

فصل اول

مدل‌سازی‌های تصادفی پدیده پخش

۱.۱ ول‌گشت

در سال ۱۹۰۵، نامه‌ای از ریاضیدان انگلیسی پیرسون^۱ در نیچر^۲ چاپ شد که در آن مساله "ول‌گشت" را برای مخاطبان مطرح نمود [۱]: "شخصی از نقطه O شروع به حرکت نموده و مسیر مستقیمی به طول l را می‌پیماید؛ سپس، به اندازه‌ای دلخواه چرخیده و دوباره مسافت l بر خط مستقیم را طی می‌کند. و این کار را n مرتبه تکرار می‌کند. حال به دنبال این احتمال هستیم که این فرد بعد از n گام، در فاصله بین r و $r + dr$ از مکان اولیه‌اش باشد.

این مساله بسیار جالبی است که من فقط توانستم جواب بسته‌ی آن را برای مورد دو قدم پیدا کنم و فکر می‌کنم که تنها بتوان جوابی برای آن به صورت سری توانی بر حسب $1/n$ یافت، که در آن n بسیار بزرگ است."

بنابراین، مساله ول‌گشت اولین بار توسط پیرسون و در قالب یک آزمایش ذهنی به جامعه فیزیک معرفی شد. نخستین کاربردی که به ذهن او رسید، مساله مهاجرت کاتوره‌ای بود. در پی همکاری با ولدون^۳ جانورشناس، او به بررسی مساله هجوم حشرات در جنگل علاقه‌مند شد [۲].

اما مفهوم تئوریک مساله کاربردهای فراوانی پیدا کرد و برای مدل‌سازی پدیده‌های بسیاری در شاخه‌های علمی مختلف

^۱ Karl Pearson

^۲ Nature

^۳ Walter F. R. Weldon

به کار گرفته شد. پاسخ مورد علاقه برای حد n های بزرگ توسط رایلی^۱ به دست آمد. او تشابه این مساله را با موضوعی از یک حوزه به ظاهر متفاوت به دست آورد. در مطالعاتش در زمینه آکوستیک، برهم نهی امواج صوتی $x_j(t)$ با فرکانس ω و دامنه مشترک a اما فاز متفاوت ϕ_j ، را در نظر گرفت [۳]. فرض می کنیم که $x_j(t) = \text{Re}[z_j e^{i\omega t}]$ نشان دهنده تحول زمانی یک موج باشد که در آن عدد مختلط $z_j(t) = a e^{i\phi_j}$ در بردارنده دامنه و انتقال فاز است. جمع بستن n موج مستقل یک سیگنال تولید می کند $X_n(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t) = \text{Re}[Z_n e^{i\omega t}]$ با $Z_n = \sum_{j=1}^n z_j = A_n e^{i\phi_n}$. اگر ϕ_j ها توزیع کاتوره ای یکنواخت داشته و مستقل باشند، آن گاه Z_n دقیقاً همان ولگشت پیرسون است در صفحه مختلط z . دامنه تک موج a معادل است با طول گام l ، فازهای کاتوره ای نشان دهنده زوایای کاتوره ای حرکت هستند و دامنه موج حاصل A_n فاصله r از مبدا، بعد از n حرکت است. رایلی قادر بود تا نتایج حدی را به دست آورد و یک هفته بعد از مطرح شدن مساله از سوی پیرسون چنین پاسخ داد: ” اگر n بسیار بزرگ باشد، این احتمال باید به این شکل باشد،

$$\frac{2}{n} \exp\left(-\frac{r^2}{n}\right) r dr. \quad (1.1)$$

در ادامه، ایده های مشابهی در تحلیل امواج با منشا فیزیکی متفاوت، از جمله سیگنال های الکتریکی نوسانی [۴]، پرتو لیزر همدوس [۵-۸] و پراکندگی امواج رادارها از سطوح زبر هواپیماها [۹]، وارد شد. همچنین در مواردی تصحیحات لازم بر این مدل انجام شد مانند جایگزین کردن طول ثابت گامها l با مقداری کاتوره ای برای توضیح دادن تابش میکروموجها از سطح دریا [۱۰]. همچنین، برای افزایش دقت رابطه (۱.۱) بر حسب سری توانی در n های بزرگ تلاش هایی صورت گرفت [۱۱].

در زیست شناسی نیز کاربردهای فراوانی وجود داشت. به عنوان مثال، برخی از باکتریها از تاژک^۲ برای حرکت میان محیط سیال استفاده می کنند. مشاهده شد که حرکت آنها به صورت تکه ای بر خط مستقیم است [۱۲] و می توان آنرا به عنوان ولگشت سه بعدی یا پروازهای کاتوره ای با طول پرش کاتوره ای مطالعه کرد. وقتی که گرادیان دمایی یا شیمیایی بر فرآیند حاکم باشد، زوایای چرخش نیز ثابت نخواهند بود. همچنین تصحیحات و تعمیم هایی بر مدل صورت گرفت تا بتواند استراتژی جستجوی غذای پرندگان را توضیح دهد [۱۳-۱۶].

اما فاصله r از مبدا همواره کمیت مورد علاقه نیست. زنجیره ایده آل^۳ ساده ترین مدل توصیف پلیمرهای طبیعی و مصنوعی

^۱ John William Strutt, Lord Rayleigh

^۲ Flagella

^۳ Ideal Chain

است [۱۷، ۱۸]. پلیمر رشته ملکولی بلندی است که از تعداد زیادی اجزای همانند و هم‌خط به نام مونومر^۱ تشکیل شده است. مدل زنجیره ایده‌آل فرض می‌کند که مونومرها اجسام صلب خطی شکلی هستند. اتصال بین اجزا به گونه‌ای است که اجازه چرخش آزاد را می‌دهد. بنابراین، تشکیل یک زنجیره از n مونومر معادل است با یک تک پرواز کاتوره‌ای حاصل از n پرواز به طول l . وقتی پلیمر در یک محلول قرار می‌گیرد، فاصله دو انتها، r ، دارای اهمیت نمی‌باشد. بلکه کمیت مهم شعاع ژیراسیون^۲ یا همان ریشه میانگین مربع^۳ فاصله هر اتصال از مرکز جرم است. نشان داده شد که ول‌گشت مدل بسیار مناسبی برای توضیح شکل‌گیری پلیمرهاست [۱۹].

۲.۱ تئوری احتمال در فیزیک، فراتر از تخمین خطا

از لحاظ ریاضی، ایده ول‌گشت دقیقاً توسط پیرسون خلق نشد. به‌دور از هرگونه کاربرد در جهان واقعی، جمع بردارهای کاتوره‌ای دو بعدی با توزیع یکسان و مستقل قبل از او توسط شولز^۴ مورد مطالعه قرار گرفت [۲۰]. بردارهای کاتوره‌ای را می‌توان طول گام‌های جهت‌دار قلمداد کرد. حداقل، حالت یک بعدی اش، به‌صورت گسترده در تئوری احتمال، که به بازی‌های شانس^۵ مربوط است، بررسی شده و می‌شود [۲۱]. گام‌های کاتوره‌ای که در یک بعد به عقب و جلو می‌روند، معادلند با برد و باخت در طی بازی. این تشابهات از دیدگاه امروزی واضح به نظر می‌رسد؛ اما در آغاز قرن بیستم، شاخه کاربردی تئوری احتمال خیلی گسترده نبود. در آن دوران افراد در رشته‌های مختلف جامعه‌ی علمی خیلی همکاری نزدیک نداشتند و این طبیعی بود که دانشمندان بی‌اطلاع از هم و به‌صورت موازی روی موضوعات یکسان کار کنند. به‌طوری که حتی نمی‌توان انتظار داشت پیرسون از اطلاعات مربوط به این زمینه در رساله دکتری در رشته اقتصاد مطلع بوده باشد؛ کار ریاضیدان فرانسوی، بچلیر^۶ در ۱۹۰۰. همین‌طور هم‌دوره‌ای هایش اینشتین^۷، رایلی و اسملوکوفسکی^۸ وضعیت مشابهی داشتند. چندین نکته مطرح شده در این رساله می‌توانست برای همه آن‌ها جالب توجه باشد. او در این کار، نوسان‌های بازار سهام فرانسه را با استفاده از شکل ساده (یک بعدی) ول‌گشت (بدون به‌کار بردن این نام) مدل‌سازی کرد. او حتی

^۱ Monomer

^۲ Radius of Gyration

^۳ Root Mean Squared

^۴ Ch.M. Schols

^۵ Games of Chance

^۶ Bachelier

^۷ Einstein

^۸ Marian Smoluchowski

استدلال‌های احتمالاتی را بیان کرد تا نشان دهد که آمار این فرآیند در زمان‌های بلند، با استفاده از معادله پخش^۱ (که پنج سال بعد توسط اینشتین و اسملوکوفسکی به دست آمد) توصیف می‌شود و پاسخ گاوسی را ارائه کرد.

در حیطه‌ی تئوری ول‌گشت، باید اعتبار معرفی مدل احتمالات به جامعه فیزیک را به پیرسون داد، جامعه‌ای که چندان رغبتی نیز به این مدل نداشت. پیرسون و رایلی سهم بسزایی در پیشبرد روش‌های احتمالاتی جهت توصیف پدیده‌های ذاتا تعینی داشتند. بنیان آنچه امروز به عنوان فیزیک آماری می‌شناسیم، بازمی‌گردد به فعالیت افرادی چون ماکسول^۲، بولتزمن^۳، گیبس^۴ و دیگر افراد تا ۱۸۶۰. اما تئوری فیزیکی که آن‌ها بدنالش بودند، تئوری جنبشی گرما، هنوز راه زیادی تا تکامل نهایی داشت و مورد بحث بود. انتقادهای وارد بر آن تنها ریشه فیزیکی نداشت، بلکه گاه ایرادهای فلسفی بر آن وارد می‌شد. از یک جهت، برخی دیدگاه‌های اثبات‌گرایانه^۵ سعی داشتند تا در درجه اول پیشنهاد وجود ملکول و اتم را رد کنند. در زمانی که تئوری موفق ترمودینامیک بر پایه یک سری فرض‌های بدیهی استوار بود، تلاش برای اثبات چیزی که حتی دیده نمی‌شود و ویژگی‌های آن قابل اندازه‌گیری نیستند، لزومی نداشت. از سویی دیگر، بعضی با دیدگاه آماری برای مسایل قطعی و تعینی فیزیک مشکل داشتند. از دیدگاه فیزیکدان‌ها جایگاه تئوری احتمالات در فیزیک، تنها تخمین خطا بود که ماکسول از آن برای ساختن معادلات اولیه‌اش استفاده کرد.

کشفیات شروع قرن ۱۹ام، دیدگاه علمی و فلسفی فیزیکدان‌ها را تغییر داد. نیازها برای پیدا کردن ابزارهای پیشرفته آماری و بنیان‌های ریاضی با ظهور مکانیک کوانتومی، اقتصاد محاسباتی و نیز شکل‌گیری تئوری اتمی و جنبشی گرمایی، گسترش یافت.

۳.۱ ملکول‌ها و گرما: احتمال وجود رابطه میان آن‌ها

فرض اولیه تئوری جنبشی گرمایی این است که ماده پیوسته نیست، بلکه تشکیل شده است از ذرات بسیار ریزی که مدام در حال حرکت تهییجی^۶ هستند. ویژگی‌های ماکروسکوپیک ماده به عنوان اثر جمعی دینامیک میکروسکوپیک این ذرات شناخته می‌شود: فشار وارد بر دیواره‌ی احاطه کننده، ناشی از بمباران دیوار توسط ذرات است و هرگونه انتقال گرمایی در

^۱ Diffusion Equation

^۲ Maxwell

^۳ Boltzmann

^۴ Josiah Gibbs

^۵ Positivist Attitude

^۶ Agitated Motion

واقع انتقال انرژی جنبشی است؛ که به علت برخورد یا ترکیب ذرات آزاد می‌شود. به این ترتیب، تئوری جنبشی با رهیافت‌های دیگر در این زمینه در رقابت است. رهیافت‌هایی نظیر تئوری کالوریک گرما^۱ که پیشنهاد می‌کند، گرما با استفاده از سیالی شناور از جسم گرم به جسم سرد منتقل می‌شود. و البته در این زمان، هنوز تئوری اتر در انتقال امواج الکترومغناطیسی^۲ کاملاً کنار گذاشته نشده بود. با شروع قرن ۱۹م، وجود اتم‌ها و ملکول‌ها نشان داده شد. مطالعات زیادی در فیزیک و شیمی از جمله کارهای بویل^۳، لوساک^۴، دالتون^۵ و آووگادرو^۶ نشان دادند که هر ماده تشکیل شده است از تعداد صحیحی از ملکول‌ها و این تعداد تعریف کننده‌ی ویژگی اصلی هر ماده است. این ملکول‌ها خود از اتم‌های غیرمرئی تشکیل شده‌اند و هر نوع گذار شیمیایی میان مواد، نیازمند تجزیه یا ترکیب اتم‌ها برای تشکیل ملکول‌های جدید است.

اما این که انرژی دقیقاً به شکلی ذخیره و میان ملکول‌ها توزیع شده است، و چگونه با یکدیگر برهمکنش دارند و حتی این که اندازه و جرم آن‌ها چقدر است، مشخص نبود. تا حدی، تئوری اتمی با ایده کالوریک سازگار بود، یعنی پر کردن فضای بین ملکول‌ها به عنوان ابزاری برای انتقال انرژی، و بنابراین گرما میان آن‌ها. تئوری جنبشی برای گاز ایده‌آل که توسط ماکسول و بولتزمن شکل گرفت و گسترش یافت^۷، فرض‌های دقیقی درباره ذات و دینامیک ملکول‌ها در نظر گرفت: اول این که اندازه آن‌ها در مقایسه با فاصله بینشان بسیار کوچک است؛ برهمکنش میان خود ملکول‌ها و برهمکنش میان ملکول‌ها و دیواره‌ی احاطه کننده آبی است؛ برخوردها کشسان هستند؛ به غیر از لحظه برخورد، برهمکنش میان ملکول‌ها قابل چشم‌پوشی است. به علت حضور تعداد بسیار زیادی از ملکول‌ها در یک حجم میکروسکوپی از گاز، می‌توان دینامیک آن‌ها را به صورت آماری بررسی کرد (که تعبیر آماری تعادل ترمودینامیکی^۸، قضیه همپاری^۹ و قانون دوم ترمودینامیک^{۱۰} را ایجاب می‌کند). قطعاً بدون نتایج آزمایشگاهی دقیق، توجیه این فرض‌های ریز دشوار خواهد بود.

مشاهدات نزدیک در این زمینه در کار گیاه‌شناس اسکاتلندی، بروان^{۱۱} در سال ۱۸۲۸ [۲۲] انجام شد. وی گرده‌های گل معلق در آب را با استفاده از میکروسکوپ مطالعه می‌کرد. در این مطالعات، ذرات کم تعدادی را مشاهده نمود که با خارج

^۱ Caloric Theory of Heat

^۲ Aether Transmitting Electromagnetic Waves

^۳ Robert Boyle

^۴ Joseph Gay-Lussac

^۵ John Dalton

^۶ Amedeo Avogadro

^۷ Maxwell and Boltzmann's Idea of a Kinetic Theory

^۸ Thermodynamic Equilibrium

^۹ Equipartition Theorem

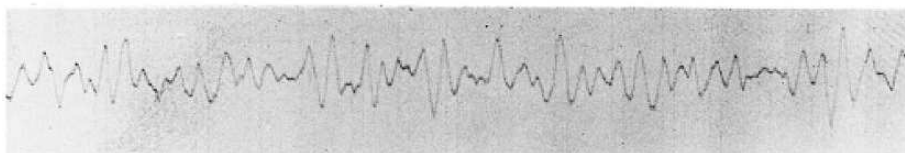
^{۱۰} Second Law of Thermodynamics

^{۱۱} Robert Brown



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).
 Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-8}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $1 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $dx = 1$ mm. a) Atmosphärendruck. Temperatur 13° C

Fig. 5a



Registrieraufnahme der Brownschen Bewegung (natürliche Größe).
 Direktionskraft $9,428 \cdot 10^{-8}$ abs. Einh. Trägheitsmoment $1 \cdot 10^{-7}$ abs. Einh. Abstand Spiegel-Kamera: 72,1 cm.
 Zeitmarke: 30 sec $dx = 1$ mm. b) $1 \cdot 10^{-8}$ mm Hg. Temperatur 13° C

Fig. 5b

شکل ۱.۱: مسیر حرکت بروانی برای یک آینه کوچک که از طریق یک رشته نخ کوارتز معلق مانده است. چرخش‌های نامنظم آینه با دنبال کردن پرتو بازتابیده از آن حاصل می‌شود. این اطلاعات بسیار دقیق، به کاپلر اجازه‌ی پیدا کردن عدد آووگادرو را داد. از آن‌جا که رشته نخ بر آینه گشتاور پیچشی وارد می‌کند، حرکت حاصل، حرکت بروانی هارمونیک محدود است. در این دو نمونه ارائه شده، تنها فشار متفاوت است. در هر دو مورد حرکت میرا است.

شدن از داخل گرده‌ها شروع به حرکتی اعوجاجی می‌کردند. رفتار مشابهی در ۱۷۸۵ توسط فیزیکدان هلندی، ایگنهاووز^۱ برای ذرات ذغال‌سنگ بر سطح الکل گزارش شده بود. او نشان داد که چنین رفتاری منحصر به گیاهان نیست. مقدار کمی از ماده غیر ارگانیک در این مایع نیز همان نوع حرکت را داشت. بدین ترتیب، جاندار بودن عامل حرکت منتفی شد. در ادامه آزمایش‌های مختلف همچنان انجام شد، و افراد زیادی در این حیطه فعالیت نمودند، از جمله وینر^۲ ۱۸۳۶ [۲۳] و گوی^۳ ۱۸۸۸. صرف‌نظر از مدت مشاهده، دمای مایع، شدت نور تابیده، طول موج و میزان عایق‌بندی جهت جلوگیری از نوفه، این نوع حرکت نامنظم دیده می‌شد. نمونه‌ای از حرکت بروانی که حدود صد سال پس از کشف اولیه‌ی بروان در آزمایشگاه توسط کاپلر^۴ مشاهده شد [۲۴] را می‌توان در شکل (۱.۱) دید.

^۵ این کشفیات پیش‌زمینه‌ی بررسی و مطالعه‌ی حرکت بروانی (نامی که بعداً توسط اینشتین به این رفتار اطلاق شد) در قالب تئوری جنبشی را فراهم آورد. ملکول‌های آب بسیار کوچک‌تر از آن هستند که بتوان آن‌ها را به‌صورت جداگانه ردیابی کرد؛

^۱ Jan Ingenhousz

^۲ Christian Wiener

^۳ Louis Georges Gouy

^۴ Eugen Kappler

^۵ از لحاظ تاریخی این‌که این پدیده حرکت بروانی نامیده شد را می‌توان حاصل شانس بروان دانست. اینشتین که این تئوری را بنا نهاد، در دفتر خود به‌دور از دیگران به فعالیت می‌پرداخت و اطلاعی از کار ایگنهاووز نداشت و نام بروان را انتخاب نمود. هرچند که حتی به کارهای اصلی بروان نیز دسترسی نداشت.

بنابراین در میکروسکوپ، به شکل سیالی پیوسته ظاهر می‌شوند. اما ذره‌ی وارد شده در آب از مرتبه‌ی میکرون، به اندازه کافی بزرگ است که قابل تشخیص باشد و در عین حال آن قدر کوچک است که برخوردهای آن با ذرات سیال پیرامونش مشاهده شود. چنین توضیحاتی اگرچه قانع کننده و دقیق به نظر می‌رسند، اما تلاش‌های اولیه انجام شده بر این اساس، در پیش‌بینی مشاهدات موجود در آزمایشگاه شکست خورد. که به دلیل توجیحات نامناسب تحلیلی بود. برای نمونه، در این زمینه نگلی^۱ سلول‌شناس سوئیسی چنین استدلال کرد که جرم ذرات معلق در مقایسه با ملکول‌های آب چندین مرتبه بزرگتر است، بنابراین هرجابجایی بعد از یک تک برخورد به اندازه‌ای کوچک است که قابل مشاهده نمی‌باشد [۲۵، ۲۶]. اما توجیه آماری کاملاً متفاوت برای این رفتار دسته جمعی، توسط کاربونل^۲ به این نحو ارائه شد [۲۷]: ” در مورد یک سطح با مساحتی معین و مناسب، برخوردهای ملکولی مایع که منجر به وارد آمدن فشار می‌شوند، باعث اختلال در حرکت ذرات معلق نمی‌شوند؛ چراکه این ملکول‌ها نیرویی یکسان و در تمام جهات بر ذره وارد می‌کنند. اما اگر سطح دارای مساحتی کمتر از میزان لازم برای جبران سهم بی‌نظمی‌ها باشد، دیگر دلیلی برای تعریف فشار میانگین وجود ندارد. از این رو، باید فشار نابرابری را که پیوسته از مکانی به مکان دیگر تغییر می‌کند یافت. در این حالت دیگر، قانون تعداد زیاد^۳ ذرات منجر به فشار یکسان نمی‌شود. و هر چه اندازه ذرات کوچک‌تر باشد، نتیجه واضح‌تر خواهد بود و نوسان‌ها شدیدتر می‌شوند.”

بحث در این مورد بسیار زیاد و جالب است. تمرکز فیزیکدان‌ها به صورت کلاسیک بر کمیت‌های میکروسکوپی میانگین، مانند جابجایی میانگین در هر برخورد بود. سوال مطرح این بود که اگر قرار باشد انحراف‌ها از مقدار میانگین در نظر گرفته شود، چگونه می‌توان به درستی یک تصویر ماکروسکوپیک ساخت. به ویژه، مکانیزم تحلیلی دقیق برای قانون تعداد زیاد ذرات و ارتباط آن با قضیه حد مرکزی^۴ (در ادامه توضیح داده می‌شود) هنوز در آن زمان جزو دانش عمومی نبود. سرانجام، تلاش‌های اینشتین [۲۸] و اسملوکوفسکی [۲۹] نتایج کمی و احتمالاتی برای تئوری حرکت بروانی را به بار آورد.

۱.۳.۱ آلبرت اینشتین و معادله پخش

اینشتین دو مفهوم موازی در درک پخش را ادغام کرد. نخست، یک مجموعه بزرگ از ذرات ریزی که در یک سیال شناورند برحسب گرادیان غلظت $f(x, t)$ توصیف می‌شوند. بر این اساس $f(x, t)dx$ تعداد ذرات محصور در حجم بسیار کوچک اطراف نقطه x در زمان t را می‌دهد. با در نظر گرفتن اصول نظریه جنبشی، اینشتین قانون فشار اسموتیک^۱ را برای ذرات

^۱ Karl von Nageli

^۲ Ignace Carbonelle

^۳ Law of Large Numbers

^۴ Central Limit Theorem

^۱ Osmotic Pressure



شکل ۲.۱: آلبرت اینشتین، بنیان‌گذار تئوری حرکت بروانی.

معلق به کار برد، این قانون نظیر قانون گاز ایده‌آل است. بنابراین وی همانند فیک^۲ به این نتیجه رسید که $f(x, t)$ باید از قوانین کلاسیک پخش پیروی کند. به‌ویژه در حالت تعادل دینامیکی، هرگونه جریان ایجاد شده توسط نیروهای خارجی سراسری، نظیر نیروی الکتریکی یا گرانش، توسط یک جریان پخش $-D(\frac{\partial f}{\partial x})$ جبران می‌شود؛ این جریان ناشی از تمایل ذرات برای پر کردن نواحی با غلظت کمتر است. ثابت پخش D دارای ابعاد m^2/sec است و نشان دهنده‌ی شدت جریان پخش است. همچنین اینشتین فرض کرد که ذرات به صورت کره‌هایی تحت اصطکاک استوکس^۳ هستند و با استفاده از قانون فشار اسموتیک به رابطه زیر برای ثابت پخش رسید،

$$D = \frac{R\theta}{6\pi\eta rN}, \quad (2.1)$$

در این رابطه R ثابت گاز ایده‌آل، θ دمای سیال، η ثابت اصطکاک آن، r شعاع ذرات و N عدد آوگادرو است. در گام بعدی، اینشتین با رویکردی متفاوت با مساله برخورد کرد. ذرات بروانی آنقدر بزرگ هستند (از مرتبه میکرون) که بتوان آن‌ها را جداگانه مطالعه کرد. او فرض مهمی را در نظر گرفت به این قرار که، مادامی که بازه‌های زمانی خیلی کوچک نباشند، هر ذره حرکتی کاملاً مستقل از دیگر ذرات انجام می‌دهد؛ همچنین حرکت یک ذره به‌خصوص در بازه‌های زمانی متفاوت نیز، حرکتی مستقل از هم هستند. در این‌جا بازه‌ی زمانی τ را معرفی می‌کنیم که در مقایسه با زمان‌های مشاهده بسیار کوچک است، اما به اندازه کافی بزرگ است که بتوان حرکت‌های بین دو بازه‌ی متوالی τ را مستقل در نظر گرفت. سپس او احتمال $\phi(\Delta)$ را برای جابجایی به اندازه Δ هر ذره بروانی در بازه‌ی زمانی $t + \tau$ در نظر گرفت. $\phi(\Delta)$ نسبت به Δ متقارن و مستقل از t و زمان‌های گذشته است. بنابراین، تعداد ذرات در یک حجم کوچک در اطراف x برطبق رابطه زیر با

^۲ Fick

^۳ Stokes Friction

زمان تحول می‌یابد،

$$f(x, t + \tau)dx = dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \Delta, t)\phi(\Delta)d\Delta. \quad (۳.۱)$$

با اعمال بسط تیلور نسبت به τ و Δ بر روی هر دو طرف این رابطه، معادله نهایی زیر را خواهیم داشت،

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad (۴.۱)$$

که ضریب D به این صورت تعریف می‌شود،

$$D = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \phi(\Delta) d\Delta. \quad (۵.۱)$$

رابطه (۴.۱) فرض اولیه مبنی بر حاکم بودن معادله پخش کلاسیک بر تحول گرادیان غلظت را تایید می‌کند، هرچند که این رهیافت بر تصویر تک ذره‌ای استوار است. ثابت پخش D از طریق رابطه (۵.۱) با احتمال $\phi(\Delta)$ ، که بر جابجایی‌های میکروسکوپی حاکم است، مرتبط می‌باشد. روش اینشتین برای پیدا کردن این کمیت به این صورت بود. بعد از ثبت حرکت ذرات، می‌توان تمام مسیرهای ذرات را به گونه‌ای انتقال داد که مبدا دستگاه مختصات مکانی، $x = 0$ ، منطبق بر مبدا حرکت در $t = 0$ باشد. با توجه به همگنی فضایی، غلظت ذرات انتقال یافته همچنان باید از معادله پخش تبعیت کند. شرط اولیه نیز به این صورت است^۱، $f(x, t = 0) = n\delta(x)$ که $n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dx$ تعداد کل ذرات بروانی معلق است. پاسخ معادله (۴.۱) توزیع معروف گاوسی است،

$$\frac{1}{n} f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (۶.۱)$$

بنابراین ثابت پخش از روی توزیع جابجایی تمام ذرات $f(x, t)$ به دست می‌آید. راه ساده‌تری که اینشتین پیشنهاد داد

^۱ در این جا $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک است، تابع تعمیم یافته‌ای که از رابطه $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x)dx = g(0)$ برای هر تابع خوش رفتار $g(x)$ تعریف می‌شود. اینشتین از این تابع استفاده نکرد بلکه مفهوم آن را به کار برد.



شکل ۳.۱: اسملوکوفسکی و کار بر روی جنبه میکروسکوپی حرکت بروانی.

محاسبه میانگین مربع جابجایی برای هر ذره در راستای x یا به عبارتی میانگین هنگردی است،

$$\langle X^2(t) \rangle = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, t) dx = 2Dt. \quad (۷.۱)$$

ثابت پخش با میانگین‌گیری مربع جابجایی بر روی تعداد زیادی از مسیرهای ذره‌ی بروانی به دست می‌آید. در ترکیب با رابطه (۷.۱) می‌توان عدد آوگادرو را از طریق این روش یافت؛ که کمیت مهمی در تئوری اتمی است.

ویژگی منحصر کار اینشتین در به کار بردن رهیافت دوگانه‌اش بود: از یک سو، با استفاده از گرادیان غلظت، قوانین فشار و معادلات کلاسیک پخش، نگاه پیوستار به ذرات داشت. از سوی دیگر، از توصیف احتمالاتی ذرات بهره برد و مسیر تک ذره را مورد بررسی قرار داد. اینشتین با تمرکز مستقیم بر مختصه مکانی x در زمان‌هایی بزرگ در مقایسه با τ ، از مواجهه با مشکلات پیش رو در دیگر توصیف‌های آماری در امان ماند، مشکلاتی نظیر تناقض در تخمین سرعت لحظه‌ای ذره بروانی یا میانگین جابجایی این ذره بر برخوردهای میکروسکوپی. این موارد ظریف بعداً توسط اسملوکوفسکی مورد توجه قرار گرفت.

۲.۳.۱ رهیافت اسملوکوفسکی و ول‌گشت

اینشتین ویژگی‌های آماری دینامیک ذرات بروانی را بر حسب تابع احتمال جابجایی‌ها $\phi(\Delta)$ تعریف کرد. او یک سری فرض‌های منطقی مانند استقلال x و t از یکدیگر را در نظر گرفت، اما صورت تابعی آن‌ها و نیز رابطه با دینامیک محیط اطراف را مشخص نکرد. از این رو رهیافت ارائه شده توسط اسملوکوفسکی در ۱۹۰۶ [۲۹] بیشتر، جنبه میکروسکوپی دارد چنان‌که این تئوری، اثر تک برخوردها با ملکول‌های نامرئی گاز یا سیال را مدل‌سازی می‌کند. اساس کار وی ول‌گشت است.

همراستا با محاسباتش، اسملوکوفسکی چندین تصور غلط موجود در گذشته را گوشزد نمود. از آن جمله، به عقیده‌ی نگلی

بر کوچک بودن جابجایی‌ها اشاره کرد. افزایش سرعت یک ذره بروانی با قطر 10^{-4} cm ، در برخورد با یک ملکول سبک وزن آب باید چیزی از مرتبه 10^{-6} cm/sec باشد. اما این بسیار کمتر از ویژگی‌های حرکتی مشاهده شده برای ذره بروانی است. علی‌رغم وجود تعداد زیادی از این برخوردها در ثانیه، طبق تعریف نگلی بدلیل جهت‌گیری بدون بایاس، جابجایی خالص باید صفر باشد. اما اسملوکوفسکی با این نتیجه‌گیری مخالف بود و عقیده داشت این همان استدلال اشتباهی است که در مورد پرتاب تاس در بازی خطر^۱ انجام می‌شود که بازیکن اعتقاد دارد بیش‌تر مبلغ شرط‌بندی خود از دست نمی‌دهد. در n پرتاب تاس، احتمال m مرتبه برد $p(m; n)$ از رابطه زیر نتیجه می‌شود،

$$p(m; n) = \frac{n!}{2^n m!(n-m)!} = \frac{1}{2^n} \binom{n}{m}. \quad (۸.۱)$$

برای m برد از n مرتبه، دستاورد کل $v = 2m - n$ حاصل می‌شود. از آن‌جا که ارجحیتی در بازی وجود ندارد، $p(m; n) = p(n-m; n)$. در نتیجه میانگین سود حاصل شده $\langle v \rangle = 0$ است. اما میانگین انحراف از صفر برابر است با،

$$\langle |v| \rangle = \sum_{m=0}^n |2m - n| p(m, n) = 2 \sum_{m=n/2}^n \binom{n}{m} \frac{2m - n}{2^n} = \frac{n}{2^n} \binom{n}{n/2},$$

(۹.۱)

که برای n ‌های بسیار بزرگ 2 به این صورت خواهد بود،

$$\langle |v| \rangle \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}. \quad (۱۰.۱)$$

بنابراین فردی که قصد n بار بازی دارد، باید انتظار برد یا باختی از مرتبه \sqrt{n} داشته باشد. برگردیم به ول‌گشت، مولفه سرعت v_x ذره بروانی در راستای x ، فرضاً در هر برخورد با یک اندازه ثابتی افزایش (برنده) یا کاهش (بازنده) می‌یابد. در نتیجه، متوسط سرعت صفر خواهد بود، $\langle v_x \rangle = 0$ ، اما سرعت متوسط (مقدار مطلق سرعت) $\langle |v_x| \rangle$ به صورت جذر n افزایش می‌یابد. در یک ثانیه، ذره بروانی معلق در یک گاز حدود $n = 10^{16}$ برخورد و ذره در سیال آب $n = 10^{20}$ برخورد

^۱ Hazard یا بازی خطر، بازی تاس معروف در قرن‌های ۱۷ و ۱۸ بود. قاعده بازی پیچیده بود، اما اسملوکوفسکی از قواعد ساده ول‌گشت معروف برای توصیف استفاده کرد. بازیکن روی مقدار معینی شرط‌بندی می‌کند، و در هر مرحله از پرتاب تاس احتمال برد یا باخت مساوی است.

^۲ با استفاده از رابطه استرلینگ $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$

را تجربه می‌کند. در این تصویر بسیار ساده، افزایش سرعت می‌تواند چیزی از مرتبه به ترتیب 10^2 یا 10^4 cm/sec باشد. بنابراین اسملوکوفسکی نشان داد که چگونه مجموع یک ول گشت بدون بایاس، می‌تواند از مقدار صفر مطلق پیش‌بینی شده، انحراف داشته باشد. در حقیقت، بر طبق قضیه حد مرکزی (که در ادامه بیان می‌شود)، در n های بزرگ، این فرم بستگی به جذر n یک نتیجه کلی است.

در حالی که این نوع نگاه مساله نگلی را حل می‌کرد، این ول گشت به عنوان یک مدل کامل برای توصیف ذره بروانی باید کنار گذاشته شود. همان‌طور که اسملوکوفسکی بیان نمود، رابطه (۱۰.۱) افزایش دائمی سرعت و در نتیجه انرژی جنبشی را ایجاد می‌کند. نکته‌ی مهم در تئوری فوق، عدم وابستگی احتمال برخوردها به سرعت است. در عمل هرچه ذره در یک جهت خاص سرعت بیشتری داشته باشد، تعداد برخوردهای بیشتری را در آن جهت با ملکول‌های حلال تجربه می‌کند. برخوردها ذره را پیش می‌برند، اما باعث ایجاد پدیده اصطکاک نیز می‌شوند. در نهایت، توزیع سرعت و به‌ویژه سرعت متوسط به یک مقدار محدودی می‌رسند. طبق تئوری جنبشی ماکسول، این همان چیزی است که حد ترمودینامیکی را تعریف می‌کند. به صورت دقیق‌تر، در یک سیستم در حالت تعادل، تمام ذرات صرف‌نظر از شکل، اندازه و وزن، باید میزان مساوی انرژی جنبشی داشته باشند. با فرض این که ذرات بروانی، ذراتی کروی با جرم M و سرعت V باشند و ملکول‌های آب را به صورت نقطه‌ای با جرم m و سرعت v در نظر بگیریم، خواهیم داشت،

$$\langle V^2 \rangle = \frac{m}{M} \langle v^2 \rangle. \quad (11.1)$$

بر اساس این رابطه، اسملوکوفسکی توانست به صورت غیر دقیق سرعت متوسط ذره بروانی معلق در آب و در شرایط تعادل را $\langle V \rangle \approx \sqrt{\langle V^2 \rangle} \approx 0.4 \text{ cm/sec}$ تخمین بزند. او همچنین متذکر شد که این عدد برای سرعت از هر مقداری حاصل از اندازه‌گیری، بزرگ‌تر است؛ این نکته شکی نسبت به صحت تئوری جنبشی برانگیخت. اشتباه دوباره در تفسیر بود. اسملوکوفسکی این‌گونه توضیح داد که: ”آنچه ما مشاهده می‌کنیم در واقع مکان میانگین ذرات متحرک با سرعت V است؛ اما این ذرات بین 10^6 تا 10^2 مرتبه در ثانیه تغییر جهت می‌دهند. مرکز جرم این سیستم مسیر زیگزاگی بی‌اندازه پیچیده‌ای را طی می‌کند، مسیری که خطوط راست آن بسیار کوچک‌تر از ابعاد خود ذرات است. [...]”

جابجایی روی هر مسیر مستقیم، $\delta X = |X(t + \delta t) - X(t)|$ ، حتی نمی‌تواند معیار تقریبی برای مسیر واقعی ذره باشد. هر تلاشی برای محاسبه سرعت لحظه‌ای V از روی $\delta X / \delta t$ با در نظر گرفتن δt ای بیش از 10^{-16} sec ، منجر به شکست می‌شود. اسملوکوفسکی با معرفی یک طرح ماهرانه‌تری برای ول گشت، تلاش کرد تا بحث خود را اثبات نماید. موقعیت ذره بعد از n برخورد با ملکول‌های گاز یا سیال اطراف $X(n)$ خواهد بود. حرکت در $X(0) = 0$ در یک جهت کاتوره‌ای آغاز خواهد شد. به جهت عملیاتی کردن مدل از لحاظ تحلیلی، او چند فرض ساده‌کننده در نظر گرفت. برخی از آن‌ها

واضحند، نظیر ساده‌سازی‌های برآمده از تقریبی چون $M \gg m$ ؛ اما برخی دارای نکات ظریف‌تری هستند. برای جزئیات بیشتر می‌توان به مرجع [۲۹] مراجعه نمود. به صورت خلاصه مدل این‌گونه است. الف) برخوردها با ملکول‌های محیط در بازه‌های زمانی ثابتی انجام می‌گیرد، هرگونه کاتوره‌ای بودن زمان‌های برخورد قابل چشم‌پوشی است. ب) بین هر دو برخورد n و $n+1$ ، حرکت مستقیم با سرعت ثابت $V(n)$ خواهد بود. سرعت ذره بروانی از قضیه همپاری، معادله (۱۱.۱)، ناشی می‌شود؛ $V(n) \equiv V = \langle V \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} m/M$. در عمل قضیه همپاری یک قضیه آماری است و افت و خیز حول مقدار میانگین در آن وجود دارد، اما قابل صرف‌نظر کردن است. از این دو فرض (الف) و (ب) می‌توان دریافت که بردار جابجایی از این طریق به دست می‌آید، $\delta X(n) = X(n+1) - X(n) = V(n)/v$ ؛ که در این رابطه v نرخ برخورد است. با توجه به نکته فوق، می‌توان این مدل را صورت سه بعدی ول‌گشت پیرسون^۱ دانست، چراکه ذره بروانی مسافت‌های غیرکاتوره‌ای و ثابت $l = \delta X = V/v$ را بین هر دو برخورد متوالی طی می‌کند. در مدل ول‌گشت اسملوکوفسکی، جهت جدید حرکت بعد از هر برخورد کاملاً کاتوره‌ای نیست. ج) زاویه چرخش $\epsilon(n) \equiv \epsilon$ ، که از روی $\cos[\epsilon(n)] = [V(n-1)V(n)]/V^2$ تعریف می‌شود، ثابت و غیرکاتوره‌ای فرض می‌شود، $\epsilon(n) = \epsilon$. با پیگیری بحث نگلی، می‌توان سهم هر برخورد را بسیار کوچک در نظر گرفت. از این رو، زاویه چرخش کوچک بوده و تا تقریب مرتبه اول متناسب است با نسبت $(mv)/(MV)$. با تخمین $v \approx \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ و استفاده از تعریف V در (ب) به $\epsilon = O(\sqrt{m/M})$ خواهیم رسید. به طور خلاصه، بعد از هر برخورد، نوک بردار جابجایی $\delta X(n)$ باید بر روی دایره‌ی معین کوچکی حول $\delta X(n-1)$ بنشیند، شکل (۶.۱).

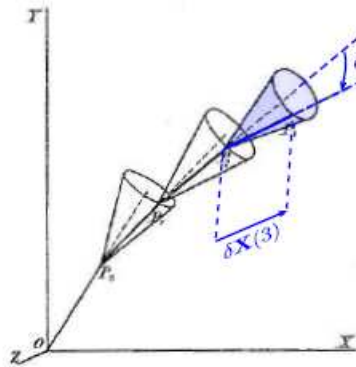
در مقابل مسیر زیگزاگی و کاملاً کاتوره‌ای پیرسون، اسملوکوفسکی به نوعی یک پایداری را نشان می‌داد: ذره بروانی بعد از برخورد تمایل به حفظ جهت حرکت خود دارد، که این ناشی از اینرسی جرمی بالای آن است. اگر ϵ خیلی کوچک باشد، حتی بعد از تعداد زیادی برخورد نیز مسیر مشاهده شده تقریباً به صورت خط راست خواهد بود. نتیجه‌گیری اسملوکوفسکی ظهور یک مسیر آزاد میانگین مشهود^۲ λ^2 بود که چندین مرتبه از مسیر آزاد میانگین واقعی l بزرگ‌تر است. اسملوکوفسکی با در نظر گرفتن میانگین مربع جابجایی ذره بروانی معلق در گاز، $\langle X^2(n) \rangle$ ، یک نمونه کمی ارائه کرد. ابعاد فضایی ذره در این مورد، بسیار کوچک‌تر از مسیر آزاد میانگین در ملکول‌های گاز است. بنابراین، بر طبق تئوری جنبشی بولتزمن^۳، می‌توان اثر برخوردهای متوالی را مستقل از یکدیگر فرض کرد. و این مدل اسملوکوفسکی را کامل می‌کند: د) کاتوره‌ای بودن برخوردها از طریق زوایای سمتی $\delta X(n)$ در دایره‌ی حول $\delta X(n-1)$ وارد می‌شود. این زوایا به صورت مستقل و از یک توزیع یکنواخت از بازه‌ی $[0; 2\pi]$ گرفته می‌شود. با مشخص کردن مختصه زمان به صورت $t = n/v$ ، نتایج

^۱ Pearson's Random Walk

^۲ Apparent Mean Free Path

^۳ Boltzmann's Original Kinetic Theory

jedesmal ihre Bewegungsrichtung um den Winkel ϵ ändernd. Wir nehmen die Längen $OP_0 = P_0P_1 = P_1P_2 = \dots$ als gleich an und nennen sie „die wirkliche mittlere Weglänge l des Teilchens M “. Die Aufgabe, welche wir uns stellen, besteht darin, das mittlere Quadrat der Entfernung OP_n , welche wir mit A bezeichnen werden, als Funktion der Länge l , des Winkels ϵ und der Anzahl n der Teilstrecken zu finden. Behufs Definition der in Betracht kommenden Richtungen beschreiben wir eine Einheitskugel und ziehen aus deren Mittelpunkt Gerade, parallel zu OP_0, P_0P_1, \dots , welche die Kugel in den Punkten Q_0, Q_1, \dots durchstoßen. Die Winkel XOQ_0, XOQ_1, \dots etc. bezeichnen wir mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, die zwischen den Ebenen XOQ_0 und Q_0OQ_1, XOQ_1 und Q_1OQ_2, \dots eingeschlossenen Winkel mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Dann bestehen die Relationen:



parallel zu OP_0, P_0P_1, \dots , welche die Kugel in den Punkten Q_0, Q_1, \dots durchstoßen. Die Winkel XOQ_0, XOQ_1, \dots etc. bezeichnen wir mit $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, die zwischen den Ebenen XOQ_0 und Q_0OQ_1, XOQ_1 und Q_1OQ_2, \dots eingeschlossenen Winkel mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Dann bestehen die Relationen:

شکل ۴.۱: نمایی از ول‌گشت پایدار اسملوکوفسکی در سه بعد که از $X(0) = 0$ شروع به حرکت نموده و مسافت جابجایی‌ها برای همه n ها یکسان است، $\delta X(n) = l$. نخستین جهت حرکت تصادفی است. اما تغییر جهت‌های بعدی مقید به یک زاویه قطبی ثابت ϵ هستند. زاویه سمتی مقداری تصادفی دارد و در هر گام مستقل از گام قبلی است. این تصویر از مرجع [۲۹] گرفته شده است.

اسملوکوفسکی به این صورت خواهد بود:

$$\langle X^2(t) \rangle = \begin{cases} (Vt)^2, & \nu^{-1} \ll t \ll \tau, \\ \epsilon Dt, & t \gg \tau, \end{cases} \quad (۱۲.۱)$$

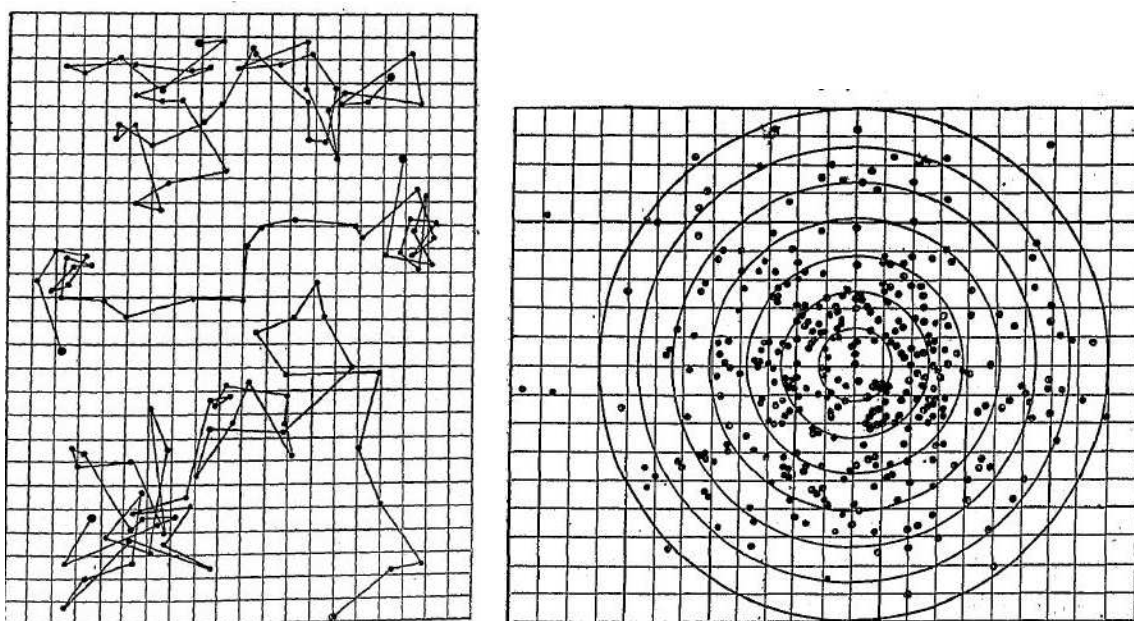
که در این رابطه کمیت‌های زیر وارد شده‌اند،

$$\tau = \frac{1}{\nu \sqrt{1 - \cos(\epsilon)}} \approx \frac{1}{\nu \epsilon^2} = O\left(\frac{M}{\nu m}\right),$$

$$\lambda = V\tau = \lambda_x \sqrt{3},$$

$$D = \frac{\lambda_x^2}{\tau} = O\left(\frac{\langle v^2 \rangle}{\nu}\right)$$

این نتایج از چند جهت قابل توجه هستند. نخست، رابطه (۱۲.۱) بحث اسملوکوفسکی در مورد جدایی مقیاس‌ها را تایید می‌کند. حرکت برای مقیاس‌های زمانی کوچک‌تر از τ خطی است، $\sqrt{\langle X^2 \rangle} = Vt$. و در مقیاس‌های زمانی بزرگ، ویژگی



شکل ۵.۱: مطالعات پیرین بر روی حرکت بروانی [۲۷]. سمت چپ: مسیره‌های یک ذره بروانی در یک صفحه، که در بازه‌های زمانی ۳۰ ثانیه‌ای اندازه‌گیری شده است. راست: تمامی جابجایی‌های تمام مسیره‌ها به مبدا منتقل شده‌اند. این تصویر گاوسی بودن توزیع طول مسیره‌ها را نشان می‌دهد که توسط اینشتین پیش‌بینی شده بود.

آشوبناک^۱ بروز می‌کند. این یک رژیم پخشی است: رفتار میانگین مربع جابجایی نظیر رفتار حاصل از معادله اینشتین (۵.۱) است. اما اینشتین پایداری حرکت را وارد نکرده بود: معادله (۳.۱) واضحا استقلال بردارهای جابجایی قبل و بعد را بیان می‌دارد. در حقیقت، در زمان‌های بلند، ول‌گشت معرفی شده توسط اسملوکوفسکی حرکت پیرسون ناپایدار با طول مسیر موثر $l = \lambda = V\tau$ را تقلید می‌کند. این تشابه از دل قضیه حد مرکزی می‌آید (قضیه‌ای که در ادامه معرفی می‌شود اما نه اینشتین و نه اسملوکوفسکی آن‌را در دسترس نداشتند).

بنابراین، اسملوکوفسکی یک پلی میان ویژگی‌های غیرقابل مشاهده در آزمایشگاه (مانند نرخ برخورد ν ، و مسیر آزاد واقعی V/ν) و نیز خواص قابل اندازه‌گیری (همچون ثابت پخش) برقرار کرد. به عنوان نمونه، معادله (۱۳.۱) پیش‌بینی می‌کند که D باید مستقل از نسبت جرم‌ها m/M باشد. اسملوکوفسکی توضیح می‌دهد که، یک ذره بروانی با جرم بزرگ در حالت تعادل یک سرعت متوسط کوچکی را حفظ می‌کند، اما در مقابل حفظ جهت حرکتش به شدت مقاومت نشان می‌دهد؛ و این دو پارامتر یکدیگر را خنثی می‌کنند. در یک نگاه کلی، اینشتین یک رهیافت احتمالاتی رضایت بخشی برای مدل‌سازی ذرات ارائه نمود. اسملوکوفسکی نشان داد که رهیافت ول‌گشت می‌تواند ارتباط گم شده با مدل‌های برخورد جنبشی را برقرار نماید. و به این ترتیب تئوری ذرات بروانی شکل گرفت، که باید به صورت تجربی نیز آزمایش می‌شد. نتایج چنین

^۱ Chaotic

آزمایش‌هایی در ۱۹۰۹ توسط پیرین^۱ فیزیکدان فرانسوی منتشر شد [۲۷]. وی چندین آزمایش انجام داد تا با مطالعه ذره بروانی، در حالت کلی تئوری جنبشی و به ویژه ایده‌های اینشتین را بررسی کند. کار اصلی او تعیین عدد آووگادرو (تعداد ملکول‌های موجود در دو گرم هیدروژن) بود.

۴.۱ فراهم‌سازی ابزار مدل‌های تصادفی

ارائه‌ی این مفاهیم احتمالاتی در آغاز قرن ۲۱ باعث شکل‌گیری و رشد سریع تعداد زیادی از روش‌های تحلیلی شد. مسائلی مختلفی از دنیای فیزیک، ریاضی و حتی اقتصاد تحت تئوری فرآیندهای تصادفی مورد مطالعه قرار گرفتند. یک فرآیند تصادفی را باید مجموعه‌ای از متغیرهای کاتوره‌ای $X(t)_{t \in I}$ دانست، که شاخص t عموماً پارامتر زمان نامیده می‌شود. این شاخص می‌تواند گسسته باشد (به عنوان نمونه ول‌گشت، گزینه‌ی واضح این مورد اعداد طبیعی است، $I = \mathbb{N}$) یا پیوسته باشد (برای ذره بروانی که $I = \mathbb{R}$). وضعیت فرآیند در یک زمان معین t با متغیر کاتوره‌ای $X(t)$ نشان داده می‌شود. برای مورد دومی، می‌توان فضای حالت مناسب را تعیین کرد. برای نمونه در حرکت بروانی سه بعدی، باید بردارهای کاتوره‌ای سه بعدی $X(t) \in \mathbb{R}^3$ در نظر گرفت. برای هر مجموعه‌ی محدود از زمان‌های اندازه‌گیری $(t_1, \dots, t_d) \in I^d$ که $d \in \mathbb{N}$ می‌توان متغیرهای $X(t_1) = x_1, \dots, X(t_d) = x_d$ را داشت که یک مجموعه از نقاط نمونه‌ی^۲ متعلق به نمود یا مسیر یا خط سیر^۳ فرآیند تصادفی $X(t)$ را می‌سازند. و باید توجه داشت که این چنین تعریفی تنها برای یک مجموعه محدود به راحتی انجام می‌شود. این سوال که چگونه می‌توان یک نمادگذاری مناسب برای احتمالاتی بودن مسیر کامل $t \rightarrow x(t)$ تعریف کرد، یا این که چطور به صورت احتمالاتی ویژگی‌های تحلیلی مسیر را توصیف نمود، کاملاً مبهم است.

۱.۴.۱ فرآیند وینر

آنچه از لحاظ ریاضیاتی باید انجام داد این است که باید تعریف دقیقی برای این فرآیندهای متفاوت ارائه نمود تا بتوان آن‌ها را دسته بندی کرد. تلاش در این راه با کار نوربرت وینر^۴ به اوج خود رسید [۳۰]. او فرآیندی تصادفی را مطالعه نمود که امروزه به نام خود او فرآیند وینر^۵ نام‌گذاری شده است. این فرآیند توسط سه ویژگی زیر تعریف می‌شود: الف) $B(0) = 0$ ؛

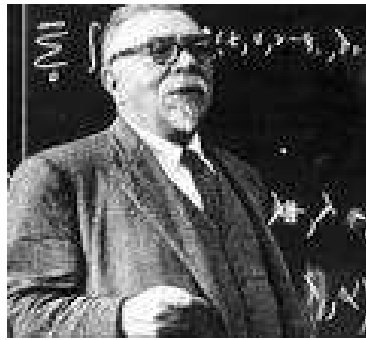
^۱ Jean Bapstiste Perrin

^۲ Sample Points

^۳ Realisation or Path or Trajectory

^۴ Norbert Wiener

^۵ The Wiener Process



شکل ۶.۱: نوربرت وینر ریاضیدان آمریکایی که سهم عمده‌ای در شکل‌گیری فرآیندهای تصادفی داشت.

(ب) مسیر هر ذره $B(t)$ تقریباً به‌طور قطع^۱ پیوسته است^۲؛ ج) نمو $B(t_2) - B(t_1)$ یک توزیع گاوسی^۳ با میانگین صفر و واریانس $|t_2 - t_1|$ است، و برای هر دو بازه‌ی بدون همپوشانی $[t_1, t_2]$ ، $[t'_1, t'_2]$ ، به صورت دو به دو، از یکدیگر مستقلند. در حقیقت این فرآیند را می‌توان نمود ریاضیاتی حرکت بروانی (یک بعدی) توصیف شده توسط اینشتین دانست. (فرآیند وینر یکاهای دلخواهی را برای مختصات مکان و زمان استفاده می‌کند به طوری که $D = 1/2$. برای به‌دست آوردن معادله اینشتین، باید حرکت بروانی غیراستاندارد و بازمقیاس شده $\sqrt{2DB(t)}$ را به‌کار برد.) نکته (ج) یادآور شرط اینشتین است که ”حرکت‌ها در هر دو بازه زمانی پیاپی τ ، مستقل از یکدیگر هستند” [۳۱]. رابطه (۶.۱) گاوسی بودن را ایجاب می‌کند و ویژگی مربوط به واریانس در (۷.۱) است. مختصه مکانی به صورت $X(t) \sim t^{1/2}$ با زمان رابطه مقیاسی^۴ دارد. وینر وجود چنین فرآیندی را با ساختن فضای نمونه مناسب که دارای احتمال ...^۵ مناسبی است، اثبات کرد، فضایی که شرایط (الف) تا (ب) را ارضا می‌کند. بر این اساس، او چندین ویژگی مسیرها را به دست آورد؛ می‌توان با مسیرهای تولید شده حاصل از شبیه‌سازی (۹.۱) مقایسه نمود. مهم‌ترین ویژگی مشهود این است که، هر مسیری در فرآیند وینر اگرچه پیوسته است، اما با احتمال یک در هیچ نقطه‌ای مشتق‌پذیر نیست. این ویژگی، بیان ریاضی دقیق عدم توانایی در تعیین سرعت ذرات بروانی است. از طرفی تلاش‌ها جهت معنا دادن به انتگرال یک فرآیند تصادفی انجام گرفت که منجر به شکل‌گیری

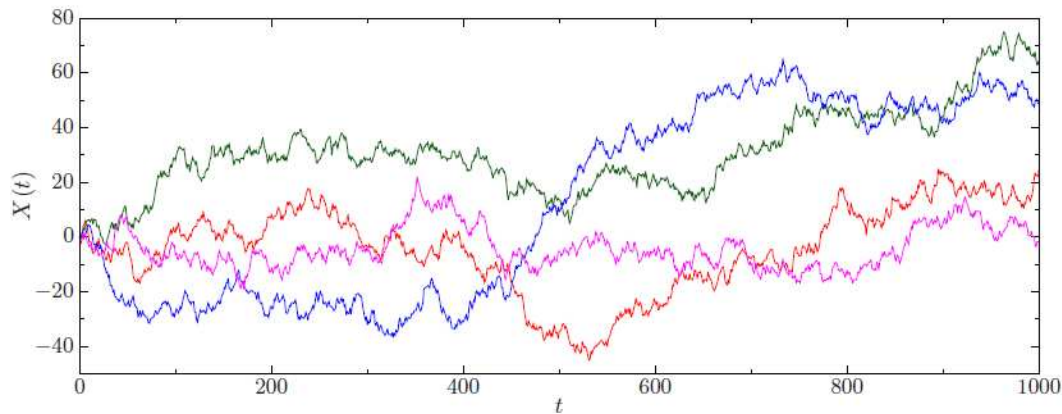
^۱ Almost Surely

^۲ فرآیند A در صورتی تقریباً به‌طور قطع رخ می‌دهد اگر $PrA = 1$. این شرط ایجاب نمی‌کند که این اتفاق حتماً با تعداد معینی تلاش رخ دهد. به عنوان مثال، عددی صحیح به صورت تصادفی انتخاب کرده و اجازه دهید A حالتی باشد که رقم مورد نظر ۵ نباشد. اگرچه که اصولاً انتخاب ۵ غیرممکن نیست، اما این احتمال برای A یک است چراکه خروجی می‌تواند از میان بی‌نهایت عدد باشد.

^۳ Gaussian Distribution

^۴ فرآیند A در صورتی تقریباً به‌طور قطع رخ می‌دهد اگر $PrA = 1$. این شرط ایجاب نمی‌کند که این اتفاق حتماً با تعداد معینی تلاش رخ دهد. به عنوان مثال، عددی صحیح به صورت تصادفی انتخاب کرده و اجازه دهید A حالتی باشد که رقم مورد نظر ۵ نباشد. اگرچه که اصولاً انتخاب ۵ غیرممکن نیست، اما این احتمال برای A یک است چراکه خروجی می‌تواند از میان بی‌نهایت عدد باشد.

^۵ Measure



شکل ۷.۱: مسیره‌های نمونه $X(t)$ برای فرآیند وینر که در واقع مدل ریاضی برای حرکت بروانی است. مسیره‌ها از شبیه‌سازی عددی حاصل شده‌اند. مسیره‌های نمونه بسیار نامنظم هستند اما پیوسته؛ و در هیچ زمانی نمی‌توان یک مسیر ارجح تعیین کرد. به صورت موضعی مسیره‌های تولید شده با حرکت بروانی واقعی مشاهده شده توسط کاپلر (۱.۱) سازگار هستند.

محاسبات تصادفی^۱ [۳۲] توسط ایتو^۲ [۳۴، ۳۳] و در ادامه توسط استراتونوویچ^۳ [۳۵] (که بیشتر برای فیزیکدان‌ها اهمیت فراوانی دارد) شد.

۲.۴.۱ معادله لانژوین

انگیزه برای یافتن چنین ابزار ریاضی همزمان بود با بحث معادلات دیفرانسیل تصادفی^۴ در جامعه فیزیک. اولین مفهوم در این زمینه توسط فیزیکدان فرانسوی لانژوین^۵ [۳۶] ارائه شد، که حرکت ذره بروانی را برحسب معادلات حرکت توصیف کرد،

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= V(t), \\ m \frac{dV}{dt} &= -\gamma V(t) + \xi(t), \end{aligned} \quad (۱۳.۱)$$

که در این معادلات، m جرم ذره بروانی و γ ضریب اصطکاک خطی با محیط اطراف است. در نگاه اول، این معادلات مشابه قانون دوم نیوتون، به همراه ترم آشنای مربوط به لختی در سمت چپ و نیز نیروی اصطکاک اتلافی در سمت راست،

^۱ Stochastic Calculus

^۲ Ito

^۳ Stratonovich

^۴ Stochastic Differential Equations

^۵ Paul Langevin



شکل ۸.۱: پاول لانژوین (۱۸۷۲-۱۹۴۶)

به نظر می‌رسند. جمله وابسته به زمان $\xi(t)$ معرف انتقال تکانه با ملکول‌های گاز یا سیال خارجی در حین برخوردها است. دوباره فرض می‌شود که نرخ برخورد بسیار سریع‌تر است از معکوس مقیاس زمانی dt یا به عبارتی تعریف کننده‌ی حدود اعتبار (۱۳.۱). تعریف $\xi(t)$ از دل فرآیند تصادفی بیرون می‌آید نه یک تابع تعینی^۱ از زمان. کاتوره‌ای بودن مقدار این تابع به توابع $X(t)$ و $V(t)$ نیز منتقل می‌شود، که باید از طریق احتمالات مشخصه‌یابی شوند. بنابراین، معادله لانژوین روش‌های آنالیز کلاسیک را کنار گذاشته و ریاضیدان‌ها و فیزیکدان‌ها را در شاخه‌ای که در دهه‌های بعدی بسیار پراهمیت شد [۳۳، ۳۷، ۳۸، ۴۰]، با یکدیگر همراستا نمود. نخست، باید نوع برخوردها $\xi(t)$ را مشخص نمود. اگر محیط در شرایط تعادل گرمایی نگه داشته شود، می‌توان به قوانین تئوری جنبشی استناد کرد، چیزی که موجب ظهور تئوری‌های اینشتین و اسملوکوفسکی شد. ملکول‌های اطراف از قوانین توزیع ماکسول-بولتزمن پیروی می‌کنند. انتقال تکانه به صورت میانگین، بدون بایاس خواهد بود، ضربات وارده به ذره بروانی در جهات مختلف با احتمال یکسان وارد می‌شود. علاوه بر این، قوانین تعادل پایا هستند^۲؛ که ایجاب می‌کند فرآیندهای $\xi(t)$ و $\xi(t+t)$ به ازای هر انتقال زمانی t ، از لحاظ آماری معادل باشند. و همچنین هر دو برخوردی از لحاظ آماری اتفاق‌های مستقل از یکدیگر فرض می‌شوند^۳. پذیرفتن فرض‌های فوق نیازمند ارضای این شرایط است،

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= 0, \\ \langle \xi(t)\xi(t') \rangle &= 2D\gamma^2\delta(t-t'), \end{aligned} \quad (14.1)$$

^۱ Deterministic Function

^۲ Stationary

^۳ فرض کنید A و B دو متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال به ترتیب $p_A(x)$ و $p_B(x)$ باشند. نیز تابع چگالی احتمال مشترک آن‌ها $p_{AB}(x, y)$ باشد. در صورتی A و B از لحاظ آماری مستقل خواهند بود که $p_{AB} \equiv p_A p_B$. همچنین دو متغیر تصادفی مستقل، ناهمبسته نیز هستند؛ به عبارتی، $\langle AB \rangle = \int \int xy p_{AB}(x, y) dx dy = \int x p_A(x) dx \int y p_B(y) dy = \langle A \rangle \langle B \rangle$. اما عکس قضیه تنها در حالتی برقرار است که A و B به طور مشترک گاوسی باشند.

برای تمام مقادیر t و t' . در ادامه علت حضور ثابت پخش D بیان خواهد شد اما در حال حاضر، این فقط یک ثابت مثبت است که مقدارش دامنه‌ی افت و خیزها در برخورد با فرآیند نوفه‌ای $^1 \xi(t)$ را مشخص می‌کند. در ۱۹۴۵، ونگ و اورنشتاین 2 [۳۸] نشان دادند که منطقی است، $\xi(t)$ را یک فرآیند گاوسی 3 در نظر بگیرند. این فرض ضمن این که با طبیعت گاوسی تابع توزیع تکانه‌ی ماکسول-بولتزمن در بمباران ملکول‌ها سازگار است، از جهات مهم دیگری نیز توجیه می‌شود 4 . ویژگی‌های توزیع نوفه‌ی گاوسی سفید $^5 \xi(t)$ ، منحصرًا از روی جملات مربوط به تابع خودهمبسته 6 و سوق در رابطه (۱۴.۱) تعریف می‌شوند 7 .

حال باید به بحث و تفسیر در مورد معادله دیفرانسیل تصادفی (۱۳.۱) می‌پردازیم. اولین گام در این راستا، حل این معادله با در نظر گرفتن ترم نوفه به عنوان یک تابع تحلیلی است. با استفاده از فرم کلی پاسخ حاصل [۳۹]، می‌توان مومنت‌های اول و دوم و همچنین توابع خود همبستگی و یا همبستگی متقابل میان $X(t)$ و $V(t)$ را به دست آورد. در این مرحله باید (۱۴.۱) مورد استفاده قرار گیرد. پاسخ به مقادیر اولیه $X(0)$ و $V(0)$ بستگی دارد که حتی می‌تواند کاتوره‌ای باشند. از جمله حالت‌های مورد علاقه، پاسخ تعادلی است که توسط یک توزیع سرعت مستقل از زمان (ماکسول-بولتزمن) مشخص می‌شود. این شرایط از طریق شرایط اولیه زیر حاصل می‌شوند:

$$\langle V(0) \rangle = 0 \equiv \langle V(t) \rangle, \quad \langle V^2(0) \rangle = \frac{\gamma D}{m} \equiv \langle V^2(t) \rangle. \quad (15.1)$$

باید توجه داشت که، برای یک ذره بروانی با یک درجه آزادی مکانیکی، همپاری انرژی ایجاب می‌کند داشته باشیم

¹ Noise Process

² Wang and Ornstein

³ Gaussian Process

⁴ $\{X(t)\}_{t \in I}$ یک فرآیند گاوسی نامیده می‌شود اگر توزیع هر بردار تصادفی با بعد محدود $X = (X(t_1), \dots, X(t_d))$ که $t_i \in I$ و $d \in N$ گاوسی چند متغیره باشد. فرآیند گاوسی صرفًا از طریق میانگین $\langle X(t) \rangle$ و تابع همبستگی‌اش $\langle X(t_1)X(t_2) \rangle$ تعریف می‌شود. این ویژگی حاصل قضیه ایزرلی *isserli's theorem* در تئوری احتمالات است. طبق این قضیه، برای یک فرآیند گاوسی با میانگین صفر، تمام مومان‌های فرد مقدار صفر دارند و مومان‌های زوج از طریق تابع همبستگی محاسبه می‌شوند.

⁵ Gaussian White Noise

⁶ نوفه سفید اشاره دارد به چگالی طیفی توان ثابت $\gamma k_B T$ $S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \langle \xi(0)\xi(t) \rangle dt = \gamma k_B T$. این نام مشابه مورد نور سفید است که تمام طول موج‌ها سهم یکسانی دارند.

⁷ Autocorrelation

⁸ از لحاظ ریاضی، کوواریانس دو متغیر تصادفی A و B به این صورت تعریف می‌شود، $Cov[A, B] = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$. کوواریانس از طریق واریانس $\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$ و $\sigma_A = \sigma_B$ به همبستگی ارتباط دارد، $Corr[A, B] = Cov[A, B] / \sqrt{\sigma_A^2 \sigma_B^2}$.

⁹ Cross-Correlators

$\langle V^2(0) \rangle = (RT)/(Nm)$ ، که T دمای محیط پیرامون است. به این ترتیب ثابت $D = (RT)/(N\gamma)$ تعریف می‌شود. علاوه بر این برای یک ذره کروی با شعاع r ، ضریب اصطکاک استوکس برابر است با $\gamma = 6\pi\eta r$ که دقیقاً همان معادله (۲.۱) را به دست می‌دهد؛ معادله‌ای که با توجیهی کاملاً متفاوت توسط اینشتین ارائه شد. اما آیا واقعا D برای این معادله لانه‌زین ضریب پخش است؟ برای میانگین مربع جابجایی در این فرآیند داریم (البته بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم $\langle X(0) \rangle = 0$)،

$$\begin{aligned} \langle X(t) \rangle &= 0, \\ \langle X^2(t) \rangle &= \frac{2D}{\gamma} [t/\tau - (1 - e^{-t/\tau})] \\ &= \begin{cases} \langle V^2(0) \rangle t^2, & \text{for } t \ll \tau, \\ 2Dt, & \text{for } t \gg \tau. \end{cases} \end{aligned} \quad (16.1)$$

این مقیاس زمانی $\tau = m/\gamma$ در واقع معیاری است برای سنجش رقابت میان نیروهای اصطکاک و اینرسی که در واقع دو رژیم زمانی را متمایز می‌کند. برای زمان‌های خیلی کوچک (تخمین لانه‌زین برای ذره بروانی معلق در سیال $\tau = 10^{-8} \text{ sec}$ بود)، میانگین مربع جابجایی متناسب با مربع زمان افزایش می‌یابد. این رژیم زمانی، رژیم بالستیک^۱ نامیده می‌شود. انگیزه‌ی این نامگذاری هنگام مقایسه با معادله اسملوکوفسکی (۱۲.۱) آشکار می‌شود: ذره‌ای که با تندی تعیینی $V_{det} = \sqrt{\langle V^2(0) \rangle}$ در حال حرکت است، دقیقاً چنین رفتاری نشان می‌دهد. هر چند که برخلاف پاسخ پیشنهادی اسملوکوفسکی، تندی و سرعت‌ها در این‌جا کاتوره‌ای هستند و با توجه به معادله (۱۵.۱) توزیعی مطابق با قانون ماکسول-بولتزمن دارند. زمان‌های بلند، ناحیه‌ی پخشی نام دارد، چنان‌که، می‌توان دید که رفتار میانگین مربع جابجایی کاملاً موافق با نتیجه (۵.۱) حاصل از مدل پخش اینشتین است. همچنین، طبیعت گاوسی بودن نوفه $\xi(t)$ به $X(t)$ و $V(t)$ منتقل می‌شود [۳۸]؛ به ویژه، مختصه مکانی $X(t)$ طبق معادله (۶.۱) توزیع می‌شود. در حقیقت، رفتار $X(t)$ ، در حالت حدی که تمام زمان‌های اندازه‌گیری و بازه‌های زمانی در مقیاسه به τ بسیار بزرگ هستند، همان فرآیند وینر است. یک تشابه جالب با اعمال مستقیم تقریب بر معادله لانه‌زین (۱۳.۱)، مشاهده می‌شود. با در نظر گرفتن پارامتر کوچک $\tau = m/\gamma$ ، می‌توان از ترم اینرسی (متناسب با m) در مقابل اصطکاک (متناسب با γ) صرف‌نظر کرد. در این صورت برای معادله به این نتیجه حرکت می‌رسیم:

$$V(t) = \frac{dX}{dt} = \frac{\xi(t)}{\gamma}. \quad (17.1)$$

^۱ Ballistic

حال اگر فرضاً در این‌جا، فرآیند $X(t)$ یک فرآیند وینر باشد، نوفه‌ی $\xi(t)$ متناسب خواهد بود با مشتق یک فرآیند وینر. در نتیجه، با وجود این‌که مسیرهای فرآیند وینر مشتق‌ناپذیر هستند، در این حالت حدی، این مشتق معنا پیدا کرده است. بنابر تعریف، حرکت طبق معادله لانژوین دارای سرعتی خوش‌تعریف است. اما در مقیاس‌های زمانی که اینرسی قابل چشم‌پوشی است، اثر ضربه‌های حاصل از $\xi(t)$ جابجایی‌های لحظه‌ای $\xi(t)dt = \gamma^{-1}(X(t+dt) - X(t))$ خواهد بود. از این رو، سرعت ذرات حداکثر شده و افت و خیز فراوان دارد.

دشواری‌های ریاضی در تعریف‌ها، با استفاده از تفسیر دووب^۱ [۴۰] از معادله لانژوین برداشته می‌شود. شکل اصلی آن (۱۳.۱) البته برای فیزیکدان‌ها بسیار با ارزش است؛ چراکه رهیافتی طبیعی و شهودی را جهت انتقال مسایل تعیینی و آشنای مکانیک، به دنیای حرکت‌های تصادفی فراهم می‌آورد. از طرفی، ریاضیدان‌ها صورت انتگرالی این معادله دیفرانسیل را ترجیح می‌دهند. انتگرال مورد بررسی، شامل $\xi(t')dt'$ به عنوان $dB(t')$ شناخته می‌شود که انتگرالی نسبت به یک فرآیند وینر است. این صورت دوم معادله با به‌کارگیری محاسبات تصادفی ایتو مورد بررسی قرار می‌گیرد.

بر مبنای این پایه‌های ریاضی، می‌توان با مسایل پیچیده‌تری روبرو شد. به عنوان نمونه، حرکت ذره تحت اثر پتانسیل خارجی $U(x, t)$ ، با اضافه کردن جمله‌ی مربوط به نیروی $\frac{\partial U}{\partial x}$ به معادله لانژوین (۱۳.۱) قابل بررسی است. این کار برای مورد پتانسیل هارمونیک $U(x) = m\omega^2/2$ ، توسط ونگ، اورناشتاین و اوهلن‌بک^۲ [۳۸، ۳۷] انجام شد. اما تا به امروز مساله مورد علاقه، فرمول‌بندی مسایل غیرتعیینی برحسب معادلات دیفرانسیل تصادفی بوده است. محاسبات تصادفی ایتو، قابلیت بررسی هرگونه معادله به فرم زیر را دارد،

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{a}(\mathbf{X}(t), t) + \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{X}(t), t)\xi(t). \quad (18.1)$$

$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ کمیتی برداری، $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, t)$ تابعی ماتریسی و $\xi(t)$ یک پروسه تصادفی است که مولفه‌هایش نوفه‌های سفید گاوسی از هم مستقلند. بردار \mathbf{X} در بردارنده‌ی تمام متغیرهای لازم جهت تعیین حالت سیستم در یک لحظه معین از زمان است. به عنوان مثال برای یک فرآیند وینر d بعدی، $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T$. جهت بازیافتن معادله لانژوین برای یک ذره بروانی یک بعدی، $\mathbf{X} = (X, V)^T$. همچنین مولفه‌های \mathbf{X} می‌توانند شامل زاویه، تکانه زاویه‌ای و سایر کمیت‌های فیزیکی باشند. بنابراین، می‌توان اثر حامل‌های بار برانگیخته گرمایی را (الکترون‌ها یا یون‌ها) با استفاده از متغیرهای حالتی به صورت $\mathbf{X} = (U_i, I_i)$ در نظر گرفت؛ که U_i و I_i به ترتیب ولتاژها و جریان‌های مختلف اندازه‌گیری شده در یک مدار الکتریکی هستند. برخلاف ظاهر مجرد و کلی‌اش، معادلاتی از قبیل (۱۸.۱) عموماً در متون فیزیکی به عنوان معادله لانژوین شناخته

^۱ Doob

^۲ Uhlenbec



شکل ۹.۱: سمت چپ: آدرین فوکر (۱۸۸۷-۱۹۷۲)، راست: ماکس پلانک (۱۸۵۸-۱۹۴۷)

می‌شوند.

۳.۴.۱ معادله فوکر- پلانک

بچلیبر (در متون مربوط به بازار سهام) و اینشتین (با مطالعه حرکت بروانی) نشان دادند که تابع چگالی احتمال حالت یک فرآیند وینر $B(t)$ در زمان t ، از یک معادله دیفرانسیل خطی، معادله (۴.۱)، پیروی می‌کند. حال سوال این است که آیا می‌توان معادله مشابهی برای دینامیک‌های پیچیده‌تری نظیر معادله حرکت لانژوین یافت؟ تلاش‌های قابل توجه در این زمینه در سال‌های پس از انتشار مقاله اینشتین در مورد حرکت بروانی، انجام شد. سرانجام معلوم شد که وابسته به هر معادله دیفرانسیل تصادفی (۱۸.۱)، یک معادله به صورت زیر وجود دارد [۴۱]،

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}; t) = - \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} [a_i(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}; t)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [b_{ij}(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}; t)]. \quad (19.1)$$

$p(\mathbf{x}; t)$ تابع چگالی احتمال pdf برای متغیرهای حالت \mathbf{x} است. توابع $a_i(\mathbf{x}; t)$ با مقادیر حقیقی، مولفه‌های $a_i(\mathbf{x}; t)$ هستند که در معادله (۱۸.۱) وجود داشت و ضرائب سوق^۱ نام دارند. به همین ترتیب، $b_{i,j}(\mathbf{x}; t)$ ها مولفه‌های $\mathbf{g}(\mathbf{x}; t)\mathbf{g}(\mathbf{x}; t)^T$ هستند که ضرائب پخش هستند. بسیار مهم است که تمایز میان معادله تعینی فوکر- پلانک برای چگالی احتمالی با مقدار حقیقی و معادله لانژوین تصادفی توضیح دهنده‌ی تحولات یک پدیده‌ی کاتوره‌ای، آشکار شود.

معادله (۱۹.۱) در ۱۹۳۱ توسط آندره کولموگروف [۴۲] معرفی شد و امروزه در متون مربوط به تئوری احتمالات به عنوان معادله پیشرو کولموگروف شناخته می‌شود. با قرار دادن $a(x; t) = 0$ ، $b(x; t) = 2D$ معادله پخش یک بعدی اینشتین و

^۱ Drift Coefficients

بچلیبر به دست خواهد آمد. آدریان فوکر^۱، در طی دوره‌ی دکتری تخصصی خود در کنار ماکس پلانک^۲ (که در ۱۹۱۳ پایان یافت)، در مطالعه بر روی دوقطبی‌های دوار^۳، به یک شکل کلی برای معادله (۱۹.۱) دست یافت [۴۲-۴۴]. در دنیای فیزیک، با نام معادلات فوکر-پلانک به این معادلات ارجاع می‌شود. در ۱۹۱۵ اسملوکوفسکی فرم عام معادله پخش را، که در حال حاضر به نام معادله اسملوکوفسکی می‌شناسیم، ارائه داد [۴۵]؛ معادله‌ای که سهم نیروهای خارجی را وارد می‌کند اما در محدوده‌ای کار می‌کند که ترم اینرسی قابل صرف‌نظر کردن است. در ۱۸۹۱، ریلی معادله دیفرانسیلی در فضای سرعت و در غیاب نیروهای خارجی را مورد مطالعه قرار داد [۴۶]. و سرانجام، معادله کلاین-کرامرز^۴، که به افتخار اسکار کلاین^۵ [۴۷] و هانس کرامرز^۶ [۴۸] نامگذاری شده است، شامل هر دو جمله‌ی نیروهای اینرسی و خارجی است. و در نهایت توانست توصیفی در فضای فاز کامل $\mathbf{x} = (x, v)$ فراهم آورد.

معادله‌ی (۱۹.۱) تکمیل‌کننده‌ی روش لانژوین است. معادله لانژوین صورتی کامل‌تر است، چراکه ویژگی‌های فرآیند تصادفی مورد مطالعه را تماماً تعیین می‌کند. معادله فوکر-پلانک تنها تابع چگالی احتمال متغیرهای حالت تک زمانی، $p(x; t)$ ، را توصیف می‌کند. این معادله در پیش‌بینی در مورد همبستگی‌های دوزمانه $\langle \mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2) \rangle$ ناکارآمد است. هرچند که، وقتی در مورد تحلیل یک تابع چگالی احتمال خاص صحبت می‌کنیم، معادله فوکر-پلانک با تمرکز خاص بر مساله، نتیجه بسیار چشم‌گیری ارائه می‌دهد. اگر یک معادله دیفرانسیل تعینی داشته باشیم، روش‌های دقیق و یا تقریبی بسیاری برآمده از تحلیل‌های استاندارد برای حل آن وجود دارد؛ روش‌هایی نظیر بسط ویژه توابع، جداسازی متغیرها و یا روش‌های پیچیده‌تر مربوط به مکانیک کوانتومی [۴۱]. علاوه بر این‌ها، شرایط مرزی به راحتی با استفاده از روش تصویر [۴۹] وارد می‌شود.

۵.۱ نوفه سفید گاوسی: رهیافتی جهان‌شمول برای مدل‌سازی افت و خیزها

کلیت موجود در معادله لانژوین (۱۹.۱) و معادله‌ی فوکر-پلانک (۱۸.۱) وابسته به آن بسیار جالب توجه و مهم است. حیطه کاربرد آن‌ها بسیار گسترده و فراتر از پخش ذرات پروانی است. ایده این است که تمام کمیت‌های اثرگذار بر متغیر دینامیکی تحت مطالعه $\mathbf{X}(t)$ را به دو سهم تعینی و افت و خیزها تقسیم کنیم. بخش تعینی رویهمرفته ساختار معادله

^۱ Adriaan Fokker

^۲ Max Planck

^۳ Rotating Dipoles

^۴ Klein-Kramers Equation

^۵ Oskar Klein

^۶ Hans Kramers

حرکت لانژوین را توصیف می‌کند. مولفه‌های افت و خیز اساساً از طریق نوفه (های) سفید گاوسی $\xi(t)$ وارد می‌شوند.

۱.۵.۱ کاربردها

نمونه‌های فراوانی از کاربرد معادله حرکت لانژوین در پتانسیل‌های دوره‌ای در کتاب ریسکن^۱ در ۱۹۸۹ [۴۱] ذکر شده‌اند شامل: همزمان‌سازی نوسانگر^۲، ترابرد حامل بار در رساناهای ابریونی^۳، جریان عبوری از اتصال تونل‌زنی جوزفسون^۴ (دو ابررسانا که توسط یک لایه نازک اکسید از هم جدا شده‌اند)، نوفه در حلقه‌های فازی بسته^۵ و نوفه در یک لیزر. علاوه بر این ذره بروانی دوار که قلب تئوری واهلش دی‌الکتریکی دبابی^۶ است [۳۹، ۴۱]، محاسبه‌ی پذیرفتاری در نظریه پاسخ خطی برای دوران دو قطبی‌ها در میدان خارجی را امکان‌پذیر می‌کند [۴۱].

کووفی^۷ در ۲۰۰۴ [۳۹] پراکندگی نور دینامیک و تئوری نرخ گریز کرامرز^۸ را نیز به کاربردها افزود [۴۱، ۴۸]. مورد دوم در اصل جهت توضیح شکست پیوندهای شیمیایی به دلیل محرک‌های گرمایی شکل گرفته بود. در این‌جا، متغیر $X(t)$ مکان کلاسیک نیست، بلکه نشان‌دهنده مختصات برهمکنش است؛ به عبارتی دیگر، فاصله بین دو قسمت ملکول شکسته شده [۳۹]. این تئوری فرمول‌بندی صریحی را برای نرخ گریز در هر سیستم فیزیکی دارای گریز از چاه پتانسیل به علت نوفه، فراهم می‌آورد. از موردهای کاربردی فراوان این تئوری می‌توان به واهلش دی‌الکتریک در بلورهای مایع مغناطیسی^۹، واهلش مغناطیسی ذرات فرومغناطیس ریز^{۱۰}، فیزیک لیزر و دینامیک اتصال‌های جوزفسون اشاره نمود.

از سویی دیگر، اگر مقیاس زمانی نوعی برای واکنش‌های شیمیایی نسبتاً کوچک باشد، در این صورت روند پیشروی آن توسط زمان مورد نیاز ذرات برای یافتن جفت‌هایشان در واکنش هدایت می‌شود. در این رژیم که واکنش محدود یا کنترل شده‌ی پخشی^{۱۱} [۵۰] نامیده می‌شود، اصولاً حرکت بروانی بر آمار و نرخ گذارها حاکم است.

^۱ Risken

^۲ Synchronisation

^۳ Superionic Conductors

^۴ Josephson Tunneling Junction

^۵ Phase Locked Loops

^۶ Debye Theory of Dielectric Relaxation

^۷ Coffey

^۸ Kramer's Escape Rate Theory

^۹ Nematic Liquid Crystals

^{۱۰} Fine Ferromagnetic Particles

^{۱۱} Diffusion-Limited or Diffusion-Controlled Reaction

در مدارهای الکتریکی، نوفه جانسون- نیکوویست^{۱۲} [۳۵، ۵۱، ۵۲] نوفه‌ایست که به علت برانگیخته‌گی‌های گرمایی حامل‌های بار (عموما الکترون‌ها) در رسانای الکتریکی در حالت تعادل تولید می‌شود، صرف نظر از هر نوع ولتاژ اعمال شده. نوفه گرمایی در یک مقاومت ایده‌آل با تقریب نوفه سفید است و دارای توزیعی نزدیک به گاوسی است [۵۳]. به این ترتیب، در هر موردی که نیاز به وارد کردن آثار نوفه گرمایی باشد، مطالعه‌ی معادله لانژوین برای جریان‌ها و ولتاژها از اهمیت برخوردار است.

آر. مازو^۱ در کتاب خود در ۲۰۰۲ [۵۴]، با بررسی واقطیدگی تابشی^۲ ملکول‌های در محلول‌ها در این زمینه نقشی ایفا کرد. او در این کار، به شرح کامل مدلی ساختگی برای پخش پلیمرها پرداخت و لیست بزرگی از مرجع‌ها در این زمینه گردآوری نمود.

حرکت بروانی فعال^۳ (که معادله حرکت لانژوین است با ترم اصطکاک غیرخطی $\mathbf{a}(\mathbf{X})$) در کاربردهای زیست‌شناسی دارای اهمیت فراوانی است؛ کاربردهایی مانند توصیف الگوهای حرکتی خودکشی^۴: نظیر ترابرد جهت‌دار در سلول‌های زنده یا رفتار ازدحام تجمعی^۵ [۵۵]. با توجه به این که اولین بار معادله پخش به صورت آماری توسط بچلیر در حیطه بازار سهام مطرح شد، عجیب نبود که معادله لانژوین نقش مهمی در ریاضیات مالی جدید داشته باشد. مدل بلک- شولتز^۶ تحول قیمت سهام $X(t)$ تحت اثر افت و خیزها را توضیح می‌دهد [۵۶]. این مدل برحسب معادله لانژوین دارای نوفه‌ی افزایشنده^۷ فرمول‌بندی می‌شود: نوفه‌ی حاضر در معادله (۱۸.۱) ثابت نیست بلکه متناسب است با $X(t)$. و این تغییر حرکت بروانی هندسی^۸ را تولید می‌کند که در واقع فرآیند وینر نمایی با ترم سوق است. از این رو، $X(t)$ همواره مثبت است و با استفاده از نمونه‌های افزایشنده‌ی مستقل و توزیع نرمال لگاریتم^۹ مشخص می‌شود.

^{۱۲} Johnson-Nyquist Noise

^۱ Mazo

^۲ Fluorescence Depolarisation

^۳ Active Brownian Motion

^۴ Self-Propelled

^۵ Collective Swarming Behaviour

^۶ Black-Scholes Model

^۷ Multiplicative Noise

^۸ Geometric Brownian Motion

^۹ Log-Normal

۲.۵.۱ متغیرهای سریع نسبت به متغیرهای کند

موضوع اصلی مطالعات تحلیلی لانتزومین، حرکت بروانی بود. به جای وارد کردن برهمکنش‌های پیچیده با دینامیک محیط پیرامون، لانتزومین پیشنهاد به کارگیری معادلات حرکت تصادفی اش (۱۳.۱) را داد. بنابراین، تمام آثار حاصل از محیط توسط ترم اصطکاک خطی γV - و نوفه سفید گاوسی $\xi(t)$ جمع می‌شوند. مطمئناً این روشی بسیار جالب توجه است، چراکه درکی شهودی فراهم کرده و اجازه‌ی بسط روش به مسایل دیگر (نظیر کاربردهای ذکر شده) را می‌دهد. هرچند که این روش پیشنهادی، روشی پدیده‌شناختی است. یک توجیه ابتکاری (ذهنی) برای این رهیافت، براساس جداسازی مقیاس‌های زمانی است که در ادامه بیان می‌شود.

سیستم‌هایی که در بالا به آن اشاره شد، با وجود تنوع در موضوعات آن‌ها، در یک مورد مشترک هستند. از یک سو، متغیر یا متغیرهایی هستند که دینامیک آن‌ها مورد مطالعه است $\mathbf{X}(t)$. از طرفی دیگر، رفتار این متغیرها با محیط نوفه‌ای پیرامون یا به بیان فیزیکی، با یک حمام گرمایی^۱ جفت شده است. این حمام گرمایی، خود تشکیل شده است از یک مجموعه‌ی دینامیکی شامل تعداد بسیار زیادی درجه آزادی، که اجزای تشکیل دهنده‌ی آن در مقایسه با متغیر دینامیکی مورد مطالعه، خیلی سریع عمل می‌کنند: قیمت سهام می‌تواند هر ماه یک مرتبه ثبت شود؛ اما در طی این بازه هزاران سهم تغییر مالکیت دارند. این برهمکنش‌ها به صورت مجزا بر متغیر کندتر $\mathbf{X}(t)$ اثر قابل توجهی ندارند، بلکه اثر جمعی تمام ذرات بر این متغیر وارد می‌شود. به این دلیل، تمرکز بر آثار آماری میانگین (زمانی) است. از سویی دیگر، همبستگی میان برهمکنش‌های متوالی باید به سرعت از بین برود تا در مقایسه با حرکت متغیر دینامیکی قابل چشم‌پوشی باشد. به عنوان مثال، بلافاصله بعد از برخورد ذره بروانی با ملکول سیال، حرکت آن‌ها همبسته است؛ اما زمانی که دوباره با یکدیگر روبرو می‌شوند، ملکول سیال آنقدر با دیگر ملکول‌های سیال برخورد داشته است که همبستگی آن با ذره بروانی به کلی از بین رفته است. این شرایط، علت به کارگیری نوفه سفید (یا همبستگی به صورت تابع دلتا δ) در رهیافت لانتزومین را توجیه می‌کند.

می‌توان این موارد را با استفاده از یک روش دقیق‌تر و کمی‌تر، با به کار گرفتن ابزارهای ماهرانه‌ای همچون عملگرهای مسیر موری-سوانسیش^۲ [۵۸، ۵۷] نیز انجام داد. این فرآیند برای ذرات بروانی سنگین در گاز یا سیال، در مرجع [۵۴] بررسی شده است. با شروع از معادله لیوویل^۳ تعیینی، متغیرهای سریع به نفع کندترها حذف می‌شوند و منجر به معادله حرکت لانتزومین می‌شود. بدین وسیله حتی می‌توان رابطه میکروسکوپی میان اصطکاک و ضریب پخش را یافت^۴. اما

^۱ Heat Bath

^۲ Mori-Zwanzig Projection Operators

^۳ Liouville Equation

^۴ لانتزومین رابطه میان اصطکاک و ضریب پخش را با استفاده از معادله‌ای دیگر به دست آورد، مستقل از معادله حرکتش. در این رابطه او به همپاری انرژي در تعادل نیاز داشت.

این ریاضیات بدیهی نیستند و بسط آن به سیستم‌های پیچیده‌تر چالش برانگیز بوده و حتی برای بسیاری از مسایل، دستیابی به پاسخ نهایی میسر نیست. در حقیقت، روش موری-سوانسیش، روشی برجسته برای توجیه حرکت بروانی نیست، بلکه حدود اعتبار آن را نشان می‌دهد. تحلیل دقیق نیازمند عمومیت دادن روش لائوین است؛ که در درجه اول نوفه غیر همبسته و اصطکاک خطی را زیر سوال می‌برد. مثال‌هایی در این مورد را می‌توان در مرجع [۵۴] در بحث حرکت بروانی در سیال چگال و در همین مرجع و نیز [۵۹] در مورد شبکه‌ی فنرهای هارمونیک^۱ مشاهده کرد.

۳.۵.۱ موضوعات جالب توجه

یک سوال قابل توجه این است که چگونه پدیده‌های گوناگونی نظیر آنچه در بالا ذکر شد، با وجود این همه تفاوت توسط یک معادله تصادفی (۱۸.۱) توصیف می‌شود. چطور مکانیزم‌های افت و خیزی که از لحاظ میکروسکوپی به شدت متفاوت از هم هستند- ناخالصی‌های پراکنده‌ی پرتو لیزر، برانگیختگی گرمایی حامل بار، کره سخت یا تکانه مغناطیسی، معادلات در بازار بورس- قابل مطالعه از طریق یک مدل نوفه ریاضیاتی $\xi(t)$ است؟ به‌ویژه چرا از نظر آماری نوفه گاوسی است؟ پاسخ متخصصان آماری این است که: گاوسی بودن ناشی از قضیه حد مرکزی است. دسته وسیعی از پدیده‌ها در زمان‌های بلند از لحاظ ریاضی میل به فرآیند گاوسی دارند. فرم کلی قضیه به این صورت است. فرض کنید که علاقه‌مند به اطلاعات آماری مجموع یک سری متغیر کاتوره‌ای مستقل از هم δX_j هستیم که توزیع احتمال یکسانی دارند؛ یعنی،

$$X(n) = \sum_{j=1}^n \delta X_j. \quad (20.1)$$

میانگین و واریانس مشترک آن‌ها را به ترتیب با $\mu = \langle \delta X_j \rangle$ و $\sigma^2 = \langle \delta X_j^2 \rangle - \mu^2$ نشان می‌دهیم. حال مجموع نرمال شده را به این صورت در نظر می‌گیریم،

$$X'(n) = \frac{X(n) - \mu n}{\sqrt{\sigma^2 n}}, \quad (21.1)$$

که تابع چگالی احتمال آن $p'(x'; n)$ است. حال، قضیه حد مرکزی چنین بیان می‌دارد که برای n های بزرگ، این چگالی احتمال به سمت تابع گاوسی میل می‌کند؛ به بیانی دیگر،

$$p'(x'; n) \rightarrow p'(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x'^2}{2}\right) \quad (n \rightarrow \infty). \quad (22.1)$$

^۱ Lattice of Harmonic Springs

به نتایج این قضیه برای فرآیندهای تصادفی می‌پردازیم. دو دیدگاه در مورد این قضیه مطرح می‌کنیم. از یک سو، می‌توان مجموع $X(n)$ را به عنوان ول‌گشت یک بعدی تعبیر کنیم؛ حرکت خطی مرحله به مرحله با طول گام کاتوره‌ای. این نگاه درک بهتری از تئوری کلاسیک حرکت بروانی فراهم آورده و به پیدا کردن ارتباط آن‌ها کمک می‌کند. از طرفی دیگر، می‌توان این‌طور به مساله نگاه کرد که δX_j ها اغتشاش‌های کوچک مقیاس^۱ در محیط نوفه‌ای هستند. اگر در مقیاس مشاهده، تنها آثار تجمعی بزرگ این رفتار میکروسکوپی قابل تشخیص باشد، در این صورت نیازمند مطالعه‌ی نمو $X(n)$ خواهیم بود. این نوع تحلیل‌ها نشان دهنده‌ی اهمیت نوفه گاوسی در تئوری تصادفی هستند، ضمن این‌که محدودیت‌های آن را نیز بر ملا می‌کند.

قضیه حد مرکزی برای ول‌گشت

ابتدا تصویر ول‌گشت را بررسی می‌کنیم. در این دیدگاه، δX_j طول گام زام است. فرض می‌شود که، طول‌های کاتوره‌ای گام‌ها به صورت مستقل از یکدیگر و یکنواخت توزیع شده‌اند. برای مثال، حرکت یک بعدی پیرسون، با احتمال یکسان دارای طول گام‌های گسسته $+l$ یا $-l$ δX_j است. در این صورت خواهیم داشت، $\mu = 0$ و $\sigma^2 = l^2$. در حرکت پیرسون دوبعدی، مختصه x توزیعی پیوسته دارد: برای یک تک گام داریم، $\delta X_j = l \cos(\theta_j)$ ، که هر θ_j به صورت یکنواخت از بازه $[0; 2\pi]$ انتخاب می‌شود. در این مورد داریم، $\mu = 0$ و $\sigma^2 = l^2 \langle \cos^2(\theta_j) \rangle = l^2/2$. ول‌گشت با $\mu \neq 0$ ، حرکت بایاس شده نام دارد.

حال با فرض این‌که n بسیار بزرگ باشد به مطالعه‌ی تابع چگالی احتمال $p(x; n)$ برای مختصه مکان ول‌گشت $X(n)$ ، می‌پردازیم. مستقیماً از (۲۱.۱) و (۲۲.۱)، می‌توان نتیجه گرفت که $p(x; n)$ تقریباً گاوسی بوده و دارای میانگین μn و واریانس $\sigma^2 n$ می‌باشد. برای این‌که بتوان ول‌گشت را یک فرآیند واقعی در نظر بگیریم، یک مختصه زمانی $t = n\tau$ تعریف می‌کنیم که τ زمان سپری شده بین هر دو گام متوالی است. در نهایت طبق قضیه حد مرکزی،

$$p(x; n) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{(x - vt)^2}{4Dt}\right), \quad t \gg x^2/D. \quad (23.1)$$

در اینجا، سرعت سوق $v = \mu/\tau$ و ثابت پخش $D = \sigma^2/(2\tau)$ به عنوان پارامترهای فیزیکی قابل اندازه‌گیری معرفی شده‌اند. نکته قابل ذکر، جهان‌شمولی این نتیجه است. مستقل از جزئیات آماری طول گام‌ها، توزیع مختصه مکانی تقریباً گاوسی است؛ و یک روند ثابت $\langle X(t) \rangle = vt$ وجود دارد و مربع پهنا به صورت خطی با زمان افزایش می‌یابد

^۱ Small Scale Distortions

^۲ Drift

برای نمونه، اینشتین، به معادله (۶.۱) دست یافت، که معادل است با نتیجه (۲۳.۱) به ازای $v = 0$. در واقع او به صورت ضمنی، رهیافت ول‌گشت را به کار برده است: طول گام‌ها در روش او بر حسب تابع متقارن $\phi(\Delta)$ تعریف شده است. مورد خاص‌تر، ول‌گشت پیرسون در صفحه است. هر دو مختصه x و y ول‌گشت بدون بایاس با واریانس $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = l^2/2$ را نشان می‌دهند. درحالی‌که، حرکت در راستاهای x و y از نظر آماری مستقل نیستند (چراکه از طریق زاویه چرخش θ_j به یکدیگر مرتبطند)، نسبت به هم غیرهمبسته هستند: $\langle \delta X_j \delta Y_j \rangle = l^2 \langle \cos(\theta_j) \sin(\theta_j) \rangle = 0$. در چنین موردی، تعمیم قضیه حد مرکزی برای جمع بردارهای کاتوره‌ای، منجر به نتیجه $p(x, y; t) = p(x; t)p(y; t)$ می‌شود، که هر کدام از $p(x; t)$ و $p(y; t)$ خود دارای توزیع گاوسی (۲۳.۱) هستند. برای مختصه دایروی $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $D = D_x + D_y = l^2/(2\tau)$ که $p(r; t) = [r/(Dt)] \exp[-r^2/(2Dt)]$ دست یافت، که ضریب پخش دو بعدی است. و این دقیقاً مطابق است با همان نتیجه‌ی حدی؟؟ که رایلی (با به کار بستن مختصات استاندارد $n = t/\tau$ و $r' = r/l$) به دست آورد.

هرچه نسبت $x^2/(Dt)$ بزرگ‌تر باشد، تقریب گاوسی (۲۳.۱) دقیق‌تر می‌شود. عدم دقت در نواحی انتهای توزیع^۱ (دم توزیع) به چشم می‌خورد؛ از این رو نام "قضیه حد مرکزی" مناسب به نظر می‌رسد. از این مرحله به بعد، فرض می‌شود که رابطه (۲۳.۱)، عبارتی دقیق برای فرآیند $X(t)$ است. می‌توان با میل دادن τ و σ^2 به سمت صفر و ثابت نگه داشتن D ، به این حد دست یافت. در این صورت، $X(t)$ حد مقیاسی یا پخشی (به دلیل بازمقیاس کردن در رابطه (۲۱.۱)) ول‌گشت $X(n)$ خوانده می‌شود. باید توجه داشت که، به علت نحوه‌ی ساخت بر حسب طول گام‌هایی با توزیع یکنواخت و مستقل از هم، نمونه‌های فرآیند $X(t_2) - X(t_1)$ ، در صورت عدم همپوشانی بازه‌های زمانی، از یکدیگر مستقل هستند. همچنین، این نمونه‌ها گاوسی با واریانس $2D|t_2 - t_1|$ هستند، البته به این شرط که فقط بتوان اختلاف زمان‌های فراتر از $\tau \gg |t_2 - t_1|$ را تشخیص داد. این نکات فرد را به سمت این نتیجه‌گیری سوق می‌دهد که، حد مقیاسی ول‌گشت $X(n)$ در واقع یک فرآیند وینر مقیاس شده با روند ثابت است، $X(t) = vt + \sqrt{2D}B(t)$. می‌توان این عبارت را با استفاده از قضیه‌ای از دونسکر^۲ به دقت فرمول‌بندی و به صورت ریاضی اثبات نمود.

قضیه حد مرکزی، به روش‌های مختلف قابلیت تعمیم دارد. الکساندر لیاپانوف^۳ رشته‌ای از طول گام‌های مستقل δX_j را در نظر گرفت که امکان تنوع در توزیع آن‌ها وجود داشت. با توجه به این نکته، مومنت‌های بالاتر توزیع طول گام‌ها، با افزایش n غالب نمی‌شوند، بلکه به سمت گاوسی میل می‌کند. لیاپانوف شروط لازم و دقیق برای این رفتار را در مرجع [۶۰]

^۱ Far Tails of Distribution

^۲ Monroe D. Donsker

^۳ Alexandr Lyapunov

ارائه داد که در ادامه توسط لیندبرگ^۴ اصلاح شد [۶۱]. در این مورد، حد مقیاسی $X(t)$ توزیع گاوسی (۲۳.۱) دارد، اما ضرائب وابسته به زمان خواهند بود، $v = v(t)$ و $D = D(t)$.

حال سوالی که می‌تواند مطرح شود این است که آیا یک رشته‌ی پایا δX_j با بستگی ذاتی^۱، همچنان به حد گاوسی تمایل دارد یا نه. اما این سوالی بسیار ظریف است. پاسخ مثبت است اگر δX_j ها در زمان با یکدیگر آمیخته باشند. این بدین معناست که، طول گام‌هایی که از لحاظ زمانی از یکدیگر دورند، مستقل از هم هستند. هرچند، این که دقیقاً چه ویژگی‌هایی از این طول گام‌ها ترکیب شده‌اند، تعاریف متفاوتی دارد. مفاهیم مختلفی در این زمینه وجود دارد، برخی شهودی و برخی مجرد؛ برای بررسی دقیق ریاضی مرجع [۶۲] مناسب است. تعیین این که آیا جمع یک سری گام‌های وابسته نهایتاً به یک متغیر کاتوره‌ای گاوسی می‌رسد یا نه بسیار پیچیده است. حتی اگر این گرایش به توزیع گاوسی وجود داشته باشد، تضمینی نیست که حد مقیاسی $X(t)$ عاری از هرگونه وابستگی درونی باشد. دو مثال حرکت بروانی مربوط، ول‌گشت اسملوکوفسکی و معادله حرکت لانژوین هستند. در هر دو مورد، نمونه‌های فرآیند در ابتدا به شدت همبسته هستند: به علت اینرسی ذره، حرکت پایدار است. اما در زمان‌های بزرگ نسبت به زمان همبستگی^۲، تقریب فرآیند وینر برقرار خواهد بود.

قضیه حد مرکزی برای نوفه کاتوره‌ای

حضور فرآیند وینر در تئوری فرآیند تصادفی، همواره به چشم می‌خورد. نوفه سفید گاوسی به مشتق فرآیند وینر ارتباط دارد. حال باید فرآیند را با حضور قضیه حد مرکزی بازبینی نمود. بدین منظور، متغیرهای δX_j را حاصل از برهمکنش‌ها با محیط به شدت افت و خیز دار پیرامون خواهیم دانست. به عنوان مثال، این متغیرها می‌توانند انتقال تکانه‌ی ناشی از برخورد میان چند ذره را مدل‌سازی کنند. کمیت مورد مطالعه می‌تواند تحت اثر پدیده‌های دیگری نیز باشد، اما بخش کاتوره‌ای، فقط حاصل از δX_j است.

به صورت خلاصه، متغیرهای δX_j تنها منشا نوفه تصادفی هستند. حال فرض کنیم که کمیتی که تحت اثر این نوفه است، به آرامی به این محرک‌ها واکنش می‌دهد. که علت می‌تواند اینرسی بالای کمیت باشد یا حضور یک اثر خارجی بسیار قوی اما کند تغییر. در این صورت، یک δX_j به تنهایی اثری نداشته و می‌توان از نوفه‌ی^۲ موثر صحبت کرد،

$$\xi_{\bar{\tau}}(t) = \frac{\gamma}{\bar{\tau}} \sum_{j=t/\bar{\tau}}^{(t+\bar{\tau})/\bar{\tau}} \delta X_j = \frac{\gamma}{\bar{\tau}} [X(t+\bar{\tau}) - X(t)]. \quad (24.1)$$

^۴ Jarl Waldemar Lindeberg

^۱ Inherent Dependence

^۲ Effective Noise

در این رابطه، فرض شده است که τ یا زمان بین دو شوک پیاپی وارد شده توسط نوفه، بسیار کوچک‌تر از $\bar{\tau}$ است. $\bar{\tau}$ زمان نوعی را نشان می‌دهد که نیاز داریم تا جهت شکل دادن یک اثر قابل تشخیص برای جسم آرام، میزان کافی از آثار حاصل از نوفه‌ها را جمع کنیم (ضرایب وارد شده که قطعاً به سیستم مربوطه بستگی دارند، به منظور سازگاری با فرمول‌بندی حرکت بروانی است).

در این متن، قضیه حد مرکزی به این طریق بیان می‌شود. نخست، تحت شرایط مناسب حاکم بر نوفه میکروسکوپی δX_j (شرایط لیابانوف، لیندبرگ یا ترکیبی)، توزیع نوفه موثر $\xi_{\bar{\tau}}(t)$ تقریباً گاوسی است. سپس، از میان جزئیات آماری نوفه میکروسکوپی δX_j ، تنها میانگین μ_j و واریانس σ_j کمیت‌های مربوط خواهند بود که به ترتیب مرکز و پهنای آن‌را نشان می‌دهند. می‌توان نوفه موثر را به دو بخش تقسیم نمود، $\xi_{\bar{\tau}}(t) = \xi_{\bar{\tau}}^{drift}(t) + \xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t)$. جمله اول، جمله‌ی سوق بوده و میانگین تجمعی μ_j را نشان می‌دهد. این نوفه، تعینی است و تحول میانگین نوفه کل را بیان می‌دارد: $\langle \xi_{\bar{\tau}}(t) \rangle = \xi_{\bar{\tau}}^{drift}(t)$. جمله دوم از دل افت و خیزهای میکروسکوپی σ_j بیرون می‌آید. که میانگین صفر دارد و انحراف‌های کاتوره‌ای از رفتار سوق تعینی را نشان می‌دهد: $\langle [\xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t)]^2 \rangle - \langle \xi_{\bar{\tau}}(t) \rangle^2 = \langle [\xi_{\bar{\tau}}(t)]^2 \rangle$. به این ترتیب منطقی است که آثار سوق را به این صورت تعبیر کنیم که گویا یک اثر تعینی خارجی دیگری وجود دارد. به عنوان مثال، برطبق معادله لانژوین (۱۳.۱)، یک ذره بروانی با سرعت معلوم v دو نوع نیرو را تجربه می‌کند که هر دو از برهمکنش با ملکول‌های سیال نشات می‌گیرند. از یک سو، فرکانس برخورد ذرات برای $v \neq 0$ غیرمتقارن است. که به صورت میانگین منجر به یک شتاب منفی خالص - می‌شود. از سویی دیگر، کاتوره‌ای بودن برخورد ذرات از طریق نوفه جداگانه‌ای $\xi(t)$ وارد می‌شود که بایاس نشده است.

در نهایت حالتی را در نظر می‌گیریم که سهم افت و خیزها پایا است، $\sigma_j \equiv \sigma$ ، نیز بازه زمانی بستگی در رشته‌ی نوفه‌ای میکروسکوپی δX_j در مقایسه با $\bar{\tau}$ بسیار کوچک است. این شرط تضمینی است براین‌که نوفه $\xi_{\bar{\tau}}$ قابل تقریب بر حسب فرآیند وینر است. در این حالت، حد مقیاسی با ثابت پخش $D > 0$ به این صورت خواهد بود: $\xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t) = \gamma \bar{\tau}^{-1} \sqrt{2D} [W(t + \bar{\tau}) - W(t)]$. به عبارتی دیگر، $\xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t)$ یک فرآیند گاوسی است:

$$\langle \xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t) \xi_{\bar{\tau}}^{fluct}(t') \rangle = \frac{2D\gamma^2}{\bar{\tau}} \begin{cases} 0, & |t - t'|, \\ \left(1 - \frac{|t - t'|}{\bar{\tau}}\right), & 0 < |t - t'| < \bar{\tau}, \\ 1, & |t - t'|. \end{cases} \quad (25.1)$$

در مرحله از هر دو ویژگی مستقل بودن و پایاییِ نمونه‌های فرآیند وینر استفاده شد. با مقایسه مستقیم با معادله (۱۴.۱)

می‌توان دریافت که برای تمامی اهداف، نوفه‌ی موثر $\xi_{\tau}^{fluct}(t)$ مانند نوفه سفید گاوسی رفتار می‌کند. دقیقاً نوفه سفید نیست بلکه تنها در مقیاس‌های زمانی از مرتبه τ شبیه است.

باید توجه نمود که ویژگی آماری نوفه‌های میکروسکوپی و گسسته δX_j لزوماً گاوسی نیست. آن‌ها مجاز هستند تا با تغییر τ تغییر کنند یا دو به دو به هم وابسته باشند. به موجب قضیه حد مرکزی، آثار تجمعی آن‌ها در زمان‌های بلند، به‌خوبی با فرآیند نوفه سفید گاوسی تقریب زده می‌شود. این امر حضور همیشگی آن‌ها در مدل‌سازی‌های تصادفی را توجیه می‌نماید. تاریخچه قضیه حد مرکزی بازمی‌گردد به مطالعات مویوره^۱ در سال ۱۷۳۳ بر روی توزیع برنولی و لاپلاس در ۱۸۱۲. اولین فرمول‌بندی دقیق برای قضیه در حالت کلی در ۱۹۰۱ توسط لیاپانوف [۶۳] صورت گرفت. همانند دیگر موضوعات مطرح در تئوری احتمالات، زمینه‌های مختلف این قضیه نیز با آغاز قرن بیست و یکم شروع به رشد نمود. سهم عمده در این راستا به میسس^۲، پولیا^۳، لیندبرگ، لوی و کرامر^۴ تعلق دارد [۶۳].

۱.۶ پخش غیر عادی و نوفه: نه گاوسی و نه سفید

روش حذف متغیرهای سریع و قضیه حد مرکزی اساسی را برای تئوری‌های مبتنی بر معادلات لانژوین و فوکر-پلانک فراهم می‌آورند. از طرفی، کمی بررسی دقیق‌تر محدودیت‌های این رهیافت‌ها را نشان می‌دهد. به طور کلی باید در سیستم‌های پیچیده و محیط‌های شامل ناخالصی انتظار شکست تئوریهای کلاسیک پخش و نویز را داشت. چنین رفتاری متفاوت با آنچه معمول است، دینامیک غیرعادی نامیده می‌شود و البته نیازمند طبقه‌بندی جزئی‌تری است.

سیستم‌های دور از حالت تعادل حلقه دوار^۵ آزمایش ساده‌ای که در سال ۱۹۹۳ با استفاده از یک حلقه دوار انجام شد (تصویر ۱۰.۱) [۶۴، ۶۵] نوعی فرآیند پخش را نشان داد که بسیار متفاوت بود از آنچه تا آن زمان توسط تئوری حرکت بروانی اینشتین بررسی شده بود. آب از طریق روزنه‌های I وارد حلقه شده و از طریق حفره‌های O خارج می‌شود. حلقه کاملاً پر از آب می‌شود و مانند جسم صلب شروع به دوران می‌کند (دیواره‌های درونی و بیرونی با هم دوران می‌کنند). پمپاژ سیال درون حلقه یک جریان متلاطم^۶ ایجاد می‌کند. دوربینی تعبیه شده بر روی حلقه شکل‌گیری گرداب‌های متلاطم^۷

^۱ de Moivre

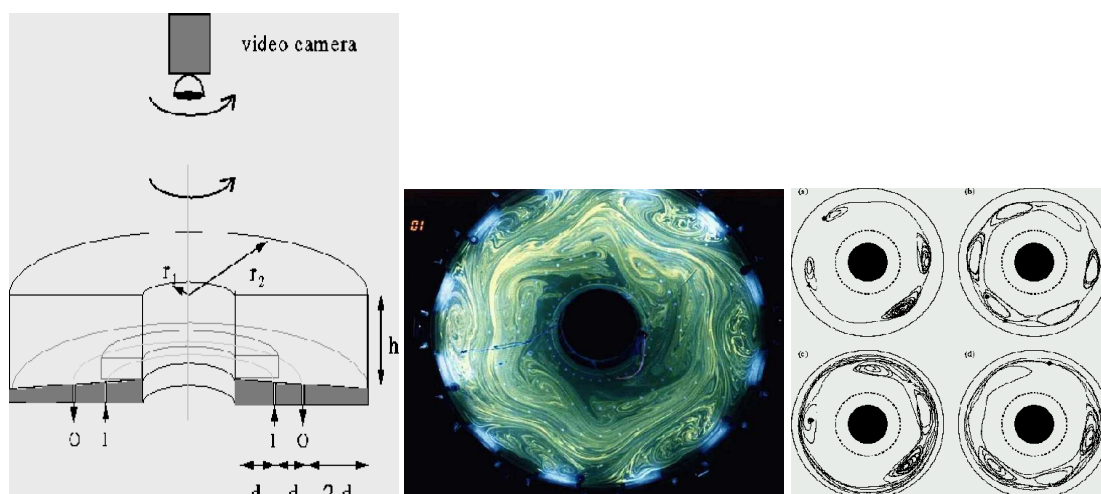
^۲ Mises

^۳ Polya

^۴ Cramer

^۵ The rotating Annulus

^۶ Turbulent Flow



شکل ۱۰.۱: تصویر چپ: حلقه دوار. تصویر میانی: گرداب‌های تشکیل شده درون حلقه دوار که توسط دوربین ضبط شده است. تصویر راست: مدارهای نوعی نشان دهنده‌ی مسیر ذرات درون حلقه دوار [۶۴، ۶۵].

درون حلقه دوار را ضبط می‌نمایند و به این ترتیب امکان ردیابی مسیر ذرات متفاوت تزریق شده به سیال و مشاهده آن‌را فراهم می‌آورد. در حالت معمول پخش که در سیالات نزدیک به تعادل رخ می‌دهد، مسیرهای ذره توسط گام‌های نامنظم اما کوتاهی مشخص می‌شوند که باعث می‌شود مسیرها بی‌نظم اما همگن باشند (تصویر ۵.۱). اما مسیرهای حاصل برای ذرات در یک حلقه دوار به شدت متلاطم که بسیار دور از حالت تعادل است، نوعی مدارهای متفاوت با دو ویژگی بارز و مهم را نشان می‌دهند. در واقع مشاهده می‌شود که گاهی ذرات درون گرداب‌ها به دام افتاده‌اند^۱ و به صورتی غیر معمول زمانی طولانی را در یک ناحیه کوچک سپری نموده‌اند. و یا گاهی ذرات گام‌های بلندی برداشته و با یک قدم مسیر بسیار بلندی (حتی در مواردی به اندازه تمام محیط حلقه) طی نموده یا به بیانی دیگر پروازهای بلندی انجام داده‌اند.

مهاجرت سلول‌ها تصویر (۱۱.۱) مسیر یک تک سلول زیستی را نشان می‌دهد که بر روی زیرلایه‌اش می‌خزد [۶۶]. تقریباً تمام سلول‌ها بدن انسان حتی برای یک مرتبه در عمرشان هم که شده در بازه‌ای از زمان در حرکت هستند. پدیده‌هایی چون رویان زایی^۲، التیام زخم^۳، سیستم ایمنی بدن^۴ و سلول‌های تشکیل‌دهنده تومور متاستاز^۵ از جمله موارد معروفی هستند که بر اساس مهاجرت سلول‌ها استوارند. با مقایسه مسیر مهاجرت این سلول‌ها (۱۱.۱) با یک ذره بروانی (تصویر ۵.۱) ممکن به

^۷ Turbulent Eddies

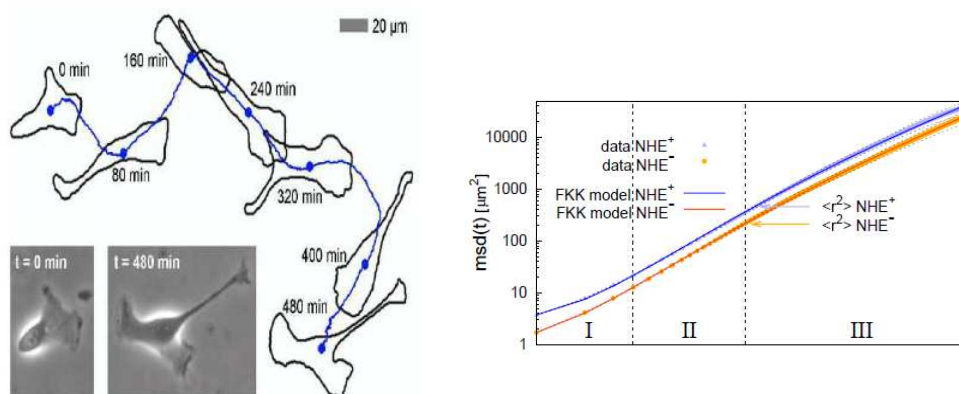
^۱ Trapping

^۲ Embryogenesis

^۳ Wound-Healing

^۴ Immune Defense

^۵ The Formation of Tumor Metastases



شکل ۱۱.۱: تصویر چپ: مسیر حرکت سلول بر روی زیرلایه اش. سلول در طول مسیر خود بارها شکل و جهت حرکتش را تغییر می‌دهد. تصویر درونی تصاویر فاز کنتراست در ابتدا و انتهای مسیرش را نشان می‌دهد. تصویر راست: نمودار تمام لگاریتمی میانگین مربع جابجایی نسبت به زمان برای مسیر حرکت دو نوع سلول متفاوت است [۶۶].

دشواری بتوان تفاوتی بنیادی همانند مورد حلقه دوار را در این جا یافت. آزمایشی که اکنون به آن می‌پردازیم [۶۶]، بر روی دو گونه از سلول‌های تبدیل یافته اپیتیکال کلیوی^۱ ($MDCK - F$) صورت گرفته است: $(NHE+)$ ^۲ و (NHE) ^۳. طبق رابطه (۷.۱) برای ذره بروانی در زمان‌های بلند، میانگین مربع جابجایی متناسب با زمان است، اما شکل (۱۱.۱)، سمت راست) نشان می‌دهد که هر دو نوع سلول متفاوت با این پیش‌بینی رفتار می‌کنند. نخست، سلول‌های (NHE) با بازده کمتری نسبت به $(NHE+)$ حرکت می‌کنند که منجر به MSD کمتری در همه زمان‌ها می‌شود. می‌توان دید که MSD برای هر دو گونه سلول، گذاری را در سه ناحیه دینامیکی بروز می‌دهد. در ناحیه میانی I میانگین مربع جابجایی به بیشترین مقدار افزایش خود می‌رسد و وقتی مربع مسافت سلول بیش از شعاع مربع میانگین خودش می‌شود، شیب نمودار کاهش می‌یابد. از این رو هر دو سلول رفتاری متفاوت از ذره بروانی دارند.

تغییرات جریان بر حسب زمان در نیم رساناهای آمورف اساس کارکرد دستگاه‌های فوتوکپی و پرینت لیزری، ترابرد الکترون‌ها یا خفزه‌ها^۴ در نیم رساناهای آمورف^۵ و تحت میدان الکتریکی است. در اوایل ۱۹۷۰، مشخص شد که نمی‌توان جابجایی این حامل‌های بار را با استفاده از معادله پخش معرفی شده توسط اینشتین توصیف نمود (تصویر ۱۲.۱). مساله

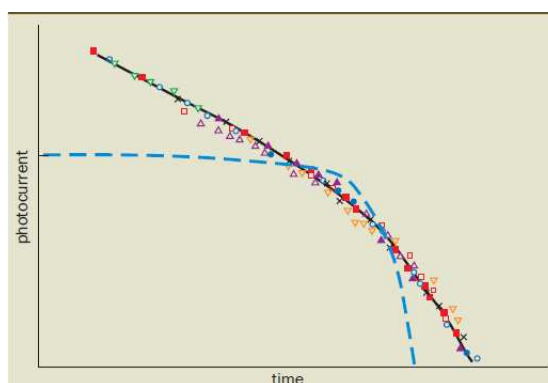
^۱ Transformed Renal Epithelial Madin Darby Canine Kidney

^۲ Wild-Type

^۳ NHE-Deficient

^۴ Transport of Electrons or Holes

^۵ Amorphous Semiconductors



شکل ۱۲.۱: جریان نوری $I(t)$ اندازه گیری شده در لایه های نازک آمورف که هسته اصلی دستگاه کپی را تشکیل می دهد. خط آبی گسسته نشان دهنده رفتار مورد انتظار بر اساس پیش بینی های انجام شده برای ذره بروانی است. یعنی تبعیت از معادله پخش (۴.۱) که شر و مونترال را برانگیخت تا فرآیند را با استفاده از یک توزیع با انتهای پهن برای زمان توجیه کنند [۶۷]. هر دو محور لگاریتمی هستند.

در ۱۹۷۵ توسط هاروی شرا^۱ و البیوت مونترال^۲ بیشتر بررسی و مشخص شد. آن ها دریافتند که حامل ها در طی حرکت در محیط آمورف توسط نقص های موضعی در ماده به دام می افتند و افت و خیزهای گرمایی آن ها را از این دام نجات می دهد. این بدان معناست که بازه های زمانی که حامل ها در این دام ها سپری می کنند، از یک توزیع گاوسی پیروی نمی کنند بلکه همان گونه که در فصل بعد خواهیم دید دارای توزیع پهنی در ناحیه انتها هستند. به این ترتیب، ذرات در این حالت کندتر از ذره بروانی پخش می شوند.

همان طور که تاکنون مشاهده شد، متداول ترین روش مشخصه یابی فرآیند پخش غیر عادی $X(t)$ بر اساس رفتار کمیت میانگین مربع جابجایی است،

$$\langle X^2(t) \rangle \simeq t^{2H}. \quad (26.1)$$

در غیاب نیروها و یا قیدهای خارجی و در زمان های بسیار بلند، این کمیت برای یک فرآیند پخش کلاسیک عادی نتیجه (۲۶.۱) را می دهد با $H = 1/2$ ، همان طور که از معادلات اینشتین، اسملوکوفسکی و لانژوین برمی آید. بنابراین بستگی خطی، یک شاخصه پخش عادی^۳ است. اما در بسیاری از مشاهدات تجربی از جمله موارد ذکر شده در این بخش، رفتار میانگین مربع جابجایی برای ذرات رابطه خطی با زمان را نشان نمی دهد. فرآیندهایی با نمای هارست $0 < H < 1/2$

^۱ Harvey Scher

^۲ Elliot Montroll

^۳ Normal Diffusion

به عنوان زیرپخش^۱ شناخته می‌شوند. مورد $H > 1/2$ به عنوان فرایپخش^۲ خوانده می‌شود و حالت $H = 1$ ، مورد حدی بالیستیک یا موج‌گونه^۳ است.

این نوع پخش با رفتار معرفی شده در معادله‌ی (۲۶.۱)، در طیف وسیعی از پدیده‌ها به چشم می‌خورد؛ از شارش حامل‌ها در نیمه‌رساناهای آمورف [۶۷، ۶۸] گرفته تا حرکت پخشی ردیاب‌های زیرمیکرونی در سلول‌های زیستی [۶۹]، دینامیک ذرات ریز در شارهای آشوب ضعیف [۶۴]، پراکندگی ردیاب‌های شیمیایی در آب‌های زیرزمینی [۷۰] و دینامیک بازارهای سرمایه‌گذاری [۷۱] تنها نمونه‌هایی از حضور این رفتار در دینامیک پدیده‌هاست [۳، ۷۲-۷۵].

در حالت کلی فرآیندهای پخش غیرعادی جهان‌شمول نیستند و منحصر بر اساس رابطه (۲۶.۱) توصیف نمی‌شوند. بلکه ممکن است مکانیزم‌های فیزیکی مختلفی منجر به این رفتار غیرخطی توانی شوند که در ذات خود کاملاً از یکدیگر متمایز باشند. رهیافت‌ها و دیدگاه‌های مختلفی در جهت توصیف پخش غیرعادی مطرح شده است. در این جا به‌طور خلاصه به معرفی چند مورد از آن‌ها می‌پردازیم. از جمله این رهیافت‌ها می‌توان از پروازهای لوی، ول‌گشت زمان پیوسته، حرکت و نوفه‌ی بروانی کسری و حرکت بروانی بازمقیاس شده نام برد.

مسیر به سمت پخش عادی بر مبنای وجود مقیاس زمانی است. ول‌گشت زمان پیوسته^۴ به سیستم‌هایی می‌پردازد که مقیاس‌های زمان‌های واهلش درونی در آن‌ها شدیداً در معرض اتفاقات کاتوره‌ای است. وقتی که مفهوم مقیاس زمانی نوعی برای نوفه قابل تعریف نباشد، اعتبار قضیه حد مرکزی نیز باید دوباره بازنگری شود. این شرایط ممکن است در حالتی رخ دهد که پخش در محیطی بسیار ناهمگن شامل سدها و دام‌های فراوان انجام شود. در حالت بسیار حدی، مقدار انتظاری زمان واهلش بی‌نهایت خواهد بود که منجر به پدیده‌هایی همچون زیرپخش، پیری و شکست ارگودیسیتی می‌شود.

تحت شرایط مناسب، افت و خیزهای نوفه می‌توانند مقادیر حدی بزرگی اختیار کنند. قضیه حد مرکزی نیازمند محدود بودن مقدار واریانس اثر حاصل از نوفه σ^2 است. در صورت ارضا نشدن این شرط، همگرا شدن به سمت حد غیرگاوسی از تبعات آن خواهد بود. پخش حاصل با نام پروازهای لوی^۵ بوسیله آمار دارای انتهای پهن^۶ مشخص می‌شوند. حرکت به شدت ناپیوسته و فرایپخشی است. حیطة کاربرد این حالت یا حرکت‌های نزدیک آن مانند گام‌های لوی^۷، در واقع حرکت‌های

^۱ Subdiffusion

^۲ Supperdiffusion

^۳ Ballistic or Wavelike

^۴ Continuous time random walks

^۵ Levy Flights

^۶ Heavy Tailed

^۷ Levy Wlaks

دینامیکی در محیط‌های فراکتالی یا محیط‌های به‌شدت آشفته^۱ است.

طیف فرآیندهای پخش غیرعادی بسیار متنوع است و ذکر کامل انواع آن خارج از حیطه این رساله است؛ برای مطالعات بیشتر شامل گام‌های خودمقاطع^۲، حرکت مسدود شده^۳، پخش روی فراکتال‌ها و مدل‌های ناخالصی ...^۴، می‌توان به مراجع [۷۶-۷۲، ۳] مراجعه نمود. در فصل آینده به معرفی برخی مدل‌های پرکاربرد در پخش غیرعادی می‌پردازیم و فرمول‌بندی آن‌ها، که منجر به وارد شدن به حیطه ریاضیات کسری است، معرفی می‌شود.

^۱ Turbulant

^۲ Self Avoiding Walk

^۳ Obstructed Motion

^۴ Quenched Disorder