# فصل سوم

# ریاضیات کسری

ریاضیات کسری حوزه‌ای از ریاضیات است که از تعریف‌های متداول برای عملگرهای مشتق و انتگرال حاصل می‌شود، درست همانند تابع توانی که به ازای مقادیر غیر صحیح، از تعریف این تابع برای مقادیر صحیح حاصل می‌شود. جهت واضح شدن مطلب، مفهوم فیزیکی تابع توانی را درنظر بگیرید. طبق آن‌چه در دبیرستان آموخته‌ایم، تابع توانی به ازای یک عدد صحیح، نمادی برای نشان دادن ضرب مکرر یک عدد صحیح در خودش است. این تعبیر در نگاه اول ساده به نظر می‌رسد، اما اگر تابع نمایی را به ازای عددی غیرصحیح در نظر بگیریم، با مشکل مواجه خواهیم شد. درحالی‌که عبارت $x^۳ = x.x.x$ کاملا قابل درک است، چگونه می‌توان معنای فیزیکی $x^{۳/۴}$ یا حتی $x^\pi$ را بیان کرد؛ ضرب ۳/۴ یا $\pi$ مرتبه‌ی یک عدد در خودش قابل درک نیست هر چند که این عبارت به ازای هر $x$ ای مقدار معینی دارد که توسط بسط سری‌ها و حتی ماشین حساب قابل بررسی و تعیین است. حال به همین شیوه، مشتق و انتگرال را بررسی می‌کنیم. هر چند که ماهیت پیچیده‌تر و متفاوتی دارند، اما هنوز می‌توان به‌خوبی معنای آن‌ها را بیان نمود. اگر به شرایط این عملگرها کاملا مسلط باشیم، ایده‌ی تعمیم‌شان دشوار نخواهد بود. با اعمال چند شرط بر روی آن‌ها (مانند پیوستگی تابع)، می‌توان برای $n$ مرتبه انتگرال هم همان تفسیر $n$ مرتبه ضرب را داشت. اما دوباره این پرسش می‌تواند مطرح شود که، اگر $n$ غیر صحیح باشد چه می‌شود. در این مورد هم ممکن است تصور شود که تبیین معنای فیزیکی کاری دشوار است، اما خواهیم دید که عملگرهای مشتق و انتگرال از مرتبه‌ی کسری نیز از دل تعریف عملگرهای متناظر آن‌ها در ریاضیات معمولی به‌دست می‌آیند و در بسیاری از معادله‌ها و مسایل به‌چشم می‌خورند.

شکل ۱.۳ : جوزف لیوویل، ریاضیدان فرانسوی (۱۸۰۹—۱۸۸۲).

## ۱.۳ منشاء محاسبات کسری

مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه غیر صحیح به هیچ وجه مفهومی جدید نیست. علاقه‌مندی به مفاهیم آن تقریبا هم‌زمان با شناخته شدن محاسبات کلاسیک به چشم می‌خورد. به طوری‌که این ایده در یادداشت‌های میان لایبنیتز[۱] و هوپیتال[۲] مطرح می‌شود. در این نامه که در سال ۱۶۹۵ ارسال شده است، هوپیتال از لایبنیتز سوال می‌کند که چه می‌شود اگر در تعریف مشتق مرتبه‌ی $n$ام یک تابع که به صورت،

$$\frac{D^n f(x)}{Dx^n} \tag{۱.۳}$$

بیان می‌شود، $n = \frac{1}{2}$ باشد. لایبنیتز پاسخ می‌دهد که این تناقض آشکاری است که روزی نتایج مفیدی از آن حاصل می‌شود و به محاسباتی در این زمینه پرداخت. و به این ترتیب با این مکاتبه‌ها ریاضیات کسری متولد شد. و هرچند امروزه کاربردهای فراوانی از این ریاضیات را می‌بینیم اما تناقضی مشاهده نمی‌شود. مطالعه‌های کمابیش سیستماتیک بیشتر در ابتدا و نیمه‌ی قرن نوزدهم توسط لیوویل[۳] (۱۸۳۲) [۱۲۹]، اویلر[۴] (۱۷۳۰) [۱۳۰]، فوریه[۵]، لاگرانژ[۶] (۱۷۷۲)، لاکرویکس[۷]

۱ Leibniz

۲ L'Hopital

۳ Liouville

۴ Euler

۵ Fourier

۶ Lagrange

۷ Lacroix

شکل ۲.۳: جرج برنارد ریمان، فیزیکدان و ریاضیدان آلمانی (۱۸۲۶—۱۸۶۶).

(۱۸۱۹)، ریمان[۱] (۱۸۴۷) [۱۳۱] و هولمگرن[۲] (۱۸۶۴) صورت گرفت، حتی در سال‌های اخیر نیز افرادی در این حیطه سهیم بوده‌اند.

لیوویل اولین شخصی بود که توابع را برحسب توابع نمایی بسط داد و مشتق مرتبه $q$ چنین بسطی را با وارد آوردن عملگر بر یکایک جملات تعریف کرد، به‌گونه‌ای که گویا $q$ یک عدد صحیح مثبت است. ریمان تعریف متفاوتی ارائه کرد شامل یک انتگرال معین که قابلیت کاربرد در مورد سری‌های توانی با نمای غیر صحیح را دارا بود. ظاهرا گروانوالد[۳] و کراگ[۴] اولین بار نتایج ریمان و لیوویل را به فرمی یکپارچه تبدیل کردند. گروانوالد که از محدودیت‌های موجود بر رهیافت لیوویل آشفته شده بود، به عنوان نقطه شروع، مشتق را به صورت حد یک تفاضل کسری[۵] تعریف کرد و به فرمول انتگرال معین برای مشتق مرتبه $q$ ام رسید. کراگ با شروع از فرمول انتگرال کوشی برای مشتق مرتبه صحیح، نشان داد که انتگرال معین ریمان باید این‌گونه تفسیر شود که دارای یک حد پایین محدود است؛ در صورتی‌که در تعریف لیوویل هیچ حد پایین محدود مشخصی ظاهر نمی‌شود و این معادل است با این‌که حد پایین منفی بی‌نهایت است.

به موازات این تعاریف تئوری، به‌کارگیری محاسبه‌های کسری در مسائل مختلف نیز آغاز شده بود. اولین این‌ها در ۱۸۲۳ توسط آبل[۶] انجام شد که در آن حل معادله انتگرالی برای تاتوکرون[۷] از طریق یک تبدیل انتگرالی به یک مشتق

[۱] Riemann

[۲] Holmgren

[۳] Grunwald

[۴] Krug

[۵] The limit of a difference quotient

[۶] Abel

[۷] Tautochrone

از مرتبه ۱/۲ ممکن بود. محاسبه‌های عملیاتی هوویساید[۱] (۱۸۹۳،۱۸۹۲و۱۹۲۰) که برای حل مسائلی مشخص در تئوری الکترومغناطیس گسترش یافت، مهم‌ترین گام بعدی در کاربرد مشتق با مرتبه کلی بود؛ وی مشتق‌گیری کسری را در بررسی تئوری خطوط انتقال بکار برد. گمانت[۲] (۱۹۳۶) این مفهوم را در مسائل کشسانی مورد استفاده قرار داد. در قرن اخیر، تلاش‌های عمده‌ای هم در تئوری و هم در کاربرد محاسبات کسری صورت گرفته است. وایل[۳] (۱۹۱۷)، هاردی[۴] (۱۹۱۷)، کوبر[۵] (۱۹۴۰) و کاتنر[۶] (۱۹۵۳) برخی از خواص تا حدی ویژه اما طبیعی انتگرال-مشتق‌های توابع خاص متعلق به کلاس‌های لبسک[۷] و لیفشیتز[۸] را آزمودند.

با وجود این که حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری همانند جبر معمولی قدمتی به اندازه‌ی سه قرن دارد، اما تا چند سال گذشته، در میان جامعه‌ی علمی و مهندسی محبوبیت زیادی نداشته است. زیبایی این بحث در این است که مشتقات (و انتگرالهای) کسری یک خاصیت (یا کمیت) موضعی (یا نقطه‌ای) نیستند؛ از این‌رو می‌توانند ویژگی‌هایی نظیر حافظه و غیرموضعیت را وارد کنند و شاید بتوان گفت که این عملگرها واقعیت طبیعت را بهتر توصیف می کنند و زبان گویاتری برای آن هستند. تاکنون این حیطه بیشتر مورد توجه ریاضیدان‌ها بوده است و تنها در چندین سال اخیر در برخی از حوزه‌های مهندسی، علوم و اقتصاد وارد شده است. با پیشرفت‌هایی که در این حیطه و کاربردهای آن در حال صورت گرفتن است، این امکان وجود دارد که در آینده حوزه‌ی کاملی را شکل دهد که ریاضیات معمولی تنها بخشی از آن باشند.

برای نشان دادن قدرت این علم در توصیف کامل طبیعت به بیان یک نمونه می‌پردازیم. به عنوان مثال، مشتق معمولی نسبت به زمان $\frac{d}{dt}$ نشان دهنده‌ی نرخ اتلاف یا انباشت است؛ یا به عبارتی تفاضل نرخ اتلاف و انباشت در یک فضای بسیار کوچک و محدود. حال اگر در این فضای کوچک سدی وجود داشته باشد که ذرات مورد بررسی را به دام اندازد به گونه‌ای که مدتی در آن‌جا متوقف شوند، یا نواحی ممنوعه‌ای وجود داشته باشد که ورود ذرات به آن ناحیه ممکن نباشد، دیگر مشتق معمولی $\frac{d}{dt}$ مفهوم نرخ اتلاف یا انباشت را نمی‌رساند. در این صورت این مشتق کسری $\frac{d^\alpha}{dt^\alpha}$ با مرتبه‌ی $\alpha \in \mathbb{R}$ است که می‌تواند فرا/ زیر[۹] نرخ انباشت یا اتلاف را نشان دهد.

---

۱ Heaviside

۲ Gemant

۳ Weyl

۴ Hardy

۵ Kober

۶ Kuttner

۷ Lebesgue

۸ Lipschitz

۹ Super/Sub Rate

## ۲.۳ معادلات کسری و غیرموضعیت

بسیاری از مسائل فیزیک و مهندسی، شامل معادلات شرودینگر، ماکسول، نیوتون، شارش گرمای فوریه، حرکت براونی، سیستم‌های بیوفیزیکی و... را می‌توان به‌صورت مسائل شرط اولیه برای معادلات تحول دینامیکی به‌صورت زیر درنظر گرفت:

$$\frac{d}{dt}f(t) = Bf(t) \tag{۲.۳}$$

که $t \in \mathbb{R}$ نشانگر زمان و $B$ عملگر در فضای باناخ است. این معادله کلاسیک تحول، دربردارنده‌ی مفاهیم پایه‌ای بازگشت‌پذیری، موضعیت و تقارن است. نیازی نیست که این معادله از مرتبه یک روی زمان باشد، بلکه می‌تواند به عنوان مثال معادله موج برای تابع $g$ باشد:

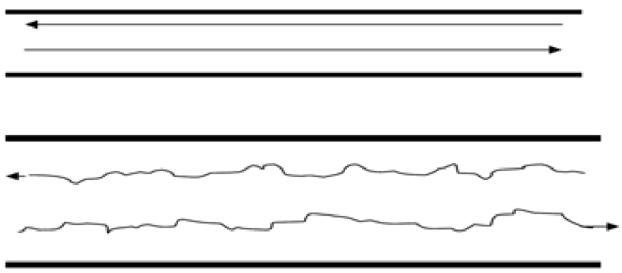
$$\frac{\partial^۲ g}{\partial t^۲} = c^۲ \frac{\partial^۲ g}{\partial x^۲}. \tag{۳.۳}$$

به عنوان نمونه، خطوط انتقال بدون اتلاف، دارای خودالقایی متوالی و ظرفیت موازی در واحد، را درنظر می‌گیریم. در این صورت، $g(x,t) = v(x,t)$، اختلاف ولتاژ در هر یاخته واحد است و $C^۲ = (LC)^{-۱}$، معادله موج زیر را خواهیم داشت:

$$\partial^۲_{tt} v = (LC)^{-۱} \partial^۲_{xx} v. \tag{۴.۳}$$

بسته به مقدار اولیه، $f(\circ) = f_\circ$، مساله پیش‌رو، یافتن حالت یا مشاهده‌پذیر $f(t)$ در زمان‌های بعدی است. تعمیم معادله تحول به معادلات دیفرانسیل کسری، نتیجه زیر را دربردارد:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} f(t) = Bf(t) \tag{۵.۳}$$



شکل ۳.۳: نمای حرکت خودروها در جاده از دید ماکروسکوپیک و میکروسکوپیک.

در این‌جا، با توجه به مرتبه کسری (یا حتی مختلط) مشتقات، سوالات بنیادی در مورد رفتار غیرموضعی، تقارن و پایستگی در ذهن مطرح می‌شود. فرض کنیم که تمام تحولات سیستم فیزیکی برگشت‌ناپذیر باشند. بازگشت‌پذیری یک ایده آل سازی است؛ اعتبار و کاربرد آن بستگی به میزان مجزا بودن سیستم از گذشته و محیط پیرامونش دارد. مرتبه مشتق کسری تاثیر گذشته را تعیین و طبقه‌بندی می‌کند. مشتق کسری بر اساس انتگرال کسری حاصل می‌شود و بدین معناست که عملگری با خصلت ناموضعیت بوده و نیاز به اطلاعات زمان‌های قبل سیستم دارد. برای مرتبه واحد در مشتقات کسری (یا مرتبه صحیح یک) حافظه‌ی سیستم کمترین تاثیر را دارد، به این مفهوم که برای بررسی آن فقط اطلاعات زمان حال مورد نیاز است. مقادیر کوچک $\alpha$ نشان دهنده‌ی تاثیر بالای گذشته یا حافظه‌ی سیستم است. خواهیم دی که این امر در تعریف گروانوالد- لتینکوف نیز وارد شده است، هرچقدر مرتبه مشتق‌گیری کوچک‌تر باشد، وزن جملات زمان‌های قبلی بیشتر می‌شود.

**یک آزمایش ذهنی** در این قسمت، با طرح یک آزمایش ذهنی کمی ارتباط میان محاسبات کسری و فرآیندهای فیزیکی ازجمله پخش را تفصیل خواهیم داد. اگر از داخل یک هواپیما به جاده‌های یک شهر نگاه کنیم، حرکت ترافیک خودروها را مشاهده خواهیم کرد، طوری که گویا هر خودرو بر روی یک خط مستقیم حرکت می‌کند. بنابراین به عنوان یک ناظر، منحنی سرعت یک خودرو را به‌سادگی با گرفتن مشتق صحیح از مرتبه یک برای جابجایی به‌دست می‌آوریم که آن را به‌صورت یک خط راست خواهیم یافت. در شکل (۳.۳) دو خط مستقیم موازی، منحنی سرعت خودروهای در حال حرکت در دو مسیر رو به بالا و پایین جاده را نشان می‌دهند، چنان‌که در مقیاس ماکروسکوپیک دیده می‌شود.

اما از نمایی نزدیک‌تر، حرکت پیوسته‌ی همین خودرو را مشاهده می‌کنیم؛ می‌بینیم که برای عبور از موانع و ناهمواری‌های موجود در جاده، در مسیری نامستقیم (زیگزاگی) حرکت می‌کند. منحنی داخلی در تصویر (۳.۳) این مساله را نشان می‌دهد. منحنی سرعت خودروهای متحرک در دو مسیر، دیگر دو خط موازی با یکدیگر نیستند، اما یک مسیر پیوسته مشتق‌ناپذیر را دنبال می‌کنند. در این‌جا، این سوال مطرح می‌شود که $\frac{dx}{dt}$ تصویر واقعی سرعت خودروها را می‌دهد یا $\frac{d^{1+\alpha}}{dt^{1+\alpha}}$ با $0 < \alpha < 1$، نمایش واقعی حرکت زیگزیگی خودرو است. حال مساله بعد سرعت که در این آزمایش ذهنی به صورت

مشتق کسری جابجایی وارد شده است، موضوع سوالی دیگر است. در مفهوم معمولی که از زمان می‌شناسیم، $\frac{dx}{dt}$ نشان دهنده سرعت و $\frac{d^۲x}{dt^۲}$ بیان‌گر شتاب است، اما درک معنای $\frac{d^{۱/۲۳}x}{dt^{۱/۲۳}}$ دشوار است. شاید بتوان این مشتق کسری را که بین سرعت و شتاب است، به عنوان سرعت در مقیاس زمانی تبدیل یافته تعبیر کرد. الگوی حرکت زیگزاگی که در آزمایش ذهنی مطرح شد، منحنی فراکتالی خوانده می‌شود، یک تابع پیوسته و مشتق‌ناپذیر. رابطه بعد فراکتالی و محاسبات کسری زمینه مطالعات گسترده‌ای در عصر حاضر است. دیدگاه ماکروسکوپیکی که در بالا مطرح شد، استدلالی برای توضیح ناپیوستگی و تکینگی در طبیعت، در محاسبات با مرتبه صحیح می‌دهد. این‌که آیا محاسبات کسری می‌تواند ابزاری برای توصیف ناپیوستگی و تکینگی باشد، سوالی مهم است. در این فصل، مشتق و انتگرال کسری را به‌صورت اجمالی معرفی خواهیم نمود. مشتق کسری از طریق انتگرال کسری تعریف می‌شود که انتگرال کسری $_{\circ}J_t^{\alpha}f(t)$، خود کانوولوشن یک تابع توانی، $\phi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-۱}}{\Gamma(\alpha)}$، و تابع $f(t)$ است. فرض کنید در آزمایش ذهنی ما، $f(t)$ سرعت خودروهای متحرک و $\phi_\alpha(t)$ نشان دهنده‌ی جریان بازه‌های زمانی باشد. در حد $\alpha \longrightarrow ۱$ تابع توانی معادل با تابع هوویساید می‌شود:

$$\phi_\alpha(t) = H(t) = \begin{cases} ۱, & t > \circ \\ \circ, & t < \circ. \end{cases} \tag{۶.۳}$$

و این مفهوم را دارا است که با گذشت زمان، بازه‌های زمانی همواره واحد خواهند ماند. این شرایط را می‌توان این‌گونه نیز تعبیر کرد که فاصله‌های زمانی یکنواخت هستند و سرعت آن‌ها صفر است. بنابراین در هر لحظه بازه‌های زمانی بدون تغییر خواهند بود. در این حالت فاصله مکانی را به این صورت به‌دست می‌آوریم:

$$_{\circ}D_t^{-۱} f(t) = \int_{\circ}^{t} f(t). \tag{۷.۳}$$

که همان روش معمولی تخمین طول است. این سیستم دارای جریان همگن زمان می‌باشد. با توجه به بحث بالا، می‌توان نتیجه گرفت که وقتی $\alpha < ۱$ باشد، کانوولوشن سرعت و یک تابع توانی یا به عبارتی انتگرال کسری سرعت، جابجایی مکانی را می‌دهد. بنابراین در این مورد خاص، بازه‌ی زمانی همواره واحد نیست و دارای سرعت متغیر است، یا جریان زمان یکنواخت نیست. شاید بتوان این‌طور گفت که در سیستم‌های دارای ناهمگنی، گویا حرکت ذرات ناهمگنی در جریان زمان دارد.

## ۳.۳ توابع خاص

درک مفاهیم و به‌کارگیری محاسبات کسری، با معرفی و بررسی برخی از تعاریف و تابع‌های ریاضی بسیار مهم اما ساده‌ی حاضر در این حوزه از ریاضیات ، مشخص‌تر می‌شود. از این جمله عبارتند از تابع گاما، تابع بتا، تبدیل لاپلاس، تابع میتاگ- لفلر و ... ، که در ادامه معرفی مختصری از این مفاهیم فراهم شده است. همچنین، انواع مشتق و انتگرالهایی کسری معرفی شده و به بررسی معادلات انتگرال- دیفرانسیل با مرتبه کسری پرداخته می‌شوند.

### ۱.۳.۳ تابع گاما

همان‌گونه که در ادامه آشکار خواهد شد، تابع گاما[۱]، اساسا با ریاضیات کسری گره خورده است. تعبیر ساده‌ی این تابع، تعمیم تابع فاکتوریل[۲] برای همه‌ی مقادیر حقیقی است. تعریف این تابع توسط رابطه‌ی زیر داده می‌شود:

$$\Gamma(z) = \int_{۰}^{\infty} e^{-u} u^{z-۱} du, \qquad z \in \mathbb{R} \tag{۸.۳}$$

زیبایی این تابع در ویژگی‌های آن نهفته است. نخست، چنان‌که در رابطه‌ی (۹.۳) دیده می‌شود مقدار تابع برای هر کمیتی، برابر است با حاصل‌ضرب خود کمیت در مقدار تابع به ازای یک واحد کمتر از عدد مورد نظر:

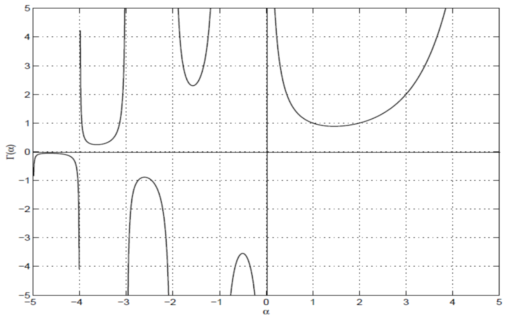
$$\Gamma(z+۱) = z\Gamma(z), \qquad z \in \mathbb{N}_{+}, \quad \Gamma(z+۱) = (z)! \tag{۹.۳}$$

این رابطه با استفاده از انتگرال جزء به جزء اثبات می‌شود. نتیجه‌ی این تعریف برای عددهای صحیح، تعریف تابع فاکتوریل است. همچنین با محاسبه‌ی انتگرال فوق می‌توان نشان داد $\Gamma(۱) = ۱$. مشکل (۴.۳) تابع گاما را برای صفر و پیرامون آن نشان می‌دهد. توجه کنید که در عددهای صحیح منفی مقدار تابع به بی‌نهایت میل می‌کند اما هنوز در مقادیر غیرصحیح منفی تعریف می‌شود. همچنین با استفاده از تابع گاما می‌توان تابع $\phi(t)$ را نیز تعریف کرد، که در بخش‌های بعدی خواهیم دید که در نشان دادن شکل‌های مختلف انتگرال کسری کاربرد فراونی دارد. $\phi(t)$ با رابطه‌ی (۳۰.۳) تعریف می‌شود.

$$\phi_{\alpha}(t) = \frac{t_{+}^{\alpha-۱}}{\Gamma(\alpha)} \qquad . \tag{۱۰.۳}$$

۱ Gamma function

۲ Factorial function




شکل ۴.۳: تابع گاما

نیز با کمک این تابع، برای تعمیم ضرائب دوجمله‌ای[1] خواهیم داشت،

$$\begin{pmatrix} z \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{z!}{\nu!(z-\nu)!} = \frac{\Gamma(۱+z)}{\Gamma(۱+\nu)\Gamma(۱+z+\nu)}. \qquad (۱۱.۳)$$

### ۲.۳.۳ تابع بتا

تابع بتا[2] یا به عبارتی دیگر انتگرال اویلر نوع اول، در محاسبه‌های کسری از اهمیت بالایی برخوردار است. جواب این تابع نه تنها از طریق تابع گامای چندگانه تعریف می‌شود، که شبیه به انتگرال/مشتق بسیاری از توابع از جمله چند جمله‌ای‌هایی به صورت $t^a$ و توابع میتاگ- لفلر (در ادامه معرفی خواهد شد) است. معادله‌ی (۱۲.۳) انتگرال بتا و جواب آن را بر اساس تابع گاما نشان می‌دهد.

$$B(p,q) = \int_{۰}^{۱} (۱-u)^{(}p-۱)u^{q-۱}du = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q,p); \qquad p,q \in \mathbb{R}_{+}. \qquad (۱۲.۳)$$

[1] Binomial Coefficients

[2] Beta function

### ۳.۳.۳ تبدیل لاپلاس و کانوولوشن

تبدیل لاپلاس[۱] نوعی تبدیل تابعی است که در یافتن جواب معادله‌های دیفرانسیل پیچیده کاربرد دارد [۱۱۰، ۱۱۱]. با استفاده از این تبدیل می‌توان به‌جای حل کردن یک معادله دیفرانسیل با مشتق‌هایی از مرتبه‌های مختلف، مساله را به فضایی برد که جواب‌ها خود به صورت جبری در آن وجود دارند. این تبدیل بدین شکل بیان می‌شود:

$$\mathcal{L}[f(t)] := \int_{\circ}^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \tilde{f}(s). \qquad (۱۳.۳)$$

در صورتی تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ وجود دارد که انتگرال (۱۳.۳) همگرا باشد. لازمه‌ی ارضای این شرط این است که نرخ رشد تابع $f(t)$ سریع‌تر از نرخ نزول تابع نمایی $e^{-st}$ نباشد.

همچنین تبدیل لاپلاس کانوولوشن دو تابع نیز عبارتی است با کاربردهای فراوان. کانوولوشن دو تابع با استفاده از رابطه‌ی،

$$f(t) * g(t) := \int_{\circ}^{t} f(t-\tau) g(\tau) d\tau = g(t) * f(t) \qquad (۱۴.۳)$$

به‌دست می‌آید و در فضای $t$ تعیین آن کار پیچیده‌ای است، اما در فضای لاپلاس($s$) نتیجه تنها حاصل‌ضرب تبدیل لاپلاس دو تابع می‌شود، چنان‌که در رابطه‌ی (۱۵.۳) دیده می‌شود.

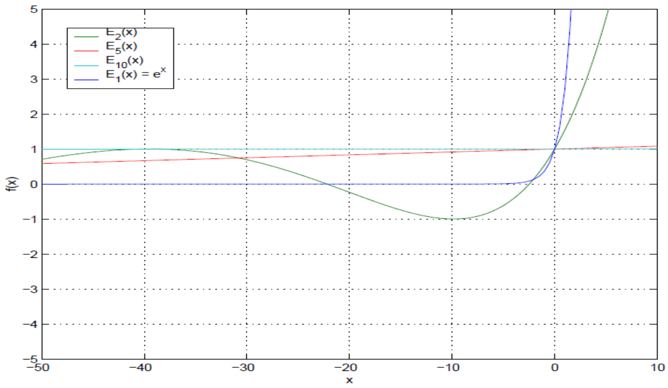
$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] := \tilde{f}(s)\tilde{g}(s). \qquad (۱۵.۳)$$

یک ویژگی مهم دیگر تبدیل لاپلاس که باید به آن اشاره داشت، تبدیل لاپلاس مشتق با مرتبه‌ی صحیح $n$ برای تابع $f(t)$ است که در (۱۶.۳)داده شده است.

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n \acute{f(s)} - \sum_{k=\circ}^{n-۱} s^{n-k-۱} f^k(\circ) = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=\circ}^{n-۱} s^k f^{n-k-۱}(\circ). \qquad (۱۶.۳)$$

---

۱ Laplace Transformation




شکل ۵.۳: تابع میتاگ- لفلر تک متغیره، به ازای مقادیر مختلف $\alpha$.

### ۴.۳.۳ تابع میتاگ- لفلر

تابع میتاگ- لفلر[۱] تابعی است که به صورت گسترده‌ای در ریاضیات کسری مورد استفاده قرار می‌گیرد. ویژگی‌های ساختاری این تابع اولین بار در ۱۹۰۳ توسط میتاگ- لفلر معرفی شد [۱۳۲]، از این رو با نام وی شناخته می‌شود. همان‌طور که تابع نمایی در جواب‌های معادله‌ی دیفرانسیل با مرتبه‌ی صحیح ظاهر می‌شود، این تابع هم نقش مشابهی را در معادله‌های دیفرانسیل با مرتبه‌ی غیرصحیح ایفا می‌کند. تابع نمایی نیز یک فرم بسیار خاص (یکی از مجموعه‌های نامحدود) این تابع پرکاربرد است. شکل استاندارد تابع توسط رابطه‌ی (۱۷.۳) داده می‌شود.

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \qquad \alpha > 0. \tag{۱۷.۳}$$

تابع نمایی معادل است با حالت $\alpha = 1$. شکل (۵.۳) تابع میتاگ- لفلر را برای مقدارهای مختلف $\alpha$ نشان می‌دهد. بسیاری از توابع معروف و شناخته شده حالت خاصی از این تابع هستند، به عنوان نمونه،

$$E_2(-z^2) = cos(z), \qquad E_{1/2}(z^{\frac{1}{2}}) = e^z\left(1 + erf(z^{\frac{1}{2}})\right). \tag{۱۸.۳}$$

رابطه دوم با بکارگیری تابع خطا[۲]،

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt. \tag{۱۹.۳}$$

[۱] The Mittag- Leffler Function

[۲] Error Function

بیان شده است. همچنین صورت کلی‌تر تابع میتاگ- لفلر با دو متغیر نیز به این شکل تعریف می‌شود [۱۳۳] :

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \qquad \alpha>0,\beta>0. \tag{۲۰.۳}$$

این شکل تابع نیز تعمیم پرکاربردی از تابع نمایی است که توابع ساده‌ی زیادی، حالت خاص آن هستند. از جمله می‌توان به موارد،

$$E_{1,2}(z)=\frac{e^z-1}{z}, \qquad E_{2,2}(z^2)=\frac{sinh(z)}{z}, \tag{۲۱.۳}$$

اشاره نمود.

### ۵.۳.۳ توابع فوق هندسی

توابع فوق هندسی[1] که تعریف بسیاری از توابع را به عنوان حالت خاص دربردارند به صورت،

$${}_pF_q\left(a_i;b_i;z\right)=\frac{\Pi_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}{\Pi_{i=1}^{p}\Gamma(a_i)}\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a_i+n)}{\Gamma(b_j+n)}\frac{z^n}{n!}, \tag{۲۲.۳}$$

است. مشتق این تابع از رابطه زیر پیروی می‌کند،

$$(\frac{d}{dz})_pF_q\left(a_i;b_i;z\right)=\frac{\Pi_{i=1}^{p}\Gamma(a_i)}{\Pi_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}\quad {}_pF_q\left(a_i+1;b_i+1;z\right). \tag{۲۳.۳}$$

سری‌های فوق هندسی[2] ... $_1F_1(a;b;z)$ معروف به توابع کومر[3] [۱۱۵،۹۴]، صورت خاصی از این توابع هستند.

---

۱ Hypergeometric Functions

۲ Confluent Hypergeometric Series

۳ Kummer function

## ۴.۳ تعریف و استخراج عملگرهای کسری

تاریخچه‌ی ریاضیات کسری روال گام به گامی را در معرفی عملگرهای مشتق و انتگرال کسری نشان می‌دهد. به این ترتیب در طی زمان، عملگرهای مختلفی وارد شده‌اند که دارای ویژگی‌ها و کاربردهای منحصر به خود هستند. در این بخش، به معرفی برخی از مهم‌ترین این عملگرها می‌پردازیم؛ از جمله آن‌ها، انتگرال ریمان- لیوویل به عنوان اصلی‌ترین شکل تعریف انتگرال کسری و مشتق‌های ریمان- لیوویل، کاپوتو و گروانوالد- لتنیکوف هستند.

### ۱.۴.۳ عملگر انتگرال کسری

در مقدمه عنوان شد که مفهوم عملگرهای مشتق و انتگرال کسری[۱]، تعمیمی بر مشتق و انتگرال مرتبه‌ی صحیح است، درست به همان طریقی که تابع نمایی کسری تعمیم تابع نمایی با آرگومان صحیح است. برای مورد دوم، این تعمیم با استفاده از نمایش تابع انجام می‌گیرد. در حالی‌که ضرب یک عدد به تعداد ناصحیحی در خودش مفهوم ندارد، هیچ مانعی بر سر قرار دادن آرگومان غیرصحیح در تابع وجود ندارد. به همین ترتیب، صورت رایج نمایش انتگرال کسری را می‌توان از شکل عمومی انتگرال‌های مکرر یک تابع به‌دست آورد. این رهیافت با نام رهیافت ریمان- لیوویل[۲] شناخته شده است. رابطه‌ی (۲۴.۳) نشان دهنده‌ی فرمول منسوب به کوشی [۳] برای به دست آوردن انتگرال مرتبه‌ی $n$ تابع $f(t)$ است.

$$\int \dots \int_{0}^{t} f(\tau)d\tau = \frac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau. \tag{۲۴.۳}$$

جهت مختصرنویسی، عملگر $J^n$ را به صورتی که در (۲۵.۳) آمده، معرفی می‌کنیم.

$$J^n f(t) := f_n(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau, \tag{۲۵.۳}$$

اما معمولا رایج است که از نمادگذاری $D^{-n}$ به‌جای $J^n$ استفاده شود. $n$ در رابطه‌ی (۲۴.۳) حتما باید مقداری صحیح داشته باشد و این به سبب وجود تابع فاکتوریل است که برای مقدارهای غیرصحیح تعریف نمی‌شود. اما تابع گاما که بسط تحلیلی فاکتوریل برای همه عددهای حقیقی است، می‌تواند با توجه به رابطه‌ی (۹.۳) به‌جای فاکتوریل در تعریف انتگرال

[۱] Fractional Integral and Derivative Operator

[۲] Riemann Liouville

[۳] Cauchy

قرار گیرد. بنابراین، با این جایگزینی می‌توان رابطه‌ی (۲۵.۳) را برای همه‌ی عددهای حقیقی به‌صورت (۲۶.۳) بنویسیم.

$$J^\alpha f(t) := f_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \qquad (26.3)$$

### ویژگی‌ها

این تعریف انتگرال کسری ویژگی‌هایی دارد که در هنگام حل معادله‌هایی با مشتق‌ها و انتگرال‌های کسری اهمیت آن‌ها بارز خواهد بود. ابتدا انتگرال مرتبه‌ی $\alpha = 0$ را به عنوان عملگر همانی در نظر می‌گیریم،

$$J^0 f(t) = f(t). \qquad (27.3)$$

همچنین با توجه به ماهیت انتگرال بر اساس تعریف آن، و اصل‌هایی که این تعریف از آن‌ها به‌دست آمده، و به همان صورتی که رابطه‌ی[1] برای اعداد صحیح،

$$J^n J^m = J^{m+n} = J^m J^n, \qquad m, n \in \mathbb{N} \qquad (28.3)$$

برقرار است، برای مرتبه‌های غیرصحیح نیز ارضا می‌شود،

$$J^\alpha J^\beta = J^{\beta+\alpha} = J^\beta J^\alpha, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \qquad (29.3)$$

شرطی که باید برای برقراری درستی این ویژگی و سایر ویژگی‌های مشابه آن ارضا شود، علّی[2] بودن تابع $f(t)$ است، به عبارتی دیگر مقدار تابع $f(t)$ باید برای $t \leq 0$ صفر باشد.

[1] Semigroup Property

[2] causality

ویژگی دیگر انتگرال ریمان- لیوویل با معرفی تابع $\phi_\alpha$ در (۳۰.۳) مشخص می‌شود،

$$\phi_\alpha = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Rightarrow \phi_\alpha(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)_+^{\alpha-1} f(\tau) \qquad (۳۰.۳)$$

که $t_+$ نشان دهنده‌ی صفر بودن تابع برای مقدارهای $t \leq 0$ است و (۳۰.۳) یک تابع علّی است. از تعریف کانولووشن در رابطه‌ی (۱۴.۳) می‌توان به نتیجه زیر رسید،

$$J^\alpha f(t) = \phi_\alpha(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \qquad (۳۱.۳)$$

در این‌جا تبدیل لاپلاس انتگرال کسری ریمان- لیوویل را به‌دست خواهیم آورد. در رابطه‌ی (۳۰.۳) نشان دادیم که می‌توان انتگرال کسری را به‌صورت کانولووشن دو تابع، $\phi_\alpha$ و $f(t)$ بیان کرد. تبدیل لاپلاس $t^{\alpha-1}$ به این صورت می‌باشد:

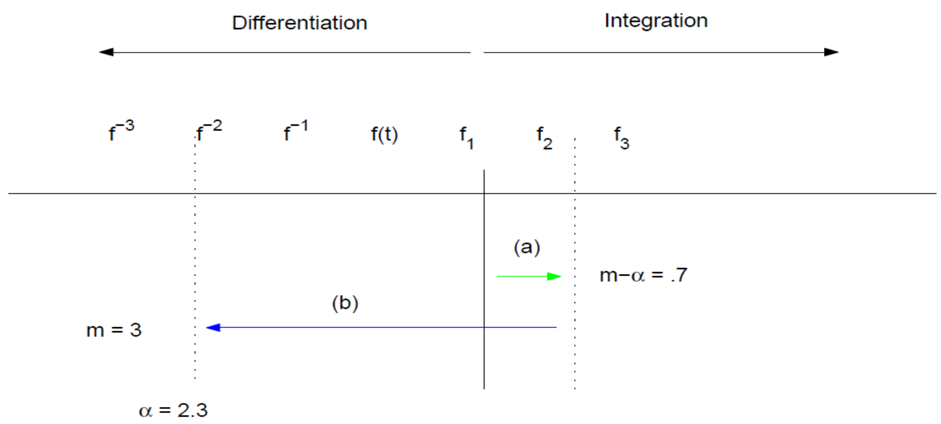
$$\mathcal{L}[t^{\alpha-1}] = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \qquad (۳۲.۳)$$

با توجه به رابطه‌ی انتگرال کسری و کانولووشن که در (۳۰.۳) دیده می‌شود، و نیز تبدیل لاپلاس کانولووشن در (۱۴.۳)، تبدیل لاپلاس انتگرال کسری به‌دست خواهد آمد،

$$\mathcal{L}[J^\alpha] = s^{-\alpha} \tilde{f}(s). \qquad (۳۳.۳)$$

**مثالی برای انتگرال کسری** به عنوان نمونه‌ای از انتگرال کسری، انتگرال $J^\nu x^\mu$ را برای $\nu > 0$، $\mu > -1$ محاسبه می‌کنیم. با توجه به تعریف:

$$\begin{aligned}
J^\nu x^\mu &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^\mu dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\nu-1} x^{\nu-1} t^\mu dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-u)^{\nu-1} x^{\nu-1} (xu)^\mu x du, (u = \frac{t}{x}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu+\mu} \int_0^1 (1-u)^{\nu-1} u^\mu du
\end{aligned}$$




شکل ۶.۳: نمایی شماتیک از مشتق مرتبه $\alpha = ۲/۳$ با به‌کارگیری روش ریمان- لیوویل. در مرحله اول، انتگرالی از مرتبه $\nu = ۳ - ۲/۳ = ۰/۷$ انجام می‌شود، سپس مشتق صحیحی از مرتبه ۳ محاسبه می‌شود.

$$= \frac{۱}{\Gamma(\nu)} x^{\nu+\mu} B(\mu+۱, \nu)$$
$$= \frac{\Gamma(\mu+۱)}{\Gamma(\mu+\nu+۱)} x^{\nu+\mu}. \qquad (۳۴.۳)$$

مشاهده می‌شود که انتگرال کسری تابع توانی، یک تابع توانی است.

### ۲.۴.۳ مشتق‌های کسری

#### عملگرهای مشتق ریمان-لیوویل و کاپوتو

مشتقی از مرتبه‌ی $\alpha = \frac{۱}{۲}$، $\alpha \in \mathbb{R}$ را درنظر بگیرید. حال عدد صحیح $m$ را با شرط $m - ۱ < \alpha < m$ انتخاب می‌کنیم. با استفاده از این عددها، دو راه برای تعریف مشتق‌گیری وجود دارد. روند انجام مشتق‌گیری در روش اول که ریمان-لیوویل[۱] نام دارد در شکل (۶.۳) نشان داده شده است.

$$D^\alpha f(x) = D^m[J^\nu f(x)], \qquad m = [\alpha] + ۱. \qquad (۳۵.۳)$$

توضیح این روند بسیار ساده است. اولین مرحله بعد از پیدا کردن عدد صحیح مناسب، $m$، این است که انتگرال مرتبه‌ی $m - \alpha = \nu = ۰/۷$ ی تابع را به‌دست آوریم؛ در این شکل $\alpha = ۲/۳$ است. سپس در مرحله‌ی دوم، مشتق مرتبه‌ی $m = ۳$

[۱] Riemann-Louiville Fractional Differentiation

تابع حاصل را محاسبه می‌نماییم. به این ترتیب به مشتق مرتبه‌ی $\alpha$ی تابع مورد نظر رسیدیم. نمایش ریاضی این روش در رابطه‌ی زیر بیان شده است:

$$D^{\alpha}f(t) := \begin{cases} \dfrac{d^m}{dt^m}\left[\dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t \dfrac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}d\tau\right], & m-1<\alpha<m, \\ \dfrac{d^m}{dt^m}f(t), & \alpha=m. \end{cases} \tag{۳۶.۳}$$

**مثالی برای انجام مشتق کسری ریمان- لیوویل** فرض کنید که می‌خواهیم مشتق کسری از مرتبه $0 < \alpha < 1$ تابع $f(x) = x^{\mu}$ را محاسبه کنیم. در این صورت $m = 1$ خواهد بود. بنابراین،

$$\begin{aligned} D^{\alpha}f(x) &= D^{(1)}\left[J^{(1-\alpha)}f(x)\right] \\ &= D^{(1)}\left[J^{(1-\alpha)}x^{\mu}\right] \\ &= D^{(1)}\left[\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma((\mu-\alpha+1)+1)}x^{\mu-\alpha+1}\right] \\ &= (\mu-\alpha+1)\frac{\Gamma(\mu+1)}{(\mu-\alpha+1)\Gamma(\mu-\alpha+1)}x^{\mu-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)}x^{\mu-\alpha}. \end{aligned} \tag{۳۷.۳}$$

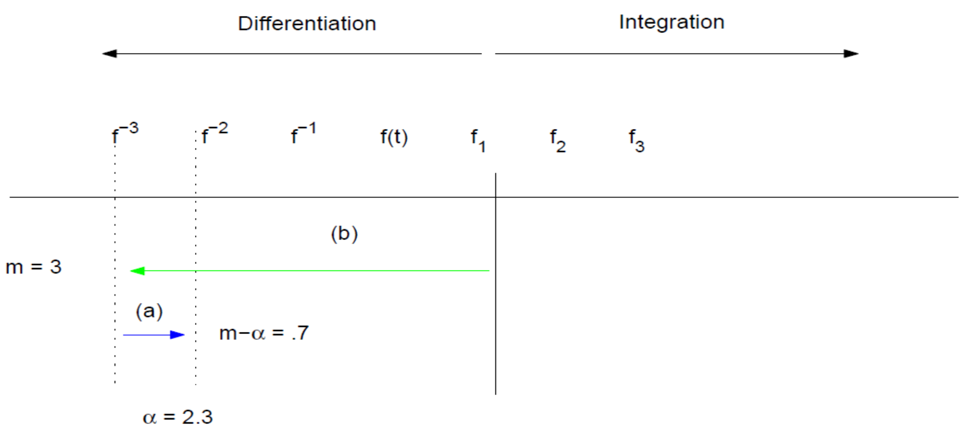
در رسیدن از خط دوم به سوم از نتیجه (۳۴.۳) استفاده شده است. می‌بینیم که طبق تعریف بالا برخلاف انتظار، مشتق عدد ثابت ($\mu = 0$)، صفر نیست، بلکه تابعی توانی است. این یکی از ویژگی‌های مهم عملگرهای کسری است. محدودیتی که بر تعریف ریمان- لیوویل وارد است، تکینگی آن در سر بازه‌ها است.

روش دوم که کاپوتو[1] نام دارد نیز به‌صورت شماتیکی در تصویر (۷.۳) دیده می‌شود. روش کاپوتو نیز از همان دو مرحله‌ی مورد استفاده در روش ریمان- لیوویل برای رسیدن به همان نتیجه بهره می‌گیرید، با این تفاوت که ترتیب آن‌ها را وارونه می‌کند.

$${}^{c}D^{\alpha}f(x) = J^{m-\nu}[D^m f(x)], \qquad m = [\alpha]+1. \tag{۳۸.۳}$$

$c$ نشان دهنده عملگر کاپوتو است. در واقع، ابتدا مشتقی از مرتبه‌ی صحیح $m$، سپس انتگرال‌گیری کسری از مرتبه‌ی

[1] Fractional Differentiation Caputo




شکل ۷.۳: نمایی شماتیک از مشتق مرتبه $\alpha = 2.3$ با به‌کارگیری روش کاپوتو. در مرحله اول، مشتق صحیحی از مرتبه ۳ محاسبه، سپس انتگرالی از مرتبه $3 - 2.3 = 0.7$ انجام می‌شود.

$m - \alpha$ را انجام می‌دهد. طبق این تعریف خواهیم داشت:

$$ {}^{c}D^{\alpha} f(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \left[ \int_0^t \dfrac{f^m(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \right], & m-1 < \alpha < m, \\ \dfrac{d^m}{dt^m} f(t), & \alpha = m. \end{cases} \qquad (۳۹.۳) $$

کاپوتو در تعریف خود برای عملگر مشتق کسری، شرط صفر بودن مشتق عدد ثابت را وارد کرد،

$$ {}_b^cD_t^{\alpha} x^0 = 0, \qquad (۴۰.۳) $$

که نسبت به حالت همانند برای مشتق ریمان- لیوویل بیشتر قابل درک است. به‌سادگی می‌توان نشان داد که تعریف کاپوتو همان تعریف ریمان- لیوویل است که تکینگی سر بازه‌ی آن حذف شده است.

$$ {}_b^cD_t^{\alpha} f(t) = {}_b D_t^{\alpha} \left[ f(t) - \Sigma_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (t-b)^k \right]. \qquad (۴۱.۳) $$

در این‌جا شاخص‌های $t$ و $b$، به ترتیب ابتدا و انتهای بازه‌ی مورد نظر در مشتق‌گیری را نشان می‌دهند. با این نوع مشتق که نقطه شروع بازه مشخص است و انتهای بازه متغیر، مشتق چپ گفته می‌شود. بالعکس اگر نقطه شروع متغیر و انتهای بازه مشخص باشد، مشتق راست نام دارد.

### ویژگی‌ها

ابتدا تبدیل لاپلاس این دو عملگر را معرفی می‌کنیم. در بخش ویژگی‌های عملگر انتگرال کسری، تبدیل لاپلاس این عملگر بیان شد (۳۳.۳). با استفاده از این تعریف، تبدیل لاپلاس عملگر مشتق کسری ریمان-لیوویل به‌دست خواهد آمد. این عملگر را می‌توان به این صورت نوشت،

$$D^{\alpha} f(t) = g^{(m)}(t), \qquad , \qquad g(t) = J^{(m-\alpha)} f(t), \qquad m-1 \leq \alpha < m. \tag{۴۲.۳}$$

با استفاده از تعریف (۱۶.۳) و نیز رابطه‌ی تبدیل لاپلاس انتگرال کسری (۳۳.۳)، خواهیم داشت،

$$\mathcal{L}[D^{\alpha} f(t)] = s^m \tilde{g}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k g^{(m-k-1)}(0) = s^{\alpha} \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^k D^{(\alpha-k-1)} f(0). \tag{۴۳.۳}$$

مشاهده می‌شود که شرط اولیه لازم برای همه‌ی $k$ تا $n-1$ جمله، وجود مشتق کسری تابع $f(t)$ است. برای عملگر مشتق کسری کاپوتو، با نوشتن مشتق به این صوررت شروع می‌کنیم،

$$^{c}D^{\alpha} f(t) = J^{m-\alpha} g(t), \qquad g(t) = f^{(m)}(t), \qquad m-1 \leq \alpha < m. \tag{۴۴.۳}$$

حال با استفاده از (۳۳.۳)، برای تبدیل لاپلاس خواهیم داشت،

$$\mathcal{L}[^{c}D^{\alpha} f(t)] = s^{-(m-\alpha)} \tilde{g}(s) = s^{\alpha} = s^{\alpha} \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{m-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0). \tag{۴۵.۳}$$

در این رابطه، مرتبه‌ی $\alpha$ در مشتق تابع $f(t)$ ظاهر نمی‌شود، بلکه در عبارت ضریب آن یعنی در $s^{\alpha-k-1}$ وارد می‌شود؛ بر خلاف جایگاه آن در تعریف ریمان- لیوویل. بنابراین، مشتق‌هایی با مرتبه‌ی صحیح (برای نمونه $f(t)$،$f^{(1)}$،$f^{(2)}$، ...) به‌عنوان شرایط اولیه به‌کار می‌روند که تعبیر و تفسیر فیزیکی مناسب‌تر و راحت‌تری دارند.

در برخی شرایط، تعریف کاپوتو برای مشتق کسری بسیار محدود کننده‌تر از تعریف ریمان-لیوویل است. قبلا اشاره شد که تابع $f(t)$ باید تابعی علّی باشد، یعنی در $t \leq 0$ مقدار صفر داشته باشد. برای تعریف ریمان-لیوویل، مادامی که تابع اولیه‌ی $t$ این شرط را ارضا کند، به عنوان یک ضرورت برای تمام عددهای صحیح دیگر از مرتبه‌ی $\alpha > 0$ نیز برقرار می‌باشد و از این رو مشکلی پیش نخواهد آمد. اما در تعریف کاپوتو، از آن‌جا که از تابع $f(t)$، $m$ بار مشتق گرفته می‌شود، نه تنها باید $f(0) = 0$ را داشته باشیم، که باید شرط $f^{(1)} = f^{(2)}, ..., f^{(m)} = 0$ نیز ارضا شود. در دنیای ریاضیات این شرط محدود

کننده‌ی وارد بر تعریف کاپوتو آن را ضعیف می‌کند، و این سوال را مطرح می‌کند که چنین تعریفی چه ضرورتی دارد. پاسخ این سوال به هنگام حل معادلات دیفرانسیل از مرتبه‌ی غیرصحیح آشکار می‌شود. از نظر ریاضی، می‌توان با داشتن شرایط اولیه با استفاده از تعریف ریمان-لیوویل جواب این معادلات را به‌دست آورد. اما شرایط اولیه در این حالت، مشتقی با مرتبه‌ی کسری است. همچنین، همانطور که قبلا در (۳۷.۳) نشان داده شد، مشتق کسری یک ثابت در این تعریف صفر نیست و از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید،

$$D^{\alpha}C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(۱-\alpha)}. \qquad (۴۶.۳)$$

اما از نظر فیزیکی، ویژگی‌های تعریف ریمان-لیوویل مشکلات اساسی ایجاد می‌کند. درحالی‌که با تفسیرهای دنیای فیزیک در معادلات مرتبه‌ی صحیح آشنا هستیم، درک عملی زیادی از دنیا در معادلات کسری نداریم. در واقع ابزار ریاضی ما فراتر از مرزهای درک ما قدم گذاشته‌اند. اما در تعریف کاپوتو، ما می‌توانیم ارتباطی میان آنچه که امکان دارد و آنچه که عملی است، بیابیم. عملگر مشتق کاپوتو با یک جابجایی که در تعریف خود داشت، این امکان را فراهم می‌آورد که از شرایط اولیه با مرتبه‌ی صحیح در معادلات دیفرانسیل کسری استفاده گردد. علاوه بر این همان‌گونه که بیان شد، مشتق کسری کاپوتوی عدد ثابت مقدار صفر دارد. به سادگی می‌توان نشان داد که عملگر کاپوتو نسبت به عملگر ریمان-لیوویل کاربردی‌تر است.

### عملگر انتگرال- دیفرانسیل گروانوالد- لتنیکوف

برخلاف رهیافتی که با انجام انتگرال‌های پیاپی منجر به عملگر ریمان- لیوویل شد، عملگر کسری دیگر به نام گروانوالد-لتنیکوف[۱]، با رویکرد مشتق‌گیری وارد می‌شود. به این جهت، از تعریف بنیادین عملگر مشتق شروع می‌کنیم،

$$f^{(۱)}(x) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (۴۷.۳)$$

با اعمال دوباره‌ی این رابطه، به تعریف مشتق دوم تابع می‌رسیم،

$$f^{(۲)}(x) = \lim_{h\to ۰} \frac{f^{(۱)}(x+h)-f^{(۱)}(x)}{h}$$

[۱] Grunwald-Letnikov Differ-Integral

$$= \lim_{h_1 \to 0} \frac{\lim_{h_2 \to 0} \dfrac{f(x+h_1+h_2)-f(x+h_1)}{h_2} - \lim_{h_2 \to 0} \dfrac{f(x+h_2)-f(x)}{h}}{h_2}. \qquad (۴۸.۳)$$

با انتحاب مقدار یکسان $h$، به عبارتی $h = h_1 = h_2$، عبارت بالا به این صورت ساده خواهد شد،

$$f^{(2)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}. \qquad (۴۹.۳)$$

برای نشان دادن مشتق مرتبه‌ی $n$ ام، عملگر $D^n$ معرفی می‌شود،

$$D^n f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} f(x-mh). \qquad (۵۰.۳)$$

می‌توان این عبارت را به مقدارهای غیرصحیح $\alpha \in \mathbb{R}$ به‌جای $n$ نیز تعمیم داد، البته به این شرط که ضریب دو جمله‌ای را به‌جای تابع فاکتوریل برحسب تابع گاما (۱۱.۳) بیان کرد. همچنین حد بالای سری (که دیگر مقدار صحیح نیست) به‌صورت $\dfrac{t-a}{h}$ به بینهایت میل می‌کند ( در این‌جا $t$ و $a$ به ترتیب حدود بالا و پایین مشتق‌گیری هستند.). در نتیجه به تعریف تعمیم یافته‌ی مشتق کسری گروانوالد- لتنیکوف می‌رسیم،

$$^{GL}D^{\alpha} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+1)}{m!\Gamma(\alpha-m+1)} f(x-mh). \qquad (۵۱.۳)$$

تعریف گرانوالد- لتنیکوف برای مشتق کسری به صورت یک سری ویژگی غیرموضعی بودن عملگر را به‌خوبی نشان می‌دهد. برخلاف مشتق‌های مرتبه صحیح، در این‌جا برای محاسبه مشتق نیازمند مقادیر تابع در تمام نقاط همسایه هستیم.

همان‌گونه که با استفاده از تعریف انتگرال کسری ریمان- لیوویل، عملگرهای مشتق کسری تعریف شدند، نیز می‌توان تعریف مشتق کسری گروانوالد- لتنیکوف را برای بیان انتگرال کسری گروانوالد- لتنیکوف استفاده کرد. صورت طبیعی‌تر برای تعریف این رابطه این است که مشتقی از مرتبه‌ی منفی، $-\alpha$، تعریف شود. اگر بخواهیم رابطه‌ی (۱۱.۵) را به عنوان تعریف مرجع نگاه کنیم، مشکل مهمی که با آن مواجه خواهیم بود این است که $\binom{-n}{m}$ با استفاده از تابع فاکتوریل تعریف نمی‌شود. اگر این دو جمله‌ای را بسط دهیم، خواهیم داشت،

$$\begin{pmatrix} -n \\ m \end{pmatrix} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)(-n-3)...(-n-m+1)}{m!} \qquad (۵۲.۳)$$

می‌توان رابطه بالا را به این صورت نوشت،

$$\begin{pmatrix} -n \\ m \end{pmatrix} = (-1)^m \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)...(n+m-1)}{m!} = (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}. \qquad (۵۳.۳)$$

$$\begin{pmatrix} -n \\ m \end{pmatrix} = (-1)^m \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)...(n+m-1)}{m!} = (-1)^m \frac{(n+m-1)!}{(n-1)!m!}. \qquad (۵۴.۳)$$

با استفاده از تابع گاما می‌توان تابع فاکتوریل در (۵۴.۳) را برای عددهای حقیقی منفی تعمیم داد. از این رو،

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ m \end{pmatrix} = (-1)^m \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)m!}. \qquad (۵۵.۳)$$

اکنون با به‌کار بردن (۵۵.۳) می‌توان (۵۱.۳) را برای $\alpha-$ بازنویسی نمود و به انتگرال کسری گروانوالد- لتنیکوف می‌رسیم.

$$^{GL}D^{-\alpha}f(x) = \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{m=0}^{\frac{t-a}{h}} \frac{\Gamma(\alpha+m)}{m!\Gamma(\alpha)} f(x-mh). \qquad (۵۶.۳)$$

تا کنون، دو نوع فرمول‌بندی برای بیان عملگرها در ریاضیات کسری ارایه شده است، که به ترتیب توسط ریمان و لیوویل و همچنین گروانوالد و لتنیکوف پیشنهاد شده‌اند. بیان چند فرمول‌بندی متفاوت برای یک مفهوم این سوال را به ذهن می‌آورد که آیا این شکل‌های مختلف با یکدیگر معادلند. پاسخ کوتاه به این سوال مثبت است. هرچند که اثبات ریاضی دقیق این موضوع نیاز به صرف وقت زیادی دارد و در مرجع‌های [۱۲۲،۱۳۴] با تفصیل بیشتری با این موضوع پرداخته شده است. اما به عنوان یک راه‌کار در این زمینه، می‌توان توابع را در صورت امکان به‌صورت سری بسط داد و تعریف‌های مختلف مشتق کسری را بر آن‌ها اعمال نمود و نتیجه را با هم مقایسه کرد. با توجه به ساختار این عملگرها، تعریف ریمان- لیوویل انتگرال و مشتق کسری توابع، برای یافتن جواب‌های تحلیلی توابع ساده (نظیر $x^a, e^x, sin(x)t...$ ) به‌کار می‌رود. و در مقابل، تعریف گروانوالد- لتنیکوف برای بررسی‌های عددی مناسب است. بنابراین، راحت‌ترین و سریع‌ترین راه جهت بررسی معادل بودن این دو تعریف، مقایسه‌ی نتایج تحلیلی و عددی حاصل از دو روش است.

### ۳.۴.۳ معادله‌های انتگرالی کسری

**نوع اول**

اولین نوع معادله‌های انتگرال کسری به شکلی است که رابطه (۵۷.۳) نشان می‌دهد،

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{t}\frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}d\tau = f(t), \qquad 0<\alpha<1 \tag{۵۷.۳}$$

که می‌توان این رابطه را به شکل زیر نیز نوشت،

$$J^{\alpha}u(t) = f(t). \tag{۵۸.۳}$$

جواب این نوع معادله‌ها به‌سادگی به‌دست می‌آید و به این شکل است،

$$u(t) = D^{\alpha}f(t). \tag{۵۹.۳}$$

ممکن است برای حل این معادله‌ی انتگرالی، استفاده از مشتق کسری کاپوتو به ذهن برسد، اما باید توجه داشت که همیشه و تحت هر شرایطی رابطه‌ی $^{c}D^{\alpha}J^{\alpha}f(t) = f(t)$ برقرار نمی‌باشد. در ادامه با استفاده از تبدیل لاپلاس نشان داده خواهد شد که اگر عملگر کاپوتو برای حل معادله‌ی (؟؟) به‌کار رود، یک جمله‌ی دیگر نیز در پاسخ بالا ظاهر خواهد شد. در فضای لاپلاس، معادله‌های انتگرالی نوع اول فرم زیر را پیدا می‌کنند،

$$J^{\alpha}u(t) = \phi_{\alpha}(t)*u(t) \quad \Longrightarrow \mathcal{L}[\phi_{\alpha}(t)*u(t)] = \frac{\tilde{u}(s)}{s^{\alpha}} \tag{۶۰.۳}$$

از نظر جبری، می‌توان نتیجه‌ی (۶۰.۳) را به دو صورت بازنویسی کرد،

$$\tilde{u}(s) = s^{\alpha}\tilde{f}(s) \Longrightarrow s\left[\frac{\tilde{f}(s)}{s^{1-\alpha}}\right] \tag{۶۱.۳}$$

یا

$$\tilde{u}(s) = s^{\alpha}\tilde{f}(s) \Longrightarrow \frac{1}{s^{1-\alpha}}[s\tilde{f}(s) - f(0)] + \frac{f(0)}{s^{1-\alpha}}. \tag{۶۲.۳}$$

با برگرداندن شکل اول به فضای زمان، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم،

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = f(t), \qquad (۶۳.۳)$$

که معادل است با جواب حاصل از حل معادله با به‌کارگیری عملگر ریمان- لیوویل. با اعمال تبدیل به فضای زمان شکل دوم، نیز نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود،

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(1)}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = f(t) + f(0) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \qquad (۶۴.۳)$$

جمله‌ی اول این عبارت مشتق کاپوتو است، اما همان‌گونه که قبلا نیز اشاره شد، یک جمله‌ی وابسته به مقدار تابع در $t = 0$ ظاهر شده است.

### نوع دوم

معادله‌های انتگرالی نوع دوم به این صورت هستند،

$$u(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau = f(t) \Longrightarrow (1 + \lambda J^\alpha) u(t) = f(t) \qquad (۶۵.۳)$$

پاسخ (۶۵.۳) به این صورت است،

$$u(t) = (1 - \lambda J^\alpha)^{-1} f(t) = (1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n J^{\alpha n}) f(t) = f(t) + (\sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \Phi_{\alpha n}) * f(t). \qquad (۶۶.۳)$$

با استفاده از (۱۷.۳) می‌توان نشان داد که،

$$E_\alpha(-\lambda t^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \qquad (۶۷.۳)$$

با به‌دست آوردن مشتق مرتبه‌ی اول (۶۷.۳)، جمله‌ی اولِ بسطِ $E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$ حذف می‌شود و نتیجه‌ی حاصل در (۶۶.۳) به‌دست می‌آید. از این رو، نتیجه‌ی حل معادله‌ی انتگرالی نوع دوم را به این شکل خواهیم داشت،

$$u(t) = f(t) + \frac{d}{dt}\left[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)\right] * f(t) \qquad (۶۸.۳)$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس نیز به همین نتیجه می‌رسیم. با انجام تبدیل لاپلاس روی (۶۵.۳) شروع می‌کنیم،

$$\mathcal{L}\left[(۱+\lambda)^\alpha u(t)\right] = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \rightarrow \quad [۱ + \frac{\lambda}{s^\alpha}]\tilde{u}(s) = \tilde{f}(s). \qquad (۶۹.۳)$$

معادله‌ی (۶۹.۳) را می‌توان به صورت‌های مختلف بازنویسی کرد، اما یک حالت خاص ما را به شکل پاسخ حاصل در رابطه‌ی (۶۸.۳) می‌رساند.

$$\tilde{u}(s) = \left[s\frac{s^{\alpha-۱}}{s^\alpha+\lambda} - ۱\right]\tilde{f}(s) + \tilde{f}(s). \qquad (۷۰.۳)$$

در گام بعدی معادله‌ی (۷۰.۳) به فضای معمولی خود تابع بازگردانده می‌شود. بدین منظور باید از فرم تبدیل لاپلاس برای صورت خاصی از تابع میتاگ- لفلر، رابطه‌ی (۷۱.۳) استفاده نمود.

$$\mathcal{L}\left[E_\alpha(-\lambda t^\alpha)\right] = \frac{s^\alpha}{s^\alpha+\lambda}. \qquad (۷۱.۳)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۶.۳)، به‌راحتی می‌توان دید، آن‌چه که در سمت چپ رابطه‌ی (۷۰.۳) در داخل براکت قرار دارد، چیزی جز تبدیل لاپلاس مشتق مرتبه‌ی اول سمت چپ رابطه‌ی (۷۱.۳) نیست؛ به عبارتی دیگر،

$$\mathcal{L}\left[E_\alpha^{(۱)}(-\lambda t^\alpha)\right] = \frac{s^{\alpha-۱}}{s^\alpha+\lambda} - ۱. \qquad (۷۲.۳)$$

با استفاده از تعریف کانوولوشن لاپلاس در (۱۴.۳)، دیده می‌شود که چگونه معکوس رابطه‌ی (۷۰.۳) منجر به همان نتیجه‌ی (۶۷.۳) می‌شود.

### ۴.۴.۳ معادله‌های دیفرانسیلی کسری

در معادله‌های دیفرانسیل معمول خطی کلاسیک، عموما دو نوع معادله زیر مورد توجه بیشتری هستند، که در مرجع [۱۲۳] از آن‌ها به‌عنوان معادله‌های واهلش و نوسان[۱] یاد شده،

$$u'(t) = -u(t) + q(t)$$
$$u''(t) = -u(t) + q(t). \qquad (۷۳.۳)$$

وقتی در مورد این دو معادله صحبت می‌کنیم، از آن‌ها به ترتیب به عنوان معادله‌های دیفرانسیل مرتبه‌ی اول و دوم یاد می‌کنیم. این تمایز دو معادله را در ریاضیات کسری نیز می‌توان با اختصاص عنوان فرم واهلش کسری و نوسانگر کسری نشان داد. در معادلات دسته اول، مرتبه‌ی معادله دیفرانسیل $۱ \leq \alpha < ۰$ می‌باشد و طبق انتظار مرتبه‌ی دسته دوم $۲ \leq \alpha < ۱$ می‌باشد.

اما برخلاف معادله‌های با مرتبه‌ی صحیح، پاسخ این دو معادله‌ی مرتبه‌ی اول و دوم کاملا مستقل و از هم متفاوت نیستند، بلکه به هم ارتباط داشته و در هم تنیده‌اند. از این رو نیازی به جدا کردن این دو معادله از یکدیگر برای بررسی جواب‌های آن‌ها وجود ندارد. معادله‌ی دیفرانسیل معمولی کسری خطی را می‌توان به یک شکل کلی زیر بیان کرد،

$$D_*^\alpha u(t) = D^\alpha \left( u(t) - \sum_{k=۰}^{m-۱} \frac{t^k}{k!} u^{(k)}(۰) \right) = -u(t) + q(t), \qquad m - ۱ < \alpha \leq m. \qquad (۷۴.۳)$$

یادآوری می‌کنیم که در این‌جا از عملگر مشتق کاپوتو استفاده شده است. همان‌گونه که قبلا نیز گفته شد، با به‌کار بردن این عملگر، شرایط اولیه با مرتبه‌ی صحیح مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مستقیم‌ترین روش برای حل معادله‌ی (۷۴.۳)، استفاده از تبدیل لاپلاس است. با توجه به رابطه‌ی (۴۵.۳)، می‌توان (۷۴.۳) را به‌صورت زیر بازنویسی نمود،

$$s^\alpha \tilde{u}(s) = \sum_{k=۰}^{m-۱} s^{\alpha-k-۱} u^{(k)}(۰) = -\tilde{u}(s) + \tilde{q}(s) \Longrightarrow \tilde{u}(s) = \sum_{k=۰}^{m-۱} \frac{s^{\alpha-k-۱}}{s^\alpha + ۱} u^{(k)}(۰) + \frac{۱}{s^\alpha + ۱} \qquad (۷۵.۳)$$

[۱] The Relaxation and Oscillation Forms

می‌توان جمله‌های داخل سری را جمع زد،

$$\frac{s^{\alpha-k-1}}{s^{\alpha}+1}=\frac{1}{s^{\alpha}}\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1}=\mathcal{L}\left[J^{k}E_{\alpha}(-t^{\alpha})\right] \tag{۷۶.۳}$$

همچنین،

$$\frac{1}{s^{\alpha}+1}=-(s\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha}+1}-1)=\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}[E_{\alpha}(-t^{\alpha})]\right] \tag{۷۷.۳}$$

سرانجام با استفاده از رابطه‌های (۷۶.۳) و (۷۷.۳)، برای تعریف تبدیل لاپلاس معکوس، می‌توان رابطه‌ی (۷۵.۳) را به عبارتی برای $u(t)$ تبدیل کرد، و در نهایت جواب معادله دیفرانسیل معمولی کسری را به این شکل به‌دست آورد،

$$u(t)=\sum_{k=0}^{m-1}J^{k}E_{\alpha}(-t^{\alpha})u^{(k)}(0)-q(t)*E'_{\alpha}(-t^{\alpha}). \tag{۷۸.۳}$$