.

$$ D_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \qquad n = \lfloor \mathrm{Re}(\alpha) \rfloor + 1; \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0 $$

$$ D_-^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx} \right)^n \int_{x}^{\infty} (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt. \qquad n = \lfloor \mathrm{Re}(\alpha) \rfloor + 1; \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0 $$

(۲- ۱۴)

از ویژگی‌های این عملگر این است که با عمل کردن بر توابع توانی و نمایی، شکل آن‌ها را تغییر نمی‌دهد.

۲,٦,۱ تبدیل فوریه

اگر کانوولوشن دو تابع g و h را به این صورت تعریف کنیم (دقت شود در این حالت حدود انتگرال‌ها نسبت به تعریف قبلی کانوولوشن تغییر کرده است.):

$$ g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau) h(\tau) d\tau, $$

می‌توان نشان داد که عملگر وایل، یک کانوولوشن است،

$$D_{+}^{-\nu} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^{t} (t-\tau)^{\nu-1} g(\tau) d\tau. \quad 0 < \mathrm{Re}(\nu) < 1$$

حال با توجه به این نکته که تبدیل فوریه‌ی کانوولوشن دو تابع، برابر است با حاصل‌ضرب تبدیل فوریه دو توابع، تبدیل فوریه‌ی عملگر به این شکل خواهد بود:

$$F\{D_{+}^{-\nu} g(t); \omega\} = (-i\omega)^{-\nu} G(\omega).$$ (۲- ۱۵)

۲,۷ عملگر انتگرال- مشتق گراند-لتینکوف[۱]

در ادامه عملگر دیگری برای انتگرال- مشتق کسری معرفی می‌شود. در مشتق‌گیری از مرتبه صحیح، تعریف حدی مشتق به این صورت ا ست:

$$f^{n}(x) = D^{n} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{n}} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m} \binom{n}{m} f(x - mh)$$ (۲- ۱۶)

در این‌جا میتوان عبارت $\binom{n}{m}$ را با تابع گاما به صورت $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\,\Gamma(\alpha-m+1)}$ برایn های غیرصحیح ،که با α نشان می‌دهیم، جایگزین کرد. در نتیجه به تعریف عملگر مشتق کسری گراند- لتینکوف می‌رسیم:

$${}_{a}D^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{m=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} (-1)^{m} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)} f(x - mh)$$ (۲- ۱۷)

برای α ی منفی، فرآیند انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$${}_{a}D^{-\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} h^{\alpha} \sum_{m=0}^{\left[\frac{x-a}{h}\right]} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\alpha)} f(x - mh)\ .$$ (۲- ۱۸)

با توجه به این‌که حد بالای انتگرال مقداری محدود است، تعریف فوق گراند- لتینکوف محدود نام دارد و در محاسبات عددی بکار برده می‌شود. همچنین می‌توان نشان داد که این عملگر با عملگر ریمان- لیوویل رابطه دارد، بنابراین می‌توان سایر عملگرها را بر اساس این تعریف بیان کرد.

---

۱ Grunwald Letnikov

۲,۸ معادلات کسری و غیرموضعیت

بسیاری از مسائل فیزیک و مهندسی، شامل معادلات شرودینگر، ماکسول، نیوتون، شارش گرمای فوریه، حرکت براونی، سیستم‌های بیوفیزیکی و... را می‌توان به‌صورت مسائل شرط اولیه برای معادلات تحول دینامیکی به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$\frac{d}{dt}f(t) = Bf(t) \tag{۲- ۱۹}$$

که $t \in \mathbb{R}$ نشانگر زمان و B عملگر در فضای باناخ است. این معادله کلاسیک تحول، دربردارنده‌ی مفاهیم پایه‌ای بازگشت‌پذیری، موضعیت و تقارن است. نیازی نیست که این معادله از مرتبه یک روی زمان باشد، بلکه می‌تواند به عنوان مثال معادله موج برای تابع g باشد:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \tag{۲- ۲۰}$$

به عنوان نمونه، خطوط انتقال بدون اتلاف، دارای خودالقایی متوالی و ظرفیت موازی در واحد، را درنظر می‌گیریم. در این صورت، g(x,t)=v(x,t)، اختلاف ولتاژ در هر یاخته واحد است و $c^2 = (\mathrm{LC})^{-1}$، معادله موج زیر را خواهیم داشت:

$$\partial_{tt}^2 v = (LC)^{-1}\partial_{xx}^2 v. \tag{۲- ۲۱}$$

بسته به مقدار اولیه، $f(0) = f_0$، مساله پیش‌رو، یافتن حالت یا مشاهده‌پذیر $f(t)$ در زمان‌های بعدی است. تعمیم معادله تحول به معادلات دیفرانسیل کسری، نتیجه زیر را دربردارد:

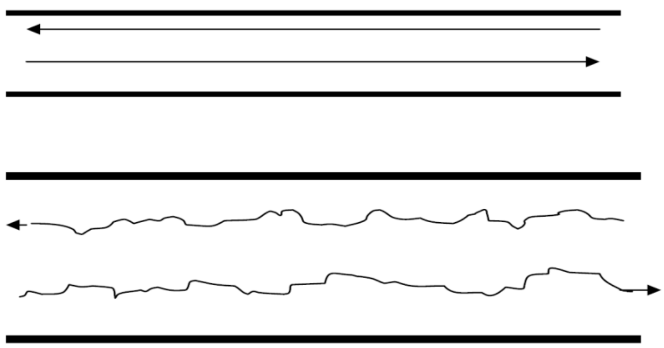
$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}f(t) = Bf(t). \tag{۲- ۲۲}$$

در این‌جا، با توجه به مرتبه کسری یا حتی مختلط مشتقات، سوالات بنیادی در مورد رفتار غیرموضعی، تقارن و پایستگی در ذهن مطرح می‌شود. فرض کنیم که تمام تحولات سیستم فیزیکی برگشت‌ناپذیر باشند. بازگشت‌پذیری یک ایده آل سازی است؛ اعتبار و کاربرد آن بستگی به میزان مجزا بودن سیستم از گذشته و محیط پیرامونش دارد. مرتبه مشتق کسری تاثیر گذشته را تعیین و طبقه‌بندی می‌کند. همان‌طور که در تعریف دیدیم، مشتق کسری بر اساس انتگرال کسری حاصل می‌شود و بدین معناست که عملگری با خصلت ناموضعیت بوده و نیاز به اطلاعات زمان‌های قبل سیستم دارد. برای مرتبه واحد در مشتقات کسری (یا مرتبه صحیح یک) حافظه‌ی سیستم کمترین تاثیر را دارد، به این مفهوم که برای بررسی آن فقط اطلاعات زمان حال مورد نیاز است. مقادیر کوچک α نشان دهنده‌ی تاثیر بالای گذشته یا حافظه‌ی

سیستم است. این امر در تعریف گراند- لتینکوف نیز وارد شده است، هرچقدر مرتبه مشتق‌گیری کوچک‌تر باشد، وزن جملات زمان‌های قبلی بیشتر می‌شود.

۲٫۹ یک آزمایش ذهنی

در این قسمت، با طرح یک آزمایش ذهنی کمی ارتباط میان محاسبات کسری و فرآیندهای فیزیکی ازجمله پخش را تفصیل خواهیم داد. اگر از داخل یک هواپیما به جاده‌های یک شهر نگاه کنیم، حرکت ترافیک خودروها را مشاهده خواهیم کرد، طوری که گویا هر خودرو بر روی یک خط مستقیم حرکت می‌کند. بنابراین به عنوان یک ناظر، منحنی سرعت یک خودرو را به‌سادگی با گرفتن مشتق صحیح از مرتبه یک برای جابجایی به‌دست می‌آوریم که آن را به‌صورت یک خط راست خواهیم یافت. در شکل ۲-۲ دو خط مستقیم موازی، منحنی سرعت خودروهای در حال حرکت در دو مسیر رو به بالا و پایین جاده را نشان می‌دهند، چنان‌که از دید ماکروسکوپیک دیده می‌شود.



شکل ۲-۲: نمای حرکت خودروها در جاده از دید ماکروسکوپیک و میکروسکوپیک

اما از نمایی نزدیک‌تر، حرکت پیوسته‌ی همین خودرو را مشاهده می‌کنیم؛ می‌بینیم که برای عبور از موانع و ناهمواری‌های موجود در جاده، در مسیری نامستقیم (زیگزاگی) حرکت می‌کند. منحنی داخلی در شکل ۲-۲ این مساله را نشان می‌دهد. منحنی سرعت خودروهای متحرک در دو مسیر، دیگر دو خط موازی با یکدیگر نیستند، اما یک مسیر پیوسته مشتق‌ناپذیر را دنبال می‌کنند. در این‌جا، این سوال مطرح می‌شود که ${dx}/{dt}$ تصویر واقعی سرعت خودروها را می‌دهد یا ${d^{1+\alpha}}/{dt^{1+\alpha}}$ با $0 < \alpha < 1$ ، نمایش واقعی حرکت زیگزیگی خودرو است. حال مساله بعد سرعت که در این آزمایش ذهنی به صورت مشتق کسری جابجایی وارد شده است، موضوع سوالی دیگر است. در مفهوم معمولی که از زمان می‌شناسیم، $\frac{dx}{dt}$ نشان دهنده سرعت و $\frac{d^2x}{dt^2}$ بیان‌گر شتاب است، اما درک معنای $\frac{d^{1.23}x}{dt^{1.23}}$ دشوار است. شاید بتوان این مشتق کسری را که بین سرعت و شتاب است، به عنوان سرعت در مقیاس زمانی تبدیل یافته تعبیر کرد. الگوی حرکت

زیگزاگی که در آزمایش ذهنی مطرح شد، منحنی فراکتالی[۱] خوانده می‌شود، یک تابع پیوسته و مشتق‌ناپذیر. رابطه بعد فراکتالی و محاسبات کسری زمینه مطالعات گسترده‌ای در عصر حاضر است. دیدگاه ماکروسکوپیکی که در بالا مطرح شد، استدلالی برای توضیح ناپیوستگی و تکینگی در طبیعت، در محاسبات با مرتبه صحیح می‌دهد. این‌که آیا محاسبات کسری می‌تواند ابزاری برای توصیف ناپیوستگی و تکینگی باشد، سوالی مهم است.

در این فصل، مشتق و انتگرال کسری را به‌صورت اجمالی معرفی کردیم. مشتق کسری از طریق انتگرال کسری تعریف شد. به‌سادگی می‌توان دریافت که کانوولوشن یک تابعی توانی، $\phi_\alpha(t) = t^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$، و تابع f(t)، انتگرال کسری ${}_0D_t^{-\alpha}f(t)$ را نتیجه می‌دهد. فرض کنید در آزمایش ذهنی ما، f(t) سرعت خودروهای متحرک و $\phi_\alpha(t)$ نشان دهنده‌ی جریان بازه‌های زمانی باشد. در حد $\alpha \to 1$ تابع توانی معادل با تابع هوویساید می‌شود:

$$\phi_\alpha(t) = H(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases} \qquad (۲- ۲۳)$$

و این مفهوم را دارا است که با گذشت زمان، بازه‌های زمانی همواره واحد خواهند ماند. این شرایط را می‌توان این‌گونه نیز تعبیر کرد که فاصله‌های زمانی یکنواخت هستند و سرعت آن‌ها صفر است. بنابراین در هر لحظه بازه‌های زمانی بدون تغییر خواهند بود. در این حالت فاصله مکانی را به این صورت به‌دست می‌آوریم:

$${}_0D_t^{-1}f(t) = \int_0^t f(t)dt \qquad (۲- ۲۴)$$

که همان روش معمولی تخمین طول است. این سیستم دارای جریان همگن زمان می‌باشد. با توجه به بحث بالا، می‌توان نتیجه گرفت که وقتی $\alpha < 1$ باشد، کانوولوشن سرعت و یک تابع توانی یا به عبارتی انتگرال کسری سرعت، جابجایی مکانی را می‌دهد. بنابراین در این مورد خاص، بازه‌ی زمانی همواره واحد نیست و دارای سرعت متغیر است، یا جریان زمان یکنواخت نیست. شاید بتوان این‌طور گفت که در سیستم‌های دارای ناهمگنی، گویا حرکت ذرات ناهمگنی در جریان زمان دارد.

---

[۱] Fractal curve