

فصل دوم

مدل‌های پخش غیرعادی

الگوی مشاهده شده در فرآیند پخش در محیط‌های بی‌نظم، عموماً با آنچه از حرکت بروانی انتظار می‌رود متفاوت است. در واقع، مومنت دوم جابجایی‌ها با زمان رابطه‌ی توانی دارد که این رفتار با عنوان پخش غیرعادی شناخته می‌شود. مکانیزم‌های فیزیکی مختلفی منجر به این رفتار توانی می‌شوند. با شناخت دقیق ویژگی‌های آماری این مکانیزم‌ها، می‌توان شناخت بهتری از فرآیند پخش غیرعادی داشت. از جمله مهم‌ترین مدل‌های معرفی شده جهت توصیف پخش غیرعادی عبارتند از ول‌گشت زمان پیوسته ($CTRW$) به عنوان فرآیندی غیر گاوسی و حرکت بروانی بازمقیاس شده (SBM) که از جمله فرآیندهای گاوسی در توصیف پخش غیرعادی است. در این فصل پس از معرفی برخی از مفاهیم و ویژگی‌های سیستم‌های آماری، به مطالعه‌ی دو مدل ذکر شده می‌پردازیم.

۱.۲ آمار پخش غیرعادی

۱.۱.۲ توزیع لوی

اهمیت اساسی توزیع نرمال به علت وجود قضیه حد مرکزی است که خود نتیجه قضیه برنولی، لاپلاس-مویوره و قانون اعداد بزرگ^۱ است. این مفاهیم بعداً توسط پاول لوی تعمیم یافت و بعد از او توزیع‌های نرمال تعمیم یافته ظهور کردند. در مراجع [۷۷-۷۹] می‌توان جزئیات بیشتری در مورد توزیع‌های لوی و قضیه حد مرکزی تعمیم یافته‌ی لوی-گدنکو دست

^۱ The Law of Large Numbers

یافت. بر طبق کارهای انجام شده توسط لوی [۷۷]، یک توزیع F توزیعی پایدار است اگر به ازای دو ثابت c_1 و c_2 ، عدد مثبت ثابت c وجود داشته باشد به قسمی که کمیت X در رابطه زیر،

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 = cX \quad (1.2)$$

همانند متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 (که مستقل بوده و توزیع یکنواخت دارند (iid))، از توزیع F پیروی کند. به بیانی دیگر اگر $\varphi(z)$ ،

$$\varphi(z) \equiv \langle e^{iXz} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iXz} dF(X), \quad (2.2)$$

تابع مشخصه توزیع F باشد، در این صورت F پایدار است اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\varphi(c_1 z) \varphi(c_2 z) = \varphi(cz). \quad (3.2)$$

تعریف دقیق‌تر توسط فلر^۲ [۲۱] ارائه شد. فرض کنید X, X_1, X_2, \dots, X_n متغیرهای تصادفی (iid) با توزیع مشترک F باشند. در این صورت F پایدار است اگر ثابت‌های $c_n > 0$ و γ_n وجود داشته باشند، به طوری که رابطه زیر برقرار باشد:

$$Y_n \equiv \sum_i X_i \leftrightarrow c_n X + \gamma_n \quad (4.2)$$

که به این معناست که متغیرهای تصادفی هر دو سمت توزیع یکسانی را، F ، دنبال می‌کنند. در نهایت، تابع مشخصه طبق رابطه (۳.۲) رابطه تابعی زیر را ارضا می‌کند،

$$\varphi^n(z) = \varphi(c_n z) e^{i\gamma_n z} \quad (5.2)$$

که حل دقیق دارد و پاسخ به این صورت است،

$$\psi(z) = \log(\varphi(z)) = i\gamma z - c|z|^\alpha \left\{ 1 + i\beta \frac{z}{|z|} \omega(z, \alpha) \right\} \quad (6.2)$$

^۱ Stable

^۲ Feller

و c, γ, β, α مقادیر ثابت هستند (γ می تواند هر مقدار حقیقی داشته باشد، $0 < \alpha \leq 2$ ، $-1 < \beta \leq 1$ و $c > 0$ هستند)

و

$$\omega(z, \alpha) = \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{4}\right), & \text{if } \alpha \neq 1, \\ \frac{\gamma}{\pi} \log(|z|), & \text{if } \alpha = 1. \end{cases} \quad (7.2)$$

α شاخص یا نمای مشخصه لوی^۱ نام دارد. با به کارگیری رابطه (۶.۲) می توان نشان داد که ضریب بهنجارش c_n در رابطه (۳.۲) برابر است با $n^{1/\alpha}$. مقدار حدی $\alpha = 2$ معادل است با توزیع نرمال گاوسی که از قضیه حد مرکزی به دست می آید. به ازای $\beta = 0$ توزیع متقارن است. γ توزیع را انتقال می دهد و c ضریب مقیاسی برای X است. از این رو γ و c پارامترهای اساسی نیستند و با صرف نظر کردن از آنها، تابع مشخصه رابطه زیر را ارضا می کند،

$$|\varphi(z)| = e^{-|z|^\alpha} \quad \alpha \neq 1. \quad (8.2)$$

بنابراین می توان نوشت،

$$\psi = -|z|^\alpha \exp\left\{i \frac{\pi\beta}{4} \text{sign}(z)\right\} \quad (9.2)$$

با پارامتر اصلی β که محدود به این ناحیه می باشد،

$$|\beta| \leq \begin{cases} \alpha, & \text{if } 0 < \alpha < 1, \\ 2 - \alpha, & \text{if } 1 < \alpha < 2. \end{cases} \quad (10.2)$$

با اعمال تبدیل فوریه بر $\varphi(z)$ و از طریق رابطه (۹.۲) تعریف می شود،

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty \exp\left(-ixz - z^\alpha \exp\left\{i \frac{\pi\beta}{4}\right\}\right) dz. \quad (11.2)$$

^۱ Lévy Index or Characteristic Exponent

از این رو،

$$f_{\alpha,\beta}(x) = f_{\alpha,-\beta}(-x) \quad (۱۲.۲)$$

و در نتیجه،

$$f_{\alpha,\circ}(x) = f_{\alpha,\circ}(-x) \quad (۱۳.۲)$$

نسبت به x متقارن است.

قضیه حد مرکزی تعمیم یافته لوی-گدنکو. فرض می‌کنیم برای متغیرهای (iid) X_1, X_2, \dots داریم $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$. اگر توزیع Y_n با بهنجارش مناسب در حد $n \rightarrow \infty$ به یک توزیع F همگرا شود، F پایدار است. به ویژه اگر واریانسش محدود باشد، F گاوسی خواهد بود و از قضیه حد مرکزی تبعیت می‌کند. رفتار مجانبی توزیع لوی پایدار به شکل توانی معکوس است،

$$f_{\alpha,\beta}(x) \sim \frac{A_{\alpha,\beta}}{|x|^{1+\alpha}}, \quad \alpha < 2. \quad (۱۴.۲)$$

برای تمام لوی‌های پایدار با $0 < \alpha < 2$ ، واریانس واگراست،

$$\langle x^2 \rangle \rightarrow \infty. \quad (۱۵.۲)$$

در مقابل، مومنت‌های کسری برای مقادیر مطلق x به ازای هر $0 \leq \delta < \alpha \leq 2$ متناهی هستند،

$$\langle |x|^\delta \rangle < \infty. \quad (۱۶.۲)$$

۲.۱.۲ ارگودیسیتی

برای یک فرآیند پخش میانگین مربع جابجایی (MSD) را می‌توان از دو طریق به ترتیب هنگردی و زمانی به دست آورد:

$$\langle x^2(t) \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i(t) - x_i(t_0)]^2 \quad (17.2)$$

$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{t-\Delta} \int_0^{t-\Delta} [x_i(t'+\Delta) - x_i(t')]^2 dt' \right\}$$

در میانگین زمانی، زمان تاخیری Δ نقش زمان مشاهده t را ایفا می‌کند. بر طبق فرضیه شبه‌ارگودیک، یک سیستم ارگودیک^۱ خوانده می‌شود اگر هر مسیری در زمان محدود بتواند به طور دلخواه به هر نقطه فضای فاز برسد. برای سیستم‌های ارگودیک میانگین‌های زمانی و هنگردی معادل یکدیگر می‌باشند، به عبارتی دیگر، باید برای زمان‌های طولانی داشته باشیم:

$$\langle x^2(\Delta) \rangle \sim \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle. \quad (18.2)$$

سیستم‌هایی دارای شکست ارگودیسیتی، می‌توانند بعد از گذارهای فاز با شکست تقارن شکل گیرند، یا به بیانی دیگر وقتی که بخش‌هایی از فضای فاز در اختیار سیستم قرار نگیرد. بوجاد^۲ اصطلاح شکست ضعیف ارگودیسیتی^۳ را وارد کرد. دینامیک سیستم توسط تابع توزیع زمانی به صورت توانی و اگر شونده، تعیین می‌شود. سیستم‌های با پخش غیرعادی بر طبق مدل ولگشت تصادفی زمان پیوسته، نمونه‌ای از این دست هستند.

ویژگی دیگری که در فرآیندهای غیرارگودیک ضعیف مشاهده می‌شود، این است که میانگین زمانی مشاهده‌پذیرها، حتی برای زمان مشاهده‌ی بسیار بلند، کمیتی تصادفی است و از نمونه‌ای به نمونه‌ی دیگر متفاوت خواهد بود که حول مقدار میانگین خود افت و خیز دارد. معیاری که این پراکندگی‌ها را نشان می‌دهد، پارامتر شکست ارگودیسیتی EB نامیده شده و به این صورت تعریف می‌شود،

$$EB(\Delta) = \frac{\langle (\overline{\delta^2(\Delta)})^2 \rangle - \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle^2}{\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle^2} = \langle \xi^2(\Delta) \rangle - 1. \quad (19.2)$$

^۱ Ergodic

^۲ Bouchaud

^۳ Weak Ergodicity Breaking

که در این رابطه $\langle \xi^2(\Delta) \rangle = \frac{\overline{\delta^2(\Delta)}}{\overline{\delta^2(\Delta)}}$ است. برای حرکت براونی در حد $\Delta/t \rightarrow 0$ این کمیت به صورت خطی با Δ/t به صفر میل می‌کند [۸۰، ۸۱].

$$EB_{BM}(\Delta) = 4\Delta/(3t). \quad (20.2)$$

۳.۱.۲ زمان اولین عبور

زمان اولین عبور^۱ (FPT) از جمله ویژگی‌های آماری مهم در پدیده پخش است [۲۱]. وقتی اطلاعات آماری سیستم به اندازه کافی در اختیار باشد، بررسی ویژگی آماری زمان اولین عبور، از جمله کمیت‌هایی است که برای تعیین نوع فرآیند پخش غیرعادی انجام می‌شود. در واقع زمان اولین عبور به زمان T_a گفته می‌شود که ذره در فرآیند پخش (حرکت تصادفی خود) برای اولین بار بعد از حرکت (از مقدار صفر) به یک نقطه یا مقدار خاص a برسد. از آنجا که فرآیند تصادفی است، در اصل چگالی احتمال T_a مورد بررسی قرار می‌گیرد و می‌تواند یک شاخصه مهم در تشخیص نوع فرآیند پخش باشد به‌ویژه برای سیستم‌های مقید^۲ به یک پتانسیل خاص. در آزمایش‌های ردیابی تک ذره‌ای^۳، به راحتی می‌توان T_a را به صورت مومنت‌های زمانی، وقتی که ذره یک فاصله معین از نقطه شروع حرکتش را طی می‌کند، اندازه‌گیری کرد. همان‌طور که در مرجع [۸۲] نشان داده شده است، مقیاس‌بندی برای زمان اولین عبور میانگین نسبت به فاصله از مبدا که از تکرار آماری چنین آزمایشی به‌دست آمده است، یکی از مشخصات فرآیند پخش مربوط است.

زمان اولین عبور و اصل بازتاب

ممکن است یافتن T_a یا چگالی احتمال آن به نظر مشکل باشد، اما در ۱۸۸۷ آندره^۴ با یک حيله ساده، نشان داد که کار سختی نیست. این حيله اصل بازتاب نامیده می‌شود. هرچند روش متداول‌تر رسیدن به توزیع زمان اولین عبور از طریق معادله فوکر-پلانک انجام می‌شود [۸۳].

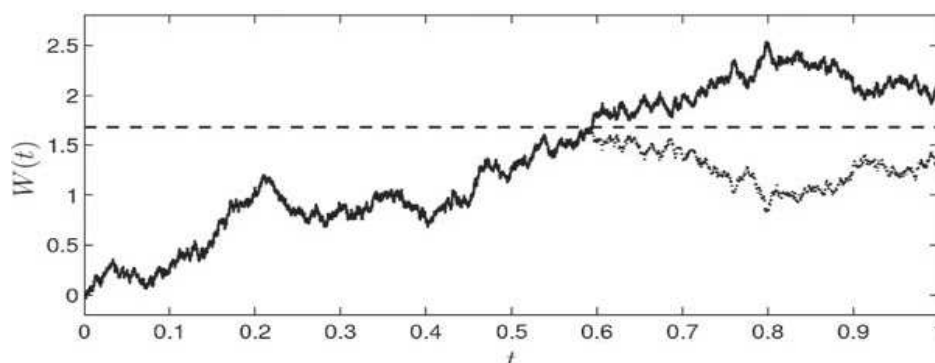
به عنوان مثال، یک فرآیند وینر را در نظر می‌گیریم که در زمان τ برای اولین بار از مقدار a عبور می‌کند تصویر (۱.۲).

^۱ First Passage Time

^۲ Confined Systems

^۳ Single Particle Tracking Experiments

^۴ D. André



شکل ۱.۲: مسیر نمونه برای فرآیند وینر که در زمان $t = \tau$ برای اولین بار به مقدار a می‌رسد. همچنین مسیر دیگری نیز نشان داده شده است که تا وقتی به a می‌رسد دقیقاً مانند مسیر اول است، و در ادامه بازتاب مسیر اولی نسبت به محور افق در نقطه a است.

می‌توان بعد از عبور آن از a ، با بازتاب این مسیر نسبت به خط افق در ارتفاع a ، مسیر دیگری یافت. مسیر دوم نیز تا زمان τ همانند اولی است، اما بعد این زمان تغییر می‌کند که در شکل به صورت خط چین نشان داده شده است. حال، از آنجا که فرآیند وینر متقارن است (بالا رفتن همان اندازه محتمل است که پایین رفتن)، احتمال هر دو مسیر یکسان است. این همان اصل بازتاب است و بیان می‌کند که اگر مسیر یک فرآیند تصادفی متقارن را از هر نقطه‌ای منعکس کنیم، مسیر دوم نیز دقیقاً همان احتمال وقوع اولی را دارد.

حال این اصل را استفاده می‌کنیم تا چگالی احتمال برای زمان اولین عبور را بیابیم. فرآیند وینری را در نظر بگیرید که در زمان $t = 0$ از مقدار 0 شروع و برای مدت T جریان داشته است. در این مدت زمان بسته به مسیری که طی نموده به یک بیشینه M_T می‌رسد. حال احتمالی را محاسبه می‌کنیم که M_T بزرگ‌تر یا مساوی a باشد. با بررسی تصویر (۱.۲)، مشاهده می‌شود که بیشینه هر دو فرآیند بزرگ‌تر یا مساوی a است. بنابراین برای هر مسیر نمونه که مقدار نهایی اش بزرگ‌تر از a است، دو مسیر وجود دارد که برای آن $M_T \geq a$. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که،

$$Prob(M_T \geq a) = 2 \times Prob(W(T) \geq a). \quad (21.2)$$

حال محاسبه احتمال این که $W(T)$ بزرگ‌تر از a باشد ساده است، چرا که چگالی احتمال برای $W(T)$ را می‌دانیم. بنابراین،

$$Prob(M_T \geq a) = 2 \times Prob(W(T) \geq a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi T}} \int_a^\infty e^{-x^2/(2T)} dx. \quad (22.2)$$

این انتگرال جواب تحلیلی ندارد اما قطعاً با استفاده از روش‌های عددی قابل محاسبه است.

با توجه به نتایج بالا، می‌توان چگالی احتمال زمان اولین عبور از a را یافت. به این منظور صرفاً نیاز است بدانیم که زمان لازم برای فرآیند وینر که بتواند به a برسد، کمتر یا مساوی T است اگر و تنها اگر بیشینه فرآیند وینر در زمان T یعنی M_T بزرگ‌تر از a باشد. در نتیجه،

$$Prob(T_a \leq T) = Prob(M_T \geq a) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi T}} \int_a^{\infty} e^{-x^2/(2T)} dx. \quad (23.2)$$

بنابراین، احتمال $T_a \leq T$ تابع توزیع $F(T)$ برای T_a است، و چگالی احتمال برای T_a ، $f(T)$ است،

$$f(T) = \frac{dF(T)}{dT} = \frac{d}{dT} \left[\frac{\sqrt{2}}{\pi T} \int_a^{\infty} e^{-x^2/(2T)} dx \right]. \quad (24.2)$$

و این روش پایه‌است برای یافتن زمان اولین عبور در مورد فرآیندهای پخش غیرعادی که در ادامه بیشتر به آن‌ها می‌پردازیم.

۴.۱.۲ اثر تحولات گذشته

فرض کنید که چشمک زدن یک تک نقطه کوانتومی^۱ تابشی را بین حالت گسیل نور و خاموش آن مشاهده می‌کنیم [۸۴]. با وجود این که این آزمایش گذارهای سریع میان حالت‌های روشن و خاموش را نشان می‌دهد، می‌توان روشن و خاموش‌هایی با زمان‌های بسیار بلند نیز مشاهده نمود. بعد از گذشت زمان مشاهده‌ی به اندازه کافی بلند t ، دوره این رخدادها با t افزایش می‌یابد [۸۴]. اتفاق مشابهی در حرکت شبکه‌های پتاسیم در غشاهای پلاسمای سلول‌های زنده^۲ [۸۵] یا در نفوذ ردیاب‌های زیرمیکرونی در مش اکتین متقابل وابسته^۳ [۸۶] دیده می‌شود: دوره‌های سکون بلند و بلندتر.

در سیستم‌های پایا، همبستگی زمانی میان دو زمان $t = t_1$ و $t = t_2$ تابعی از تفاضل آن‌هاست $f(|t_1 - t_2|)$. اما در سیستم‌های غیرپایا، این وابستگی زمانی شکلی پیچیده‌تر دارد، مثلاً می‌تواند به صورت $f(t_2/t_1)$ باشد [۸۷]. در این شرایط غیرپایا، نمی‌توان مبدا زمانی را به صورت دلخواه انتخاب کرد. در این جا، گذشته سیستم از اهمیت بالایی برخوردار است؛ چرا که مشاهده‌پذیرهای فیزیکی وابستگی صریح به بازه زمانی t_a بین لحظه‌ی اولیه آماده‌سازی سیستم و لحظه شروع ثبت داده‌ها دارند. در نتیجه، اندازه‌گیری یک کمیت مشخص برای سیستم بر روی بازه زمانی $[0, t]$ بسیار متفاوت خواهد

^۱ Quantum Dot

^۲ Potassium Channels in the Plasma Membrane of Living Cells

^۳ Submicron Tracers in a Cross-Linked Actin Mesh

بود با نتیجه برای بازه $[t_a, t + t_a]$. به عنوان مثال، در یک ولگشت زمان پیوسته‌ی زیرپخشی که در ادامه معرفی خواهد شد، با گذشت زمان، ذره برای برداشتن یک گام جدید، با زمان انتظارهای بزرگ و بزرگ‌تری روبرو خواهد بود. با مشاهده ذره، خواهیم دید که در زمان‌های بسیار بلند در دام‌های بزرگی به دام افتاده است. در این صورت، آمار حاکم بر سیستم کاملاً متفاوت با حالتی است که از دینامیک ذره در این بازه صرف‌نظر شود. اولین بار این پدیده به عنوان یکی از ویژگی‌های اساسی سیستم‌های شیشه‌ای^۱ [۸۸] مطرح شد. در بعضی آزمایش‌ها می‌توان t_a را تنظیم کرد مانند: اندازه‌گیری زمان حرکت حامل‌های بار در نیم‌رساناهای پلیمری که در آنجا دینامیک سیستم با وارد کردن ضربه‌ای توسط پالس نوری به حامل‌ها آغاز می‌شود [۸۹]. اما همواره این امکان وجود ندارد؛ برای نمونه، در حرکت ردیاب‌ها در سلول‌های زیستی همیشه نمی‌توان به دقت t_a را تعیین نمود. در این حالت بسیار مهم است که فرم تابعی اثر t_a را بدانیم.

۲.۲ حرکت بروانی بازمقیاس شده

تاکنون با استفاده از معادلات تعمیم یافته پخش، تلاش‌های زیادی برای مدل کردن پخش غیرعادی صورت گرفته است که توانسته‌اند توصیفی ریاضیاتی برای فرآیند مذکور فراهم آورند. علی‌رغم مدل‌های مختلف پیشنهاد شده، همچنان نیازمند درک عمیق‌تر مکانیزم ایجاد کننده آن‌ها هستیم. در این میان مدل‌های گاوسی، که با توجه به معادله لانژوین مشخص می‌شوند، در تحلیل پخش غیرعادی نقش بسزایی ایفا می‌کنند. از جمله، حرکت بروانی کسری مندلبروت-ون نس^۲ (FBM) است که از معادله لانژوین $\dot{x} = \zeta_{fgn}(t)$ پیروی می‌کند؛ نشان دهنده نوفه گاوسی کسری است با کوواریانس $\langle \zeta_{fgn}(t_1) \zeta_{fgn}(t_2) \rangle \simeq \alpha(\alpha - 1) |t_1 - t_2|^{\alpha-2}$ که برای به ترتیب زیر و فرایپخش، همبستگی بلند برد منفی و مثبت نشان می‌دهد. FBM و حرکت معادله لانژوین کسری وابسته آن، جهت بررسی مساله حرکت در محیط‌های ویسکو الاستیک^۳ به کار می‌روند [۹۰].

اما نوع دوم از مدل‌های گاوسی برای پخش غیرعادی که در این بخش بیشتر بر آن توجه داریم، مدل حرکت بروانی بازمقیاس شده^۴ (SBM) است [۹۱-۹۴]. این مدل به سادگی با بازمقیاس کردن زمان در حرکت بروانی $x(t)$ به دست می‌آید،

$$t \rightarrow t_* = t^\alpha, \quad 0 < \alpha < 2. \quad (25.2)$$

^۱ Glassy Systems

^۲ Mandelbrot-van Ness Fractional Brownian motion

^۳ Viscoelastic

^۴ Scaled Brownian Motion

حرکت بازمقیاس شده بروانی $x_*(t) \equiv x(t_*)$ ، فرآیندی گاوسی با میانگین صفر و تابع همبستگی،

$$\langle x(t_*)x(s_*) \rangle = t_* \wedge s_* = t^\alpha \wedge s^\alpha = \langle x_*(t)x_*(s) \rangle \quad (26.2)$$

است؛ \wedge نشان دهنده کمینه میان دو مقدار می باشد. $X_*(t)$ با استفاده از نوفه سفید $\eta(t)$ نیز تعریف می شود:

$$x_*(t) = \int_0^t \sqrt{2K(u)}\eta(u)du, \quad (27.2)$$

در این رابطه $K(t) = \alpha K_\alpha^* t^{(\alpha-1)}$ ضریب وابسته به زمان است و $\eta(t)$ رابطه $\langle \eta(t)\eta(s) \rangle = \delta(t-s)$ را ارضا می کند. فرم معادله دیفرانسیل مربوط به (۲۷.۲) به این صورت است،

$$\frac{dx_*(t)}{dt} = \sqrt{2K(t)}\eta(t). \quad (28.2)$$

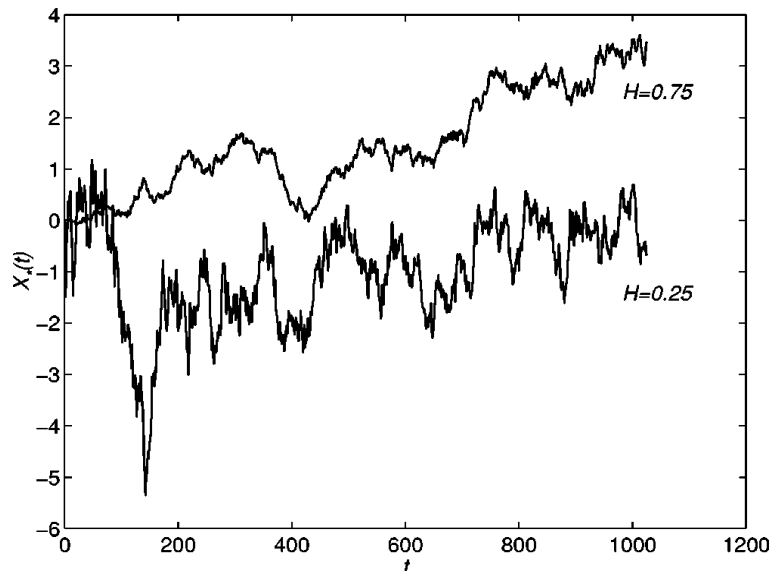
می توان نشان داد که واریانس $x_*(t)$ رابطه (۲۶.۱) را ارضا می کند.

(SBM) خواص اساسی حرکت بروانی را داراست. (SBM) درست مانند حرکت بروانی، یک فرآیند گاوسی مارکوف^۱ است چراکه برای $t > 0$ بازمقیاس کردن $t \rightarrow t^\alpha$ با $\alpha > 0$ ، ترتیب زمانی و در نتیجه خصلت مارکوفی را حفظ می کند. نیز با استفاده از تابع توزیع احتمال و با بررسی معادله چاپمن-کولموگروف مربوط، می توان مارکوف بودن (SBM) را تحقیق نمود. (SBM) فرآیندی خودمتشابه با نمای مقیاسی $\alpha/2$ است. برای $b > 0$ داریم،

$$\langle x_*(bt)x_*(bs) \rangle = \langle x([bt]^\alpha)x([bs]^\alpha) \rangle = b^\alpha \langle x_*(t)x_*(s) \rangle, \quad (29.2)$$

که در این رابطه از ویژگی خودمتشابهی در حرکت بروانی $x(bt) = b^{1/\alpha}x(t)$ استفاده شده است. همین طور می توان نشان داد که نموهای (SBM) بر روی بازه های ناهمپوشان، همانند حرکت بروانی معمولی مستقل از هم هستند. مسیرهای شبیه سازی شده نمونه ای حرکت بروانی بازمقیاس شده، در تصویر (۲.۲) دیده می شود. برای $H = 0.75$ ، حرکت $x_*(t)$ تسریع شده ی بروانی و برای $H = 0.25$ حرکت کند شده را نشان می دهد.

^۱ Markov



شکل ۲.۲: مسیر حرکت بروانی بازمقیاس شده برای دو نمای $H = 0.75$ و $H = 0.25$ [۹۱].

معادله پخش حاکم بر حرکت بروانی بازمقیاس شده به این صورت است،

$$\frac{\partial P_*(x, t)}{\partial t} = \alpha K_\alpha^* t^{(\alpha-1)} \frac{\partial^\alpha P_*(x, t)}{\partial x^\alpha} = K(t) \frac{\partial^\alpha P_*(x, t)}{\partial x^\alpha} \quad (30.2)$$

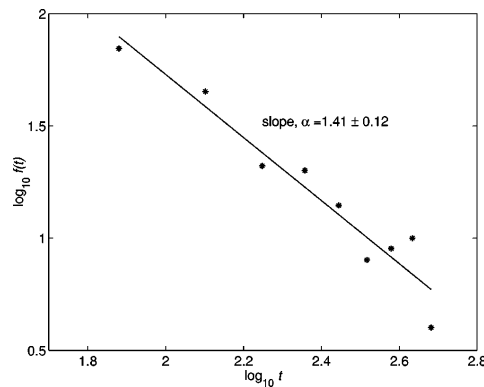
این معادله تحت شرط اولیه تابع دلتای دیراک $P_*(x, 0) = \delta(x)$ دارای پاسخ،

$$\begin{aligned} P(x, t_*) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha K_\alpha^* \pi t_*}} \exp \left[-\frac{x^\alpha}{\alpha K_\alpha^* t_*} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha K_\alpha^* \pi t^\alpha}} \exp \left[-\frac{x^\alpha}{\alpha K_\alpha^* t^\alpha} \right] \equiv P_*(x, t). \end{aligned} \quad (31.2)$$

است. در رابطه (۳۱.۲) تحت رابطه بازمقیاسی $x \rightarrow b^{\alpha/\alpha} x$ و $t \rightarrow bt$ خودمتشابه است، بنابراین،

$$P_*(b^{\alpha/\alpha} x, bt) = b^{\alpha/\alpha} P_*(x, t). \quad (32.2)$$

می‌توان نشان داد که FBM نیز pdf مشابهی دارد.



شکل ۳.۲: تخمین نمای α توزیع زمان اولین عبور $f(t) \sim t^{-\alpha}$ ، که برای حرکت بروانی بازمقیاس شده داریم $\alpha = H + 1$ [۹۱].

رفتار FPT در فرآیند پخش SBM

همان گونه که قبلاً در بخش (۳.۱.۲) بیان شد، یکی از مساله‌های مورد توجه در فرآیندهای تصادفی تعیین زمان اولین عبور آن‌ها از یک مقدار معین است. FPT یک کمیت تصادفی است و برای نمودهای مختلف یک فرآیند متفاوت است. تنها می‌توان FPT را برای تعداد معدودی از فرآیندها از جمله حرکت بروانی به دقت تعیین کرد. در این بخش به بحث در مورد FPT برای حرکت بروانی بازمقیاس شده می‌پردازیم.

در مورد SBM، با به‌کارگیری روش بیان شده در بخش (۳.۱.۲)، تابع توزیع برای FPT را پیدا می‌کنیم. زمان T_a برای اولین بار رسیدن $x_*(t)$ به مقدار a برابر t خواهد بود اگر $M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} x_*(s)$ در این زمان حداقل مقدار a را داشته باشد. از این رو برای $t > 0$

$$\begin{aligned} P\{M(t) \geq a\} &= P\{T_a \leq t\} = \mathbb{P}\{X_*(t) \geq a\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{K_\alpha^* \pi t_*}} \int_a^\infty \exp\left[-\frac{x^2}{4t_*}\right] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{K_\alpha^* \pi}} \int_{a/\sqrt{t_*}}^\infty \exp\left[-\frac{y^2}{4}\right] dy. \end{aligned} \quad (33.2)$$

با تغییر متغیر $s = a^2 t_* / x^2$ ، تابع توزیع برای زمان اولین عبور به دست می‌آید،

$$F(t) = P\{T_a \leq t\} = \frac{a}{\sqrt{K_\alpha^* \pi}} \int_0^{t_*} s^{-3/2} \exp\left[-\frac{a^2}{4s}\right] ds. \quad (34.2)$$

بدین ترتیب، چگالی توزیع $f(t)$ برای T_a را خواهیم داشت،

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \frac{Ha}{\sqrt{K_\alpha^* \pi t^{H+1}}} \exp\left[-\frac{a^2}{4t^{2H}}\right]. \quad (35.2)$$

برای $H = 1/2$ ، نتیجه مربوط به حرکت بروانی معمولی به دست خواهد آمد. با میل کردن $t \rightarrow \infty$ ، $f(t)$ به صورت $t^{-(H+1)}$ افت می‌کند. این رفتار در تصویر (۳.۲) دیده می‌شود. این تصویر نتایج حاصل FPT برای ۱۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی شده برای $H = 0.4$ را نشان می‌دهد. مقدار تخمینی $H = 0.4 \pm 0.12$ با وجود تعداد کم نمونه‌ها توافق خوبی با مقدار محاسبه شده دارد.

ارگودیسیتی در فرآیند پخش SBM

با توجه به غیرپایا بودن SBM ، انتظار رفتار غیر ارگودیک وجود دارد. به طوری که می‌توان دید، از معادله دیفرانسیل (۲۸.۲) برطبق (۱۷.۲) میانگین زمانی برای MSD به این صورت متفاوت از میانگین هنگردی به دست می‌آید،

$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle = \frac{2K_\alpha^* t^{\alpha+1}}{(\alpha+1)} \times \frac{\left[1 - \left(\frac{\Delta}{t}\right)^{1+\alpha} - \left(1 - \frac{\Delta}{t}\right)^{1+\alpha}\right]}{t - \Delta} \quad (36.2)$$

که در حد $t \gg \Delta$ ، رفتار خطی زیر را به دست می‌آوریم،

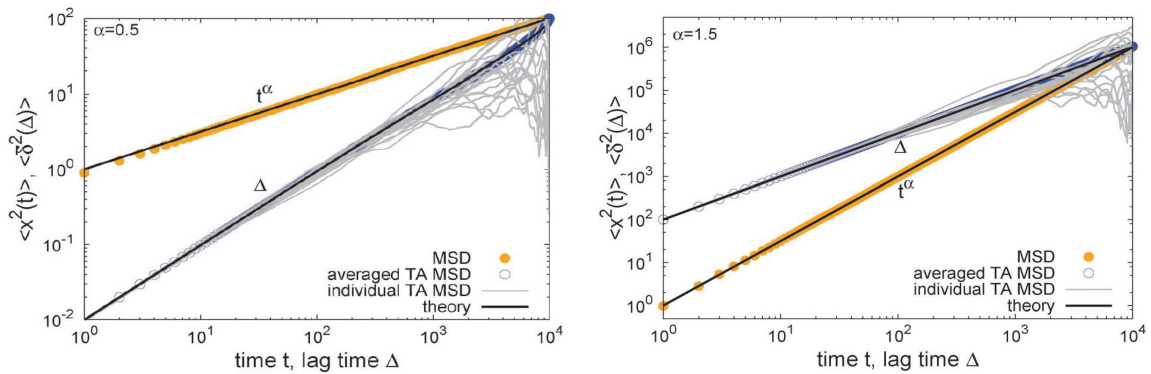
$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle \sim 2K_\alpha^* \frac{\Delta}{t^{1-\alpha}}. \quad (37.2)$$

این نتیجه، غیرارگودیک بودن فرآیند را نشان می‌دهد که در مرجع ([۸۰]) بیان شده،

$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle \neq \langle x^2(\Delta) \rangle. \quad (38.2)$$

وقتی Δ به سمت زمان اندازه‌گیری یا زمان مشاهده t میل می‌کند، با استفاده از بسط $\frac{\Delta}{t} \simeq 1 + \varepsilon$ برای صورت حدی رابطه بالا، به نتیجه زیر می‌رسیم،

$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle \sim 2K_\alpha^* t^\alpha - \frac{\alpha K_\alpha^*}{t^{1-\alpha}}(t - \Delta) + \frac{\alpha(\alpha - 1)K_\alpha^*}{3t^{2-\alpha}}(t - \Delta)^2 \quad (39.2)$$



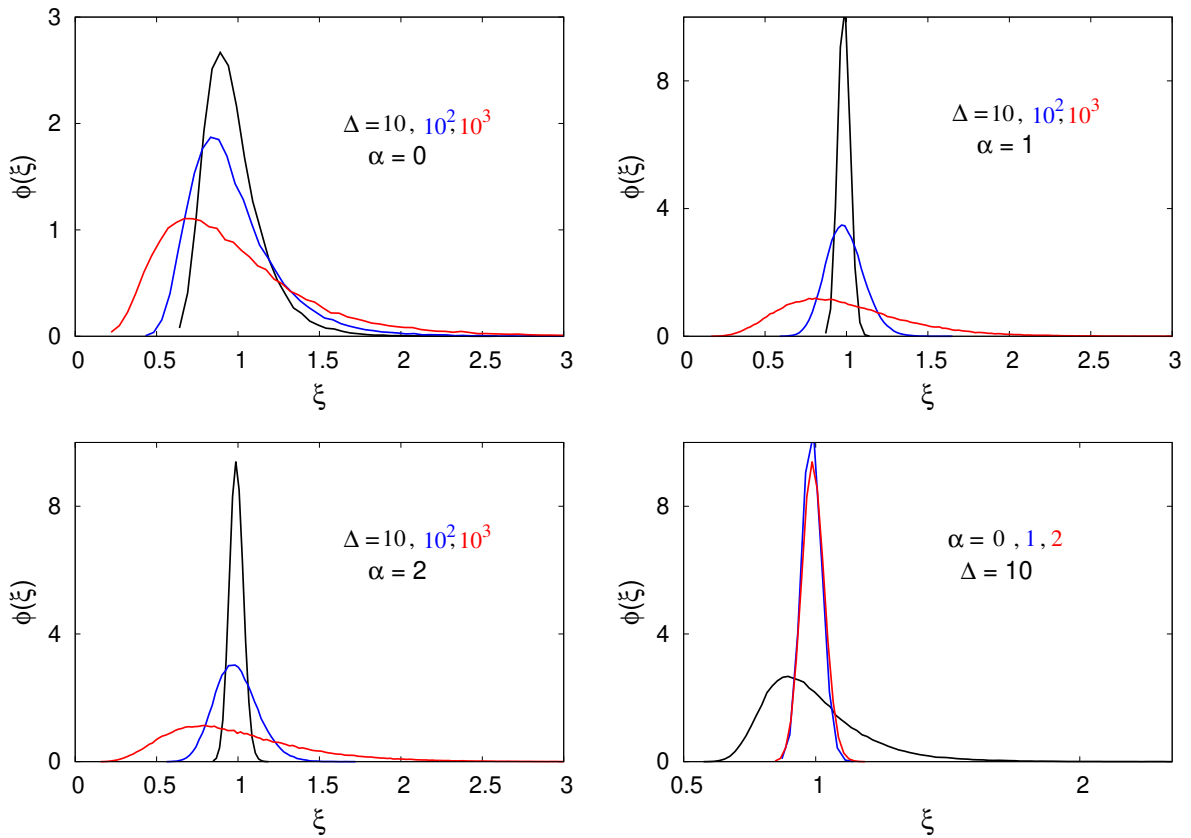
شکل ۴.۲: مقایسه میانگین زمانی و هنگردی MSD برای $\alpha = 1/2$ (چپ) و $\alpha = 3/2$ (راست) حاصل از شبیه‌سازی و نتیجه تحلیلی [۹۴]. MSD برای چندین مسیر مختلف نیز رسم شده است.

در شکل (۴.۲) نتایج شبیه‌سازی برای مسیرهای مختلف SBM برای دو حالت زیرپخش ($\alpha = 1/2$) و فراپخش ($\alpha = 3/2$) دیده می‌شود که توافق بسیار خوبی با نتیجه تحلیلی دارند. نکته دیگر در این‌جا پراکندگی بسیار ضعیف مسیرهای مجزا نسبت به یکدیگر و در نتیجه نسبت به مسیر میانگین است. این یک ویژگی با اهمیت است که برای تمییز دادن فرآیندها به کار می‌رود؛ به عنوان مثال، برای تشخیص FBM از $CTRW$ [۹۶، ۹۷].

پارامتر شکست ارگودیسیتی برای SBM همان‌طور که در بخش (۲.۱.۲) بیان شد، میانگین زمانی MSD برای مسیرهای مختلف با یکدیگر و با مقدار میانگین تفاوت دارند. در شکل (۴.۲) این انحرافات برای نمونه‌های حاصل از شبیه‌سازی برای SBM مشاهده می‌شوند. اطلاعات آماری پارامتر شکست ارگودیسیتی در شناخت مدل‌های مختلف پخش غیرعادی دارای اهمیت فراوانی است. برخلاف $CTRW$ این پارامتر برای SBM نیز همانند حرکت بروانی در حد $\Delta/t \rightarrow 0$ به صفر میل می‌کند. شکل (۳.۴) توزیع مربوط به نسبت میانگین‌های زمانی به مقدار میانگین آن‌ها را، $\frac{\overline{\delta^2(\Delta)}}{\langle \delta^2(\Delta) \rangle}$ ، برای فرآیند SBM نشان می‌دهد. می‌توان پهن‌شدگی بیشتر و برهم خوردن تقارن نسبت به حالا گاوسی را به‌ازای Δ ‌های بزرگ‌تر مشاهده نمود.

در محاسبه‌ی پارامتر شکست ارگودیسیتی برای SBM در صورت رابطه نیازمند یافتن مومنت چهارم میانگین زمانی هستیم،

$$\left\langle \left(\overline{\delta^2(\Delta)} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{t-\Delta} \int_0^{t-\Delta} dt_1 \int_0^{t-\Delta} dt_2 \left\langle (x^2(t_1 + \Delta) - x^2(t_1))^2 (x^2(t_2 + \Delta) - x^2(t_2))^2 \right\rangle. \quad (4.0.2)$$



شکل ۵.۲: توزیع $\phi(\xi)$ برای $\frac{\overline{\delta^2(\Delta)}}{\langle \delta^2(\Delta) \rangle}$ برای نمایهای مختلف. می‌توان مشاهده نمود که برای Δ های بزرگ‌تر توزیع پهن‌تر شده و تقارن این توزیع از بین می‌رود. برای α های بزرگ پهنای توزیع کاهش می‌یابد اما همچنان عدم تقارن توزیع مشاهده می‌شود. زمان مشاهده در این شکل $t = 10^4$ و تعداد نمونه‌های بکار رفته برای میانگین‌گیری $N = 10^3$ است [۹۵].

با به کار بردن قضیه ویک^۱ [۹۸] انتگرال ده در (۴۰.۲) را می توان به صورت،

$$\begin{aligned} & \langle (x(t_1 + \Delta) - x(t_1))^2 (x(t_2 + \Delta) - x(t_2))^2 \rangle = \\ & \langle (x(t_1 + \Delta) - x(t_1))^2 \rangle \langle (x(t_2 + \Delta) - x(t_2))^2 \rangle + 2 \langle (x(t_1 + \Delta) - x(t_1))(x(t_2 + \Delta) - x(t_2)) \rangle^2. \end{aligned} \quad (41.2)$$

نوشت. جمله اول در این عبارت معادل است با $\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle^2$ ؛ در نتیجه به رابطه ی زیر برای صورت عبارت مربوط به EB در (۱۹.۲) یعنی \mathcal{N} می رسیم،

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\Delta) &= \langle (\overline{\delta^2(\Delta)})^2 \rangle - \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle^2 \\ &= \frac{2}{(t - \Delta)^2} \int_0^{t-\Delta} dt_1 \int_0^{t-\Delta} dt_2 \langle (x(t_1 + \Delta) - x(t_1))(x(t_2 + \Delta) - x(t_2)) \rangle^2. \end{aligned} \quad (42.2)$$

و با استفاده از رابطه کواریانس برای SBM ، یعنی $\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = \langle x(\min[t_1, t_2]) \rangle^2$ خواهیم داشت،

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\Delta) &= \langle (\overline{\delta^2(\Delta)})^2 \rangle - \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle^2 \\ &= \frac{4}{(t - \Delta)^2} \int_0^{t-\Delta} dt_1 \int_{t_1}^{t-\Delta} dt_2 \langle (x(t_1 + \Delta) - x(t_1))(x(t_2 + \Delta) - x(t_2)) \rangle^2. \end{aligned} \quad (43.2)$$

دوباره با استفاده از عبارت کواریانس برای SBM و همچنین فرض $t_1 < t_2$ خواهیم داشت،

$$\mathcal{N}(\Delta) = \frac{4}{(t - \Delta)^2} \int_0^{t-\Delta} dt_1 \int_{t_1}^{t-\Delta} dt_2 \left[\langle (x^2(t_1 + \Delta)) \rangle - \langle x(t_1 + \Delta)x(t_2) \rangle \right]^2. \quad (44.2)$$

با اعمال تغییر متغیر $\tau' = t_2 - t_1$ ، به این عبارت برای \mathcal{N} خواهیم رسید،

$$\mathcal{N}(\Delta) = \frac{4}{(t - \Delta)^2} \int_0^{t-\Delta} dt_1 \int_0^{t-\Delta-t_1} d\tau' \left[\langle (x^2(t_1 + \Delta)) \rangle - \langle x(t_1 + \Delta)x(t_1 + \tau') \rangle \right]^2. \quad (45.2)$$

^۱ Wick-Isserlis Theorem

در این مرحله ترتیب دو انتگرال را جابجا می‌کنیم و بر اساس رابطه کوواریانس خواهیم داشت،

$$\mathcal{N}(\Delta) = \frac{\mathcal{F}}{(t-\Delta)^2} \int_0^\Delta d\tau' \int_0^{t-\Delta-\tau'} dt_1 \left[\langle x^2(t_1 + \Delta) \rangle - \langle x^2(t_1 + \tau') \rangle \right]^2. \quad (46.2)$$

حال متغیرهای جدید $x' = t_1/\Delta$ و $y' = \tau'/\Delta$ را معرفی می‌کنیم. برای مقدار داخل انتگرال می‌توان از رابطه‌ی میانگین هنگردی برای SBM یعنی $\langle x^2(t) \rangle = 2K_\alpha t^\alpha$ استفاده کرد. بدین ترتیب خواهیم داشت،

$$\mathcal{N}(\Delta) = \frac{16K_\alpha^2 \Delta^{2\alpha+2}}{(t-\Delta)^2} \int_0^1 dy' \int_0^{t/\Delta-1-y'} dx' \left[(x'+1)^{2\alpha} - 2(x'+1)^\alpha (x'+y')^\alpha + (x'+y')^{2\alpha} \right]. \quad (47.2)$$

جهت محاسبه‌ی انتگرال، ناحیه‌ی انتگرال‌گیری بر روی متغیر x' را به دو ناحیه‌ی مجزا تقسیم می‌کنیم،

$$\int_0^1 dy' \int_0^{t/\Delta-2} dx' + \int_0^1 dy' \int_{t/\Delta-2}^{t/\Delta-1-y'} dx' = \int_0^{t/\Delta-2} dx' \int_0^1 dy' + \int_{t/\Delta-2}^{t/\Delta-1} dx' \int_0^{t/\Delta-1-x'} dy'. \quad (48.2)$$

و نهایتاً عبارت موجود در صورت EB در رابطه‌ی (۱۹.۲) به این صورت حاصل می‌شود،

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\Delta, \tau) = \frac{16K_\alpha^2 \Delta^{2\alpha+2}}{(t-\Delta)^2} & \left[\frac{(\tau-1)^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} + \frac{(2\alpha+1)(\tau-1)^{2\alpha+2}}{2(\alpha+1)^2(2\alpha+1)} - \frac{2\tau^{\alpha+1}(\tau-1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\tau^{2\alpha+2}}{2(\alpha+1)(2\alpha+1)} - \frac{(2\alpha^2 + \alpha + 1)}{2(\alpha+1)^2(2\alpha+1)} + \frac{2}{\alpha+1} \int_0^{\tau-1} dx' (x')^{\alpha+1} (x'+1)^\alpha \right], \end{aligned} \quad (49.2)$$

انتگرال باقی‌مانده در این عبارت را می‌توان برحسب تابع بتای ناکامل بیان نمود،

$$I_1(\tau) = \int_0^{\tau-1} dx' (x')^{\alpha+1} (x'+1)^\alpha = (-1)^{-\alpha} B[-\tau+1, 2+\alpha, 1+\alpha]. \quad (50.2)$$

همچنین عبارت موجود در مخرج رابطه‌ی (۱۹.۲) در واقع مربع میانگین زمانی است که در رابطه‌ی (۱۷.۲) معرفی شد. از این رو به‌سادگی قابل محاسبه است که نتیجه به این صورت خواهد بود،

$$\mathcal{D}(\Delta, \tau) = \left[\frac{2K_\alpha \Delta^{\alpha+1}}{(\alpha+1)(t-\Delta)} (\tau^{\alpha+1} - 1 - (\tau-1)^{\alpha+1}) \right]^2 \quad (51.2)$$

اکنون عبارت حاصل برای پارامتر شکست ارگودیسیتی را در حالات حدی مختلف به ازای نماهای متفاوت مورد بررسی قرار می‌دهیم. به عنوان اولین مورد، EB به ازای $\alpha = 1$ و برای $1 \ll \Delta/t$ به سمت عبارت مربوط به حرکت بروانی (۲۰.۲) میل می‌کند و نشان می‌دهد که SBM همچون حرکت بروانی در این حد ارگودیک است.

بازه $0 < \alpha < 1/2$ نتیجه در این بازه، با استفاده از بسط زیر [۹۹]،

$$\int x^p(x+1)^q dx = \frac{x^{p+1}(x+1)^q}{p+q+1} + \frac{q}{p+q+1} \int x^p(x+1)^{q-1} dx, \quad (52.2)$$

از رابطه‌ی (۵۰.۲) در عبارت کلی حاصل برای EB به دست می‌آید. با سه مرتبه اعمال این عبارت بر انتگرال (۵۰.۲) از توان انتگرال ده کاسته می‌شود و در حد $\tau \rightarrow \infty$ انتگرال همگرا می‌شود. در نتیجه به عبارت دقیق زیر می‌رسیم،

$$I_1(\tau) = \frac{(\tau-1)^{\alpha+2}\tau^\alpha}{2(\alpha+1)} + \frac{\alpha(\tau-1)^{\alpha+2}\tau^{\alpha-1}}{2(\alpha+1)(2\alpha+1)} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\tau-1)^{\alpha+2}\tau^{\alpha-2}}{4\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{4\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)} \int_0^{\tau-1} (x')^{\alpha+1}(x'+1)^{\alpha-3} dx'. \quad (53.2)$$

در حد $1 \ll \Delta/t$ ، می‌توان حد بالای انتگرال را به سمت بی‌نهایت میل داد، $(\tau-1) \rightarrow \infty$ ، و انتگرال باقی‌مانده را برحسب تابع بتای کامل بیان نمود،

$$\int_0^\infty (x')^{\alpha+1}(x'+1)^{\alpha-3} dx' = B(\alpha+2, 1-2\alpha).$$

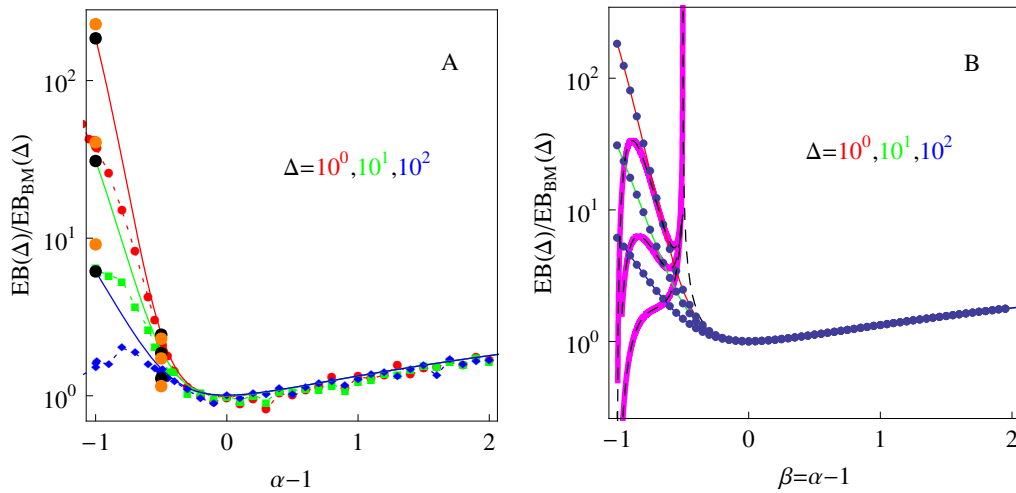
. بدین طریق به یک رابطه‌ی مقیاسی برای پارامتر شکست ارگودیسیتی،

$$EB(\alpha, \Delta) \approx 4C(\alpha)(\Delta/t)^{2\alpha}, \quad (54.2)$$

با ضرب،

$$C(\alpha) = \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)B(\alpha+2, 1-2\alpha) - (2\alpha^2 + \alpha + 1)}{2(\alpha+1)^2(2\alpha+1)}. \quad (55.2)$$

می‌رسیم. این رابطه‌ی مقیاسی برای (Δ/t) های نزدیک صفر و مقادیر $1/2, \alpha \neq 0$ برقرار است. طبق شکل (۶.۲) که نتایج تئوری و شبیه‌سازی را برای پارامتر شکست ارگودیسیتی نشان می‌دهد، می‌توان دید که در بازه $0 < \alpha < 1/2$ پارامتر



شکل ۶.۲: چپ) پارامتر شکست ارگودیستی برای SBM بر حسب α . نتایج حاصل از شبیه‌سازی توسط نقاط نشان داده شده است. خطوط کامل رنگی نتیجه تحلیلی حاصل از معادلات (۴۹.۲) و (۵۱.۲) هستند. رنگ‌های مختلف برای نمایش Δ های مختلف بکار رفته‌اند $10^0, 10^1, 10^2$. $\Delta = 10^0$ حالت $\alpha = 1/2$ و $\alpha = 0$ با دایر سیاه رنگ بزرگ‌تر نشان داده شده‌اند. بازه زمانی مشاهده $t = 10^4$ و تعداد مسیره‌های نمونه‌ی بکار رفته برای هر نما $N = 10^3$ است. راست) نتایج تحلیلی دقیق و حدی EB . منحنی‌های قرمز، سبز و آبی رنگ نشان دهنده‌ی حل دقیق رابطه (۴۹.۲) هستند. خط چین در ناحیه $\alpha < 1/2$ معادل است با نتیجه (۵۶.۲) و منحنی خط چین در ناحیه $0 < \alpha < 1/2$ نتایج حاصل از مرجع ([۹۳]) هستند. خطوط بنفش رنگ در بازه $1/2 < \alpha < 0$ طبق رابطه (۵۴.۲) برای زمان تاخیری ثابت رسم شده‌اند. نقاط مشکی بزرگ، از محاسبه انتگرال رابطه (۴۹.۲) با استفاده از متمتیکا، حاصل شده است [۹۵].

EB تابع حساسی نسبت به Δ است. و برخلاف حرکت بروانی، در این جا مقیاس جهان‌شمولی مانند Δ/t برای EB وجود ندارد.

بازه $\alpha > 1/2$ در این بازه و در حد Δ/t های کوچک، برای عبارت مربوط به مخرج EB در (۵۱.۲) خواهیم داشت $D(\tau) \sim 4\tau^{2\alpha}$ ؛ درحالی‌که عبارت مربوط به صورت، در حد τ بزرگ، با اعمال دو مرتبه رابطه‌ی (۵۲.۲) در (۵۳.۲) و بعد از حذف شدن اولین سه جمله به دست می‌آید $N(\tau) \sim 16\alpha^2 \tau^{2\alpha-1} / [3(2\alpha-1)]$. در نهایت برای EB داریم،

$$\lim_{\Delta/t \rightarrow 0} EB(\Delta) \approx \frac{4}{3} \frac{\alpha^2}{2\alpha-1} \frac{\Delta}{t}. \quad (56.2)$$

نزدیک $\alpha = 1/2$ باید با احتیاط عمل کرد، ابتدا باید بسط حول α انجام گیرد سپس حد $1 \gg \tau$ اعمال شود. رابطه (۵۶.۲) نشان می‌دهد که SBM همانند مورد حرکت بروانی نسبت به Δ/T خطی است اما با ضریبی وابسته به نمای α به صورت $\alpha^2/(2\alpha-1)$.

بازه $\alpha = 0$ جهت بررسی پارامتر EB در نمای $\alpha = 0$ که به عنوان "حرکت بروانی بازمقیاس شده‌ی به شدت آهسته"^۱ شناخته می‌شود [۱۰۰]، رابطه‌های (۴۹.۲) و (۵۱.۲) را با کمک $x^\alpha = e^{\alpha \log(x)}$ برای α های کوچک بسط می‌دهیم. در مورد انتگرال موجود در این رابطه که در (۵۰.۲) نشان داده شده است، ابتدا انتگرال ده را بر اساس توان‌های α بسط داده سپس انتگرال بر روی تابع حاصل را در بازه‌ی $\int_0^{t-\Delta} dt$ محاسبه می‌کنیم. در نتیجه، اولین دو جمله از مرتبه‌ی α ساده می‌شوند. با تقسیم کردن جملات با مرتبه‌ی α^2 در صورت و مخرج و بسط نتیجه‌ی حاصل در Δ های کوچک $\Delta/t \ll 1$ به عبارت زیر خواهیم رسید،

$$\lim_{\Delta/t \rightarrow 0} EB_{USBM}(\Delta) \approx \frac{4(\pi^2/6 - 1)}{(\log[t/\Delta] + 1)^2}. \quad (57.2)$$

مشاهده می‌شود که در این مورد EB بستگی لگاریتمی به Δ/t دارد که ناشی از بستگی مقیاسی MSD و میانگین زمانی MSD به زمان تاخیری و پخشی است.

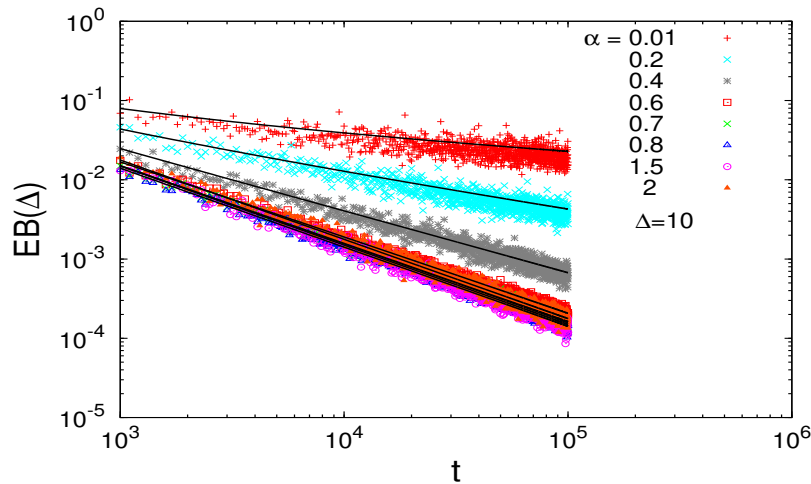
بازه $\alpha = 1/2$ حال به مورد $\alpha = 1/2$ می‌پردازیم. همانند حالت $\alpha = 0$ ، عبارات (۴۹.۲) و (۵۱.۲) را در نزدیکی $\alpha = 1/2$ بسط می‌دهیم. بدین منظور ابتدا انتگرال ده را بر اساس توان‌های $(\alpha - 1/2)$ بسط داده، سپس انتگرال تابع حاصل را بر بازه‌ی $[0, t - \Delta]$ محاسبه می‌نماییم. جملات غالب صورت و مخرج از مرتبه‌ی $(\alpha - 1/2)$ در حد $\Delta/t \rightarrow 0$ نتیجه‌ی،

$$\lim_{\Delta/t \rightarrow 0} EB_{\alpha=1/2}(\Delta) = \frac{\Delta}{3t} [\log(T/\Delta) + 2 \log(2) - 5/6]. \quad (58.2)$$

را دربردارند. مشاهده می‌شود که در مقایسه با حرکت بروانی، وابستگی لگاریتمی به Δ/t برای EB ظاهر می‌شود. با توجه به شکل الف در (۶.۲)، می‌توان دید که نتیجه‌ی (۵۸.۲) بسیار به مقادیر حاصل از رابطه (۴۹.۲) نزدیک هستند (نقاط بزرگ سیاه رنگ در $\alpha = 1/2$). برای مقادیر میانی Δ/t جملات ثابت موجود در نتیجه‌ی (۵۸.۲) نقش چشمگیرتری ایفا می‌کنند که در شکل الف در (۶.۲) مشاهده می‌شود.

شکل (۷.۲) رفتار مقیاسی حاصل از شبیه‌سازی EB را نسبت به زمان مشاهده برای نماهای $1/2 < \alpha < 0$ به صورت $1/t^{2\alpha}$ و برای نماهای $\alpha < 1/2$ به صورت $1/t$ نشان می‌دهد. خطوط سیاه رنگ نتایج حاصل از تئوری (۵۴.۲) و (۵۶.۲) هستند.

^۱ Ultraslow Scaled Brownian Motion



شکل ۷.۲: پارامتر EB برای SBM برحسب زمان مشاهده t . خطوط کامل نتایج تحلیلی معادله (۴۹.۲) و نقاط نتایج شبیه‌سازی را نمایش می‌دهند. پارامترها: $N = 10^3$ و $\Delta = 10$. [۹۵].

حرکت بروانی بازمقیاس شده مقید

از ویژگی‌های فیزیکی مهم یک فرآیند تصادفی، پاسخ آن به نیروهای خارجی یا فیدهای فضایی است. به عنوان مثال، حرکت ذرات بر روی بدنه سلول‌ها که محدودیت فضایی دارند یا وقتی حرکت ذرات با کمک انبرک‌های نوری ردیابی می‌شود، این انبرک یک نیروی بازگرداننده هوکی^۱ به ذرات وارد می‌کند. در این جا به بررسی اثر پتانسیل هارمونیک به عنوان یک نمونه مهم و کاربردی $V(x) \propto \frac{1}{2}kx^2$ (با k ثابت) می‌پردازیم. معادله دیفرانسیل تصادفی حاکم بر رفتار SBM مقید

$$\frac{dx(t)}{dt} = -kx(t) + \sqrt{2\alpha K_{\alpha}^* t^{\alpha-1}} \times \eta(t) \quad (59.2)$$

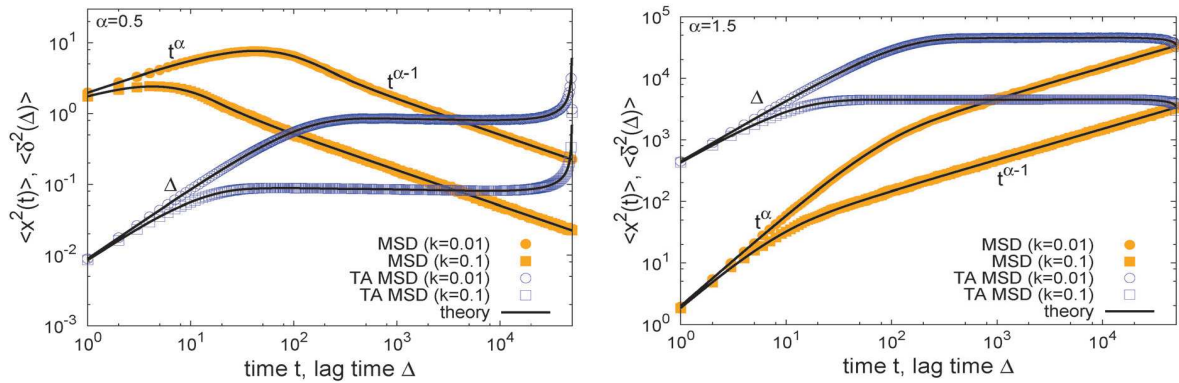
است. در این جا نیز $\eta(t)$ نوفه سفید گاوسی با میانگین صفر را نشان می‌دهد. کوواریانس در این حالت مقید با فرض $t_1 < t_2$ برحسب تابع کومر به دست می‌آید،

$$\langle x(t_1)x(t_2) \rangle = 2K_{\alpha}^* t_1^{\alpha} e^{-k(t_1+t_2)} M(\alpha, \alpha + 1, 2kt_1). \quad (60.2)$$

بر اساس این نتایج، میانگین هنگردی MSD برای حالت مقید به دست می‌آید،

$$\langle x^2(t) \rangle = 2K_{\alpha}^* t^{\alpha} e^{-2kt} M(\alpha, \alpha + 1, 2kt). \quad (61.2)$$

^۱ Hookean Restoring Force



شکل ۸.۲: میانگین زمانی و هنگردی MSD برای $\alpha = 1/2$ (چپ) و $\alpha = 3/2$ (راست) حاصل شبیه‌سازی و نتیجه تحلیلی برای SBM مقید تحت پتانسیل هارمونیک برای دو شدت مختلف از ثابت k [۹۴].

که طبق در بازه‌های زمانی کوچک $t \ll 1/k$ رفتار زیرپخش ذره آزاد را نشان می‌دهد و برای زمان‌های بلند رابطه مقیاسی،

$$\langle x^2(t) \rangle \sim \alpha K_\alpha^* k^{-1} t^{\alpha-1} \quad (۶۲.۲)$$

حاصل می‌شود. برای حالت زیرپخش ($0 < \alpha < 1$)، MSD به صورت توانی به صفر میل می‌کند، درحالی‌که برای فرایزش ($1 < \alpha < 2$) به صورت نامحدود رشد می‌کند.

اما میانگین زمانی MSD برای SBM در حالت مقید بر اساس توابع کومر به این صورت خواهد بود،

$$\begin{aligned} \langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle &= \frac{\Upsilon K_\alpha}{(1+\alpha)} (t-\Delta)^\alpha e^{-\Upsilon k(t-\Delta)} \times M(\alpha+1, \alpha+\Upsilon, \Upsilon k(t-\Delta)) \\ &+ \frac{\Upsilon K_\alpha}{(1+\alpha)(t-\Delta)} \left[t^{1+\alpha} e^{-\Upsilon kt} M(\alpha+1, \alpha+\Upsilon, \Upsilon kt) \right. \\ &\quad \left. - \Delta^{1+\alpha} e^{-\Upsilon k\Delta} M(\alpha+1, \alpha+\Upsilon, \Upsilon k\Delta) \right] \\ &- \frac{\Upsilon K_\alpha}{(1+\alpha)} (t-\Delta)^\alpha e^{-\Upsilon kt+k\Delta} \times M(\alpha+1, \alpha+\Upsilon, \Upsilon k(t-\Delta)) \end{aligned} \quad (۶۳.۲)$$

با استفاده از بسط تابع کومر برای مقادیر بزرگ،

$$M(\alpha, \alpha+1, z) \sim \alpha \frac{\exp(z)}{z}, \quad (۶۴.۲)$$

برای حد $\Delta \gg t$ نتیجه مرجع ([۹۴]) را به دست خواهیم آورد،

$$\langle \overline{\delta^2(\Delta)} \rangle \sim \frac{K_\alpha}{k} \left[\frac{t^\alpha - \Delta^\alpha}{t - \Delta} + (t - \Delta)^{\alpha-1} (1 - 2e^{-k\Delta}) \right]. \quad (۶۵.۲)$$

که یک ناحیه تخت را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که در فرآیند *SBM* حالت مقید، در حالیکه میانگین زمانی *MSD* رفتار توانی دارد، میانگین هنگردی به حالت اشباع می‌رسد و در نتیجه فرآیندی غیرارگودیک است. شکل (۸.۲) میانگین‌های هنگردی و زمانی *MSD* حاصل از نتایج تئوری و نیز شبیه‌سازی را نشان می‌دهد.

۳.۲ ول گشت زمان پیوسته

ول گشت زمان پیوسته همان‌طور که از نام آن پیداست، بر مبنای ایده ول گشت میکروسکوپی تعریف می‌شود. موقعیت مکانی ذره $X(n)$ مجموع طول گام‌های تصادفی است که به‌صورت یکنواخت و مستقل از یکدیگر توزیع شده‌اند $\delta X_n = X(n) - X(n-1)$ ، $n \geq 1$. تابع چگالی احتمال مشترک میان طول گام‌ها $\lambda(\delta x)$ است. نکته مهم در مطالعه حد مقیاسی، معرفی یک مقیاس زمانی میکروسکوپی τ است، و این نشان دهنده زمان مورد نیاز است تا اثر نوفه از مرتبه δX_n شود. اما در بسیاری از سیستم‌ها اثرات نوفه با یک نرخ ثابت و تعینی وارد نمی‌شود (به عنوان مثال برخورد با ملکول‌های حلال یا برخورد امواج منتشر شده با نقاط پراکننده‌ی دارای توزیع تصادفی).

CTRW مشخصاً برای توضیح تصادفی بودن این مقیاس زمانی طراحی شده است. در هر گام ول گشت، طول تصادفی گام δX_j یک زمان انتظار تصادفی δT_n به همراه دارد. این زمان‌های تصادفی خود توزیع یکنواخت و مستقلی دارند که از دل یک تابع چگالی احتمال مشترک $\psi(\delta t)$ بیرون می‌آیند. برای ول گشت‌های معمولی، مختصه زمانی از طریق رابطه تعینی $t = n\tau$ با تعداد گام‌ها در ارتباط است. در مقابل، برای *CTRW* زمان واقعی یا همان زمان مشاهده در آزمایشگاه که توسط آزمایشگر ثبت می‌شود، مجموع زمان انتظارهای تصادفی $T(n) = \sum_{j=1}^n \delta T_j$ است. باید دانست که تمایز اساسی میان این زمان $T(n)$ ، و تعداد گام‌ها $X(n)$ که با نام زمان درونی فرآیند تصادفی نیز شناخته می‌شود، وجود دارد.

درحالی‌که این مفهوم جدید تصادفی بودن مقیاس زمانی نوفه، در بسیاری موارد استفاده از رهیافت ول گشت را توجیه می‌نماید، اما تحلیل مساله را پیچیده می‌کند. اکنون سوال این است که آیا این یک دیدگاه ارزشمند است یا نه. به‌طور شهودی، انتظار بر این است که در زمان‌هایی به بلندی زمان انتظار میانگین $\langle \delta T_j \rangle$ ، افت و خیزهای حول میانگین بی‌اهمیت باشند. به عبارتی دیگر، نتیجه حدی *CTRW* معادل حد ول گشت معمولی با مقیاس ثابت $\tau = \langle \delta T_j \rangle$ است.

اما سوالی که برای یک آماری‌دان مطرح می‌شود، این است که چه می‌شود اگر $\langle \delta T_j \rangle$ بی‌نهایت شود؟ با وجود پیچیدگی‌های

موجود در یک سیستم نوفه‌ای نوعی، مشخص نیست که حد بالایی برای مقیاس زمان‌های واهلش وجود داشته باشد، یا این‌که بتوان یک مقیاس میانگین تعریف کرد حتی اگر این مقیاس در مقابله با مقیاس مشاهده کوچک باشد. چگالی احتمال زمان انتظار، برای مطالعه زمان انتظار میانگین بی‌نهایت، توابع با انتهای پهن^۱ هستند با رفتار مجانبی زیر برای $\delta t \gg \tau$,

$$\psi(\delta t) \sim B_\alpha \tau^\alpha (\delta t)^{-1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (۶۶.۲)$$

که در آن $B_\alpha = 1/|\Gamma(-\alpha)|$ و در باقی متن τ مقیاس زمانی میکروسکوپی نوعی است. تمام ممان‌های $\langle (\delta T_j)^q \rangle$ با $q \geq \alpha$ واگرا می‌شوند که این شامل مقدار میانگین نیز می‌شود. در ادامه به بررسی این دسته از فرآیندهای $CTRW$ و حدهای مقیاسی درگیر می‌پردازیم.

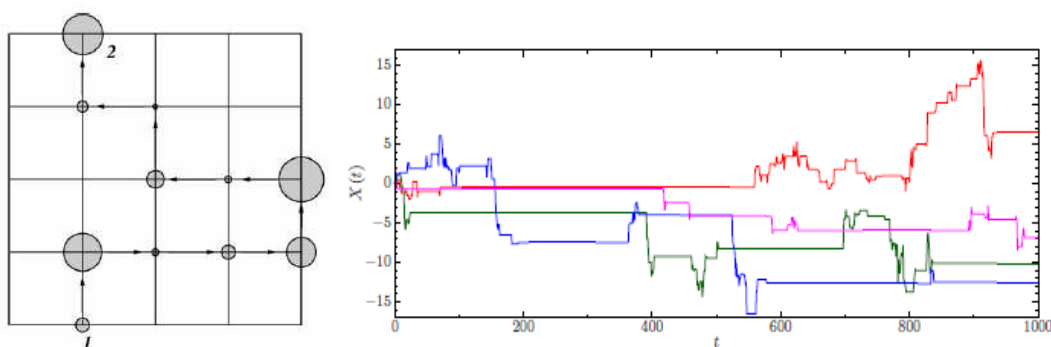
۱.۳.۲ پرواز در زمان

در این بخش مختصراً به جنبه پدیده‌شناختی $CTRW$ می‌پردازیم. برای این‌که مکانیزم ایجاد کننده مقیاس‌های زمانی دارای توزیع پهن را که انحراف از رفتار ولگشت متعارف را موجب می‌شود، به‌درستی دریابیم بهتر است ابتدا به مورد غیر این حالت توجه کنیم.

به عنوان یک مثال ساده، $\psi(\delta t)$ را چگالی احتمال زمان‌های انتظار δT_j با توزیع یکنواخت و مستقل در نظر می‌گیریم که هر دو مقدار میانگین $\tau = \langle \delta T_j \rangle$ و واریانس $\tau^2 = \langle (\delta T_j)^2 \rangle - \tau^2$ متناهی هستند. زمان‌های انتظار می‌توانند گسسته و غیرتصادفی باشد، یا پواسونی. از آن‌جا که زمان مشاهده در آزمایشگاه $T(n)$ مجموع متغیرهای تصادفی δT_j با توزیع یکنواخت و مستقل است، قضیه حد مرکزی برقرار است. بنابراین برای n های بزرگ توزیع $T(n)$ گاوسی خواهد بود. میانگین به‌صورت خطی با n افزایش می‌یابد، $\langle \delta T(n) \rangle = \tau n$. اما افت و خیزها حول میانگین، به‌صورت ریشه مجذور زمان $\sqrt{\langle T^2(n) \rangle - \tau^2 n^2} = \omega \sqrt{n}$ افزایش می‌یابد. در واقع در این مورد، افت و خیزها برای n بزرگ بی‌اثر می‌باشد و می‌توان از تقریب $T(n) = \tau n$ یا $\delta T_j = \tau$ استفاده کرد.

حال برمی‌گردیم به بررسی زمان انتظارهایی با توزیعی که انتهای پهن دارند به شکل (۶۶.۲) که خارج از محدوده اعتبار قضیه حد مرکزی است. زیرا متوسط و مقدار میانگین آن‌ها واگرا می‌شود و τ صرفاً یک مقیاس زمانی نوعی است. زمان انتظارهای δT_j باید محدود به مقادیر مثبت باشند. چنین متغیرهای تصادفی و نیز توزیع مربوط به آن‌ها کاملاً یا از یک

^۱ Heavy-Tailed



شکل ۹.۲: مسیر حرکت ذرات در ولگشت زمان پیوسته $CTRW$. حرکت پیوسته در فضای مکان، برای دوره‌هایی از زمان که از توزیع بی‌مقیاس پیروی می‌کنند، متوقف می‌شود. این شرایط، حرکت را نسبت به حالت ذره بروانی آهسته‌تر می‌کند. زمان‌های انتظار با توزیعی که انتهای پهن دارند، بنابراین در همه مقیاس‌های زمانی ظاهر می‌شوند؛ اما دویه‌دو مستقل هستند.

جهت $skewed$ ^۱ هستند. گندنکو^۲ و کولموگروف [۷۹] به بررسی متغیرهای تصادفی $skewed$ - با توزیع پهن پرداختند. پارامتر شبه‌پیوسته $s = n\tau$ جهت سنجش زمان داخلی برای فرآیند $T(s)$ در حالت حدی معرفی می‌شود. مشخص شد که حد مقیاسی ظاهر شده، یک حرکت لوی یک جهته پایای α است، $T(s) = L_{\alpha}^{+}(s)$ در ادامه پروازهای لوی با جزئیات بیشتر معرفی خواهند شد). یا به عبارتی دیگر، زمان مشاهده در فرآیند $CTRW$ پرواز لوی است در راستای مثبت.

پروازهای یک جهته‌ای که در این جا رخ می‌دهند، اشتراک‌های زیادی با مورد متقارن دارند. همان‌طور که از شکل (۹.۲) پیداست؛ درحالی‌که پروازهای لوی دارای جابجایی‌های بلند است، مسیرهای $CTRW$ با زمان انتظارهای طولانی مشخص می‌شوند.

۴.۲ معادله پخش برای ولگشت تصادفی زمان پیوسته

مدل ولگشت تصادفی زمان پیوسته $CTRW$ ، تعمیم ولگشت تصادفی منظم است. در مقابل مدل‌های قدیمی در $CTRW$ ، طول قدم‌ها x و زمان‌های انتظار t برای هر قدم از یکدیگر مستقل بوده و از تابع توزیع احتمال $\psi(x, t)$ پیروی می‌کند. در حالی که طول قدم‌ها و زمان انتظار مستقل از یکدیگر باشند ψ به این صورت جدا می‌شود: $\psi(x, t) = \lambda(x)w(t)$ و در غیر این صورت داریم $\psi(x, t) = p(x|t)w(t) = p(t|x)\lambda(x)$ ؛ به این معنا که برداشتن قدمی با طول مشخص، نیاز به زمان انتظار معینی دارد. رژیم‌های مختلف $CTRW$ بر اساس دو کمیت مشخصه‌ی زمان انتظار میانگین T و واریانس طول

^۱ one-sided or totally skewed

^۲ Gnedenko

قدمها \sum^2 تعیین می‌شوند. این دو کمیت به این صورت تعریف می‌شوند:

$$\lambda(x) = \int_0^{\infty} dt \psi(x, t) \quad (۶۷.۲)$$

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x, t).$$

برای مقادیر محدود این دو کمیت مشخصه، در حد زمان طولانی، قضیه حد مرکزی برقرار است و در نتیجه پخش عادی داریم. در ادامه چند امکان مختلف برای زمان مشخصه انتظار و واریانس طول قدمها را بررسی خواهیم کرد. فرآیند $CTRW$ را می‌توان از طریق شاه معادله‌ی زیر توصیف کرد [۱۰۴]،

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_0^{\infty} dt' \eta'(x', t') \psi(x - x', t - t') + \delta(x) \delta(t). \quad (۶۸.۲)$$

این رابطه تابع چگالی احتمال pdf رسیدن به مکان x در زمان t ، $\eta(x, t)$ ، را به احتمال رسیدن به مکان x' در زمان t' ، $\eta'(x', t')$ ، ارتباط می‌دهد. جمله دوم در این عبارت نشان دهنده شرایط اولیه است. در نتیجه تابع چگالی احتمال $W(x, t)$ برای بودن در مکان r در زمان t به این صورت خواهد بود:

$$W(r, t) = \int_0^t dt' \eta'(x, t') \Psi(t - t') \quad (۶۹.۲)$$

یا به عبارتی، احتمال رسیدن به x در زمان t' و حرکت نکردن از آن به بعد. که در این‌جا:

$$\Psi(t) = 1 - \int_0^t dt' w(t') \quad (۷۰.۲)$$

احتمال گام برداشتن در بازه‌ی زمانی $(0, t)$ است. در فضای لاپلاس- فوریه، pdf برای $W(x, t)$ از رابطه جبری زیر پیروی می‌کند [۱۰۴]،

$$W(k, u) = \frac{1 - w(u)}{u} \frac{W_0(k)}{1 - \psi(k, u)} \quad (۷۱.۲)$$

که $W_0(k)$ تبدیل فوریه مکان اولیه است.

۱.۴.۲ استراحت‌های طولانی

: معادله پخش کسری که زیرپخش را توصیف می‌کند اگر زمان مشخصه انتظار T واگرا، اما واریانس طول گام‌ها محدود شود، فرآیند مربوط ولگشت تصادفی زمان کسری خوانده می‌شود که با عنوان استراحت‌های طولانی^۱ ضریب پخش تعمیم یافته K_α در این جا به این صورت تعریف می‌شود $K_\alpha \equiv \sigma^2/\tau^\alpha$ که دارای بعد $cm^2 s^{-\alpha}$ است. فرم بسته جواب‌های معادله (؟؟) از طریق توابع فاکس نشان داده می‌شود [۱۱۵]:

$$W(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi K_\alpha t^\alpha}} H_{1,2}^{\alpha,0} \left[\frac{x^2}{4K_\alpha t^\alpha} \middle| \begin{matrix} (1-\alpha/2, \alpha) \\ (0, 1), (\frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \right] \quad (۸۵.۲)$$

در حد زمان‌های طولانی این تابع، کندتر از حالت پخش عادی میرا می‌شود. پس می‌بینیم که ذره در مسیر خود، با احتمال غیرصفر، زمان انتظارهای بسیار طولانی را تجربه خواهد کرد. این امر برای فرآیند مشاهده در بازه زمانی محدود در شبیه‌سازی‌ها، ایجاب می‌کند که ذره از لحاظ عملی در نقاطی به دام افتد. بنابراین هنگردی از ذرات در ولگشت تمایل به حالت‌های منجمدی دارند که ذرات زیادی در آن‌ها در حال سکون قرار دارند. به بیان ریاضی، $CTRW$ رشد غیرایستا دارد و فرآیند پیری نشان می‌دهد، در واقع نتیجه یک اندازه‌گیری به زمان انجام آن بستگی دارد. $CTRW$ شکست ضعیف ارگودیسیتی را نشان می‌دهد. به این معنا که میانگین زمانی و هنگردی کمیت‌ها همانند مربع جابجایی رفتار متفاوتی بروز می‌دهند: اگر مجموعه‌ای از مسیرهای $CTRW$ مورد بررسی قرار گیرد، درمی‌یابیم که میانگین زمانی واریانس طول گام‌ها با زمان به صورت خطی تغییر می‌کند در صورتی که میانگین هنگردی آن رفتار مقیاسی غیرخطی با زمان دارد. ضریب پخش حاصل از مورد اول، در میان هنگرد مسیرها، متغیری تصادفی است. در حالت کلی، در سیستم‌های دارای شکست ضعیف ارگودیسیتی، میانگین زمانی کمیت‌ها توزیع پهنی را حول میانگین هنگردی آن‌ها نشان می‌دهند.

۲.۴.۲ قدم‌های بلند: پروازهای لوی

در مقابل حالت قبلی، شرایطی وجود دارد که زمان مشخصه انتظار T محدود می‌باشد که از توزیع پواسونی پیروی می‌کند و واریانس طول قدم‌ها واگرا می‌شود که با استفاده از توزیع لوی مدل می‌شود و با عنوان پروازهای لوی شناخته می‌شود^۲، یا به عبارتی:

$$\lambda(k) = \exp(-\sigma^\mu |k|^\mu) \sim 1 - \sigma^\mu |k|^\mu. \quad (۸۶.۲)$$

^۲ Levy Flights



شکل ۱۰.۲: مقایسه مسیر در حرکت براونی (چپ) و گشت لوی با شاخص $\mu = 1/5$. در حالی که هر دو مسیر از نظر آماری خود متشابه هستند، مسیر گشت لوی دارای بعد فراکتالی است، خوشه‌های شکل گرفته با گام‌های کوتاه را توسط قدم‌های بلند به یکدیگر متصل می‌کند.

برای $1 < \mu < 2$ ، در حد $|x| \gg \sigma$ رفتار مجانبی به این صورت

$$\lambda(x) = A_\mu \sigma^{-\mu} |x|^{-1-\mu}. \quad (۸۷.۲)$$

نشان می‌دهد. به دلیل محدود بودن T ، فرآیند مارکوفی است. با قرار دادن (۸۶.۲) در (۷۱.۲)، انتشارگر در فضای لاپلاس فوریه به دست می‌آید که با اعمال عکس تبدیل لاپلاس و فوریه در این رابطه، معادله دیفرانسیل کسری زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = K_{-\infty}^\mu D_x^\mu W(x, t) \quad (۸۸.۲)$$

عملگر مشتق کسری وایل $-_\infty D_x^\mu$ در فصل بعد معرفی می‌شود. ثابت پخش تعمیم یافته در این مورد برابر است با: $K^\mu \equiv \sigma^\mu / \tau$ که بعد $[K_\alpha] = cm^\alpha s^{-1}$ دارد. با تبدیل فوریه، انتشارگر را به دست می‌آوریم:

$$W(k, t) = \exp(-K^\mu t |k|^\mu) \quad (۸۹.۲)$$

نتیجه حاصل، تابع مشخصه توزیع متقارن و مرکزی لوی است و برای مدل کردن پروازهای لوی به کار می‌رود. در شکل (۲.۴.۲) مسیر یک ذره در ولگشت تصادفی (سمت چپ) با گام‌های محدود در مقایسه با پرواز لوی با همان تعداد گام نشان داده شده است. در پرواز لوی، به دلیل خصلت مجانبی تابع توزیع احتمال طول قدم‌ها، گام‌های بلند می‌توانند با احتمال بیشتری نسبت به حالت تابع توزیع گاوسی رخ دهند. خصلت مقیاسی pdf طول قدم‌ها، که در (۸۷.۲) دیده می‌شود، باعث

ویژگی خوشگی^۱ در پرواز لوی می شود. به عبارتی دیگر حرکت های موضعی توسط گام های بلند با همه مقیاس های طولی قطع می شوند؛ در حقیقت می توان به مسیر پروازهای لوی بعد فراکتالی $df = \mu$ [۱۱۶، ۱۱۷] نسبت داد. در مقابل مسیر سمت چپ با $\sum^2 < \infty$ ، تمام فضای دو بعدی را کاملا پر می کند و همه گام ها تقریباً در یک مرتبه قرار دارند. با استفاده از توابع فاکس، می توان به صورت تحلیلی جواب های معادله دیفرانسیل کسری (۸۸.۲) را به دست آورد [۱۱۸، ۱۱۹]:

$$W(x, t) = \frac{1}{\mu|x|} H_{\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}} \left[\frac{|x|}{(K\mu t)^{1/\mu}} \left| \begin{matrix} (1, 1/\mu), (1, \frac{1}{\mu}) \\ (1, 1), (1, \frac{1}{\mu}) \end{matrix} \right. \right] \quad (90.2)$$

این فرم بسته نمایش قانون پایدار لوی است و در حد $\mu \rightarrow 2$ پاسخ های کلاسیک گاوسی حاصل می شود. همان طور که از (۹۰.۲) انتظار می رود، رفتار مجانبی توانی نوعی پروازهای لوی استنباط می شود [۱۲۰، ۱۲۱]:

$$W(r, t) \sim \frac{K\mu t}{|x|^{1+\mu}} \quad , \mu < 2 \quad (91.2)$$

به دلیل وجود این ویژگی، میانگین مربع جابجایی ها واگرا می شود:

$$\langle x^2(t) \rangle \rightarrow \infty. \quad (92.2)$$

این نتیجه برای سیستم های فیزیکی که ذرات جرم دار هستند، مشکل ساز است، چراکه برای این ذرات سرعت انتشار محدودی وجود دارد که گام های نامتناهی آنی را غیرممکن می سازد.

^۱ Clustering Nature

۳.۴.۲ رقابت میان استراحت‌های طولانی و گام‌های بلند

همان‌طور که اشاره شد، در مورد قبلی با مشکل واگرا شدن واریانس طول قدم‌ها مواجه شدیم. یک راه برخورد با این مساله محاسبه پهنای pdf برای $W(x, t)$ به جای واریانس آن است؛ رویکرد دیگر استفاده از این تعریف است [۱۲۱]:

$$\langle x^\nu(t) \rangle_L \sim \int_{L_1 t^{1/\mu}}^{L_2 t^{1/\mu}} dx x^\nu W(x, t) \sim t^{\nu/\mu} \quad (۹۳.۲)$$

که بر طبق آن ذره در یک جعبه فرضی در حال گسترش در نظر گرفته می‌شود و این منجر به رفتار $t^{\nu/\mu} \sim$ می‌شود. در (۹۳.۲) قطع‌های^۱ انتگرال وابسته به زمان هستند. دیواره‌های جعبه بازه‌ی

$$\Delta(t) = (L_1 - L_2)^{1/\mu} \quad (۹۴.۲)$$

را پوشش می‌دهند که با زمان افزایش می‌یابد. مقدار محدودی از احتمال در این ناحیه قرار گرفته است. با این فرض می‌توان ولگشتی را تصور کرد که زمان انتظار و طول قدم‌های آن از تابع توزیع‌های بلند برد پیروی می‌کنند و T و \sum^2 هر دو واگرا می‌شوند و به معادله دیفرانسیل کسری زیر می‌رسیم:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D_t^{1-\alpha} K_\alpha^\mu \nabla^\mu W(x, t). \quad (۹۵.۲)$$

با ثابت پخش $K_\alpha^\mu \equiv \sigma^\mu / \tau^\alpha$. در این رابطه ∇^μ عملگر کسری ریز است که معرفی می‌شود. این بار کمیت $\langle x^\nu(t) \rangle_L$ را تعریف می‌کنیم که میانگین مربع جابجایی مجازی نامیده می‌شود و این‌گونه رفتار زمانی نشان می‌دهد:

$$\langle x^\nu(t) \rangle_L \sim t^{\nu\alpha/\mu} \quad (۹۶.۲)$$

که با توجه به مقادیر α و μ زیرپخش یا فراپخش رخ می‌دهد.

^۱ Cut-Offs