فصل ۲

مدل تپه‌شنی

مدل تپه‌شنی نخستین بار در سال ۱۹۸۷ توسط بَک [۱] برای توصیف سیستم‌های خودسامان‌ده و پدیده‌ی $1/f$ پیشنهاد شد [۱۱]. طبق این مدل، سیستم همیشه در نزدیکی یک حالت بحرانی به سر می‌برد. بحرانی بودن سیستم با چندین ویژگی بدست می‌آید که ابتدایی‌ترین آن، رفتار توانی در تابع توزیع برخی کمیت‌ها و وجود روابط مقیاسی بین نماهای بحرانی است. با استفاده از این مدل می‌توان برخی از ویژگی‌های تعدادی از سیستم‌های طبیعی مانند آتشفشان‌ها، زمین‌لرزه‌ها، بازارهای مالی و همچنین مغز را توصیف کرد [۱۳، ۱۴]. حالات مختلفی برای مدل تپه‌شنی وجود دارد که از جمله می‌توان به حالت جهت‌دار[۲] و بدون جهت اشاره کرد. همچنین این مدل قبلا روی شبکه‌های مختلفی بررسی و ارتباط آن با دیگر کلاس‌های جهان‌شمولی از جمله مدل پاتس[۳] بررسی شده است [۱۲، ۲۸]

۱.۲ دینامیک مدل تپه‌شنی

همان‌طور که از نام این مدل مشخص است، این مدل به بررسی تغییرات ویژگی‌های یک تپه‌ی شن می‌پردازد. در طبیعت مشاهده شده است که وقتی به یک تپه‌ی شن تعدادی دانه‌ی شن اضافه می‌کنیم، ارتفاع تپه زیاد می‌شود. این

[۱] Bak
[۲] Directed
[۳] Potts Model

افزایش ارتفاع تا یک حد معینی ادامه می‌یابد و در صورت رسیدن به یک حد آستانه، با افزودن یک مقدار خیلی کم از دانه‌های شن، تعداد زیادی از شن‌ها به پایین میریزند و اصطلاحا یک بهمن[۴] را ایجاد می‌کنند. مکانیسم رخ دادن بهمن به این صورت است:
با فروریزش چند دانه‌ی شن به اطراف، ارتفاع نقاط دیگری از تپه زیاد می‌شود و دانه‌های آن نقاط نیز فروریزش می‌کنند و به نقاط اطراف پخش می‌شوند و ... . این فرآیند تا زمانی ادامه می‌یابد که سیستم به یک تعادل نسبی می‌رسد. چنین مکانیسمی برای تحول تپه‌شنی را می‌توان توسط معادلات مربوط به مدل تپه‌شنی آبلی[۵] توصیف کرد.

۱.۱.۲ مدل تپه‌شنی آبلی

در مدل تپه‌شنی تعدادی خانه داریم که می‌توانند مقداری شن با یک ارتفاع مشخص را در خود ذخیره کنند و می‌توانند با خانه‌های دیگر از طریق ردوبدل کردن دانه‌های شن بر همکنش داشته‌باشند. می‌توان مدل تپه‌شنی را روی یک شبکه با N خانه تعریف کرد و به هر خانه عددی به عنوان ارتفاع شن z_i نسبت داد . دینامیک سیستم در مدل تپه‌شنی به این صورت است :
در ابتدا یک خانه به صورت تصادفی انتخاب می‌شود (که با اندیس i, j نمایش داده می‌شود) و به ارتفاع آن مقداری مثبت Δz به عنوان عامل خارجی اضافه می‌شود.

$$z_{i,j}(t+1) \longrightarrow z_{i,j}(t) + \Delta z \qquad (۱.۲)$$

اگر ارتفاع این خانه با افزایش ارتفاع انجام شده، به یک حد آستانه‌ی مشخص z_i^{Thr} برسد، آن خانه ناپایدار شده و فروریزش می‌کند؛ یعنی از ارتفاع آن کم شده و به ارتفاع خانه‌های همسایه‌ی آن اضافه می‌شود.

[۴] Avalanche
[۵] Abelian Sandpile

$$
\begin{aligned}
z_{i,j}(t+1) &\longrightarrow z_{i,j}(t)-4 \\
z_{i+1,j}(t+1) &\longrightarrow z_{i+1,j}(t)+1 \\
z_{i-1,j}(t+1) &\longrightarrow z_{i-1,j}(t)+1 \\
z_{i,j+1}(t+1) &\longrightarrow z_{i,j+1}(t)+1 \\
z_{i,j-1}(t+1) &\longrightarrow z_{i,j-1}(t)+1
\end{aligned} \tag{۲.۲}
$$

این تغییر ارتفاع ممکن است باعث ناپایدار شدن و فروریزش خانه‌های همسایه شود و آن‌ها هم فروریزش کنند و این روند همچنان ادامه یابد. فرآیند فروریزش‌های متوالی را بهمن می‌نامند. اگر هیچ خانه‌ای ناپایدار نباشد، یک خانه دیگر به صورت تصادفی انتخاب می‌شود و ارتفاع آن اضافه می‌شود و این فرآیند همچنان ادامه پیدا می‌کند. این دانه‌های شن معمولا می‌توانند از مرزهای و یا نقاط دیگر سیستم خارج شود تا سیستم به اشباع نرسد. به طور معمول، حد آستانه را برابر تعداد همسایه‌های هر خانه در نظر می‌گیرند که در شبکه‌ی دو بعدی برابر چهار است. برای یک بهمن می‌توان ویژگی‌های مختلفی از جمله اندازه، طول‌عمر، مساحت، سرعت و ...تعریف کرد. اندازه هر بهمن را برابر تعداد دانه‌های فروریزش شده در یک بهمن تعریف می‌کنیم(s). طول‌عمر بهمن را نیز برابر مدت زمانی که فروریزش کل بهمن طول کشیده تعریف می‌کنیم (T). همچنین می‌توان برای بهمن‌های با طول زمانی مشخص، یک مقدار اندازه‌ی میانگین محاسبه کرد ($\langle S(T)\rangle$).

نشان داده شده‌است که تابع توزیع کمیت‌های بالا دارای رفتار توانی هستند؛ یعنی:

$$
\begin{cases}
P(s) \propto s^{-\tau} \\
P(T) \propto T^{-\alpha} \\
\langle S(T)\rangle \propto T^{1/\sigma\nu z}
\end{cases} \tag{۳.۲}
$$

سه نمای بحرانی بدست آمده از این سه کمیت، یعنی τ، α و $1/\sigma\nu z$ از طریق رابطه‌ی مقیاسی زیر به یکدیگر

مرتبط می‌شوند

$$\frac{\alpha - 1}{\tau - 1} = \frac{1}{\sigma \nu z}. \quad (۴.۲)$$

مدل تپه‌شنی باوجود سادگی بسیار، به خاطر داشتن پارامترهای آزاد زیادی مثل Δz، حد آستانه، میزان شن‌های منتقل شده به دیگر خانه‌ها در هنگام فروریزش و ... انواع مختلفی دارد و حل تحلیلی آن فقط در چند حالت خاص وجود دارد. با توجه به پیچیدگی‌های حل دقیق برای مدل‌های آماری، غالبا تقریب میدان میانگین[۶] نتایج مفیدی از سیستم به ما می‌دهد. به طور مثال نوع تابع توزیع کمیت‌ها و روابط مقیاسی بین آن‌ها از تقریب میدان میانگین بدست آمده است. برای مدل تپه‌شنی چندین حل میدان میانگین وجود دارد که در ادامه دو مورد از آن را به طور مختصر توضیح خواهیم داد.

در مدل تپه‌شنی آبلی برای یک سیستم دارای N خانه، یک ماتریس $N \times N$ نحوه فروریزش را تعیین می‌کند (Δ). بر اثر فروریزش در خانه iام داریم:

$$z_j \Rightarrow z_j - \Delta_{ij} \quad (۵.۲)$$

که j برای تمام خانه‌های شبکه و i خانه‌ای که به آستانه رسیده است. برای این‌که دینامیک تپه‌شنی رفتار تعریف شده‌ای داشته باشد، قیدهای زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) $\Delta_{ii} > 0$.

۲) به ازای هر $i \neq j$ داریم $\Delta_{ij} \leqslant 0$.

۳)به ازای تمام iها داریم $\sum_j \Delta_{ii} \geqslant 0$.

با توجه به این قیدها، ارتفاع خانه iام پس از فروریزش کاهش یافته و ارتفاع خانه‌های دیگر یا افزایش می‌یابد و یا بدون تغییر می‌ماند. همچنین در فرآیند فروریزش هیچ دانه‌ای تولید نمی‌شود. صرفا چنانچه در شبکه اتلاف داشته‌باشیم، تعدادی دانه‌ی شن گم می‌شوند. شایان ذکر است که اکثر اوقات $z_i^{Thr} = \Delta_{ii}$ فرض می‌شود. در

[۶] Mean-Field Approximation

این حالت ماتریس فروریزش به صورت زیر است:

$$\Delta_{i,j} = -1 + (z_i^{Thr} + 1)\delta_{i,j} \quad (۶.۲)$$

در این حالت سیستم دارای خواص جالبی است که به آن‌ها می‌پردازیم.

۲.۱.۲ خاصیت آبلی

در یک سیستم با N خانه، حالات پایدار مختلفی وجود دارد و پس از هر بهمن، سیستم به یکی از این حالت‌ها می‌رود. تعداد این حالات را می‌توان با مجاسبه‌ی دترمینان ماتریس فروریزش بدست آورد [۲۹]. فرض کنید عملگرهای a_i با خاصیت زیر روی فضای حالت‌های پایدار سیستم تعریف شوند. اگر C یک پیکربندی پایدار باشد، a_iC پیکربندی جدیدی به ما می‌دهد که از افزودن یک واحد شن به خانه‌ی شماره i و فرصت دادن به سیستم تا رسیدن به پیکربندی پایدار حاصل می‌شود.

$$C' = a_iC \quad (۷.۲)$$

می‌توان به سادگی نشان داد که عملگرهای a_i خاصیت آبلی دارند؛ یعنی با هم جابه‌جا می‌شوند.

$$[a_i, a_j] = 0 \longrightarrow a_ia_j = a_ja_i \quad (۸.۲)$$

جابه‌جاپذیری این عملگرها بیان می‌کند که ترتیب افزودن شن و فروریزش خانه‌ها اهمیتی ندارد و اگر چند خانه‌ی ناپایدار در سیستم وجود داشته‌باشد، پیکربندی نهایی مستقل از ترتیب فروریزش آن‌ها است. برای نشان دادن این ویژگی، دو خانه‌ی ناپایدار i و j را در نظر می‌گیریم. اگر ابتدا خانه i فروریزش کند، خانه j ناپایدار باقی می‌ماند زیرا می‌دانیم: $\Delta_{ij} \leqslant 0$. پس از فروریزش خانه j، ارتفاع خانه k به اندازه $-\Delta_{ik} - \Delta_{jk}$ تغییر می‌کند. چنانچه ترتیب فروریزش را عوض کنیم، باز هم همین نتیجه به دست خواهد آمد. با این استدلال برای هر پیکربندی با هر تعداد خانه‌ی ناپایدار، مشاهده می‌شود که پیکربندی پایدار نهایی مستقل از ترتیب فروریزش‌ها خواهد بود.

برای اثبات جابه‌جاپذیری عملگرهای a_j و a_i لازم است نشان دهیم که عمل اضافه کردن شن به یک خانه، مثلا خانه i با عمل فروریزش خانه دیگر که ناپایدار است، مثلا خانه j، جابه‌جاپذیر است. در این مورد واضح است که اگر خانه j ناپایدار باشد ،چه قبل و چه بعد از افزودن شن به هر خانه دیگری مثل i، فروریزش خواهد کرد و افزودن شن به خانه‌های دیگر اثری بر فروریزش خانه‌ی ناپایدار ندارد. بنابراین این عملگرها آبلی هستند.

۲.۲ تقریب میدان میانگین تپه‌شنی

مسائل مکانیک آماری غالبا دارای برهمکنش‌های غیرخطی هستند و حل دقیق مسائل آن‌ها به نظر غیرممکن می‌رسد. بنابراین برای حل این مسائل بایستی از تقریب‌ها استفاده کنیم. یکی از مهم‌ترین تقریب‌های مکانیک آماری، تقریب میدان میانگین است. فرض پایه‌ای در این تقریب این است که هر ذره، به جای برهمکنش مستقیم از همسایگان خود، یک میدان میانگین از جانب کل سیستم دریافت می‌کند. بنابراین به جای در نظر گرفتن تعداد خیلی زیادی از برهمکنش‌ها، کافیست برای هر ذره یک میدان میانگین محاسبه کنیم و رفتار آن ذره را بر اساس این میدان بدست آوریم. رویکرد میدان میانگین برای هر مسئله متفاوت است؛ اما فرض‌های پایه‌ای آن برای اکثر مسائل یکسان است. برای مدل تپه‌شنی، دو حل میدان میانگین شناخته شده وجود دارد که در ادامه به صورت مختصر توضیح داده می‌شود.

۱.۲.۲ شبکه منظم

شبکه‌ی منظم شبکه‌ای است که تعداد همسایگان برای همه‌ی راس‌ها یکسان است. به طور مثال شبکه‌ی مربعی، یک شبکه‌ی منظم با درجه‌ی چهار است. با توجه به سادگی این شبکه، مدل تپه‌شنی نخستین بار روی این شبکه مورد بررسی قرار گرفت. این حل توسط باک و تانگ[۷] در سال ۱۹۸۸ و در [۳۰] ارائه شد. این حل بر روی شبکه‌ی مربعی d بعدی صورت گرفته است. شبکه‌ی مربعی در یک بعد به معنی یک خط با دو همسایه، در دو بعد به معنی یک صفحه با چهار همسایه و در سه بعد به معنی یک مکعب با شش همسایه است. بنابراین برای شبکه‌ی مربعی d بعدی، $2d$ همسایه داریم. پس حد آستانه برای فروریزش خانه‌ها را می‌توان $2d$ در نظر گرفت. برای سادگی، مسئله را در یک بعد بررسی می‌کنیم و سپس نتایج را به طور مناسب به ابعاد بالاتر تعمیم می‌دهیم.

[۷] Tang

در حالت یک بعدی، حد آستانه دو است و چنانچه ارتفاع یک خانه به دو یا بیشتر برسد، فروریزش می‌کند. با توجه به این‌که هر خانه دو همسایه دارد، حالات مختلف برای ارتفاع یک خانه عبارتند از :

$$z = 0, 1, 2, 3$$

در صورتی که ارتفاع برابر صفر یا ۱ باشد، وضعیت خانه را اصطلاحا غیرفعال (I)و در صورتی که ۲ یا ۳ باشد، آن‌را فعال (A) می‌نامیم. در هر گام زمانی، ارتفاع هر خانه با احتمال h توسط یک دانه‌ی خارجی و با احتمال $1-h$ توسط فروریزش همسایه‌ها تغییر می‌کند. برای این‌که یک خانه با ارتفاع ۰ به ارتفاع ۱ برسد دو حالت ممکن است: ۱ـ یکی از همسایه‌ها غیرفعال و دیگری فعال باشد ۲ـ هر دو همسایه غیرفعال باشد. احتمال این‌که یک خانه در ارتفاع z باشد را P_z می‌نامیم. همچنین احتمال فعال بودن را P_A و احتمال غیرفعال بودن را P_I در نظر می‌گیریم. بنابراین شار احتمال برای تبدیل حالت ارتفاع صفر به حالت ارتفاع ۱ عبارتست از:

$$2(1-h)P_0P_AP_I + hP_0P_I^2$$

$$P_I = P_0 + P_1$$

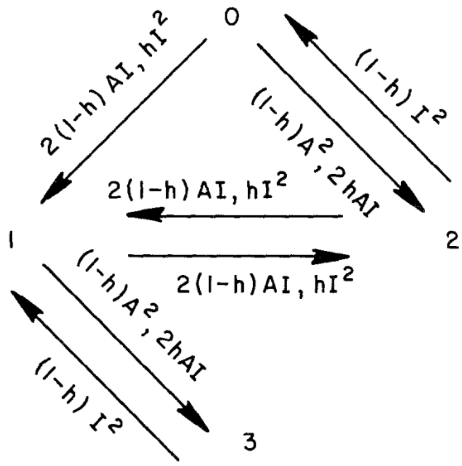
$$P_A = P_2 + P_3$$

با توجه به این‌که $P_3 \ll P_2$ است، می‌توان جملات این شار را تا مرتبه‌ی دوم از P_2 حفظ کرد. در این صورت شار گذار از حالت صفر به حالت ۱ برابر است با:

$$2P_0P_2(1-P_2) + P_0P_3 + hP_0 - 4P_0P_2$$

با محاسبه‌ی روش‌های تبدیل بین حالات مختلف سیستم، شکل ۱.۲ را بدست می‌آوریم (این شکل به طور کامل از مرجع [۳۰] برگرفته شده‌است).

برای رسیدن به یک حالت مانا، بایستی شار ورودی و شار خروجی برای هر حالت یکسان باشد. بنابراین با تقریب زدن روی روابط شکل ۱.۲ و حفظ جملات تا مرتبه‌ی P_2^2، می‌توان معادلات مربوط به میدان متوسط را



شکل ۱.۲: روش‌های مختلف گذار بین حالات مختلف [۳۰]

بدست آورد. این معادلات عبارتند از:

$$P_2(1-P_2)^2 - hP_2 = 2P_0P_2(1-P_2) + 2P_0P_3 + hP_0 + P_0P_2^2 - 2hP_0P_2$$

$$2P/0P_2(1-P_2) + 2P_0P_3 + hP_0 + 2P_2^2 + P_3 + hP_2 - 4hP_0P_2$$

$$= 2P_1P_2(1-P_2) + 2P_1P_3 + hP_1 + P_1P_2^2 - 2hP_1P_2$$

$$2hP_0P_2 - 4hP_1P_2 + 2P_1P_2(1-P_2) + 2P_1P_3 + hP_1 + P_0P_2^2 = P_2$$

$$P_1P_2^2 + 2hP_1P_2 = P_3$$

در این سیستم می‌توان پارامتر نظم را احتمال فعال بودن تعریف کرد که طبق تقریب عبارت است از:

$$j = P_2 + P_3 \approx P_2$$

همچنین می‌توان یک پارامتر کنترل برای سیستم فرض کرد که برابر با مقدار چشمداشتی ارتفاع سیستم است و

آن‌را متوسط زاویه‌ی سیستم تعریف می‌کنیم:

$$\theta = 0 \times P_0 + 1 \times P_1 + 2 \times P_2 + 3 \times P_3$$

به ازای حالت $h = 0$، $P_0 = P_1 = 1/2$ و نتیجتا $\theta_c = 1/2$ بدست می‌آید. برای حالت d بعدی $P_0 = P_1 = P_2 = ... = P_{2d-1} = 1/2$ و $\theta_c = d - 1/2$ محاسبه می‌شود.
با در نظر داشتن P_2 به عنوان پارامتر نظم، معادله‌ی پارامتر نظم عبارت است از:

$$4P_2^2 + (1 - 2\theta + 2h)P_2 - h\theta = 0$$

به ازای $h = 0$ دو جواب برای پارامتر نظم داریم:

$$for \quad h = 0 \quad \Longrightarrow \quad P_2 = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2}(\theta - \theta_c) \end{cases}$$

بنابراین اولین نمای بحرانی سیستم، یعنی $\beta = 1$ را بدست آورده‌ایم. با مشتق‌گیری از معادله‌ی پارامتر نظم نسبت به h داریم:

$$8P_2\chi + 2P_2 + (1 - 2\theta)\chi - \theta \Longrightarrow \chi = \begin{cases} \frac{1}{4}(\theta - \theta_c)^{-1} & for \quad \theta < \theta_c \\ \frac{1}{4}(\theta_c - \theta)^{-1} & for \quad \theta > \theta_c \end{cases}$$

پس دومین نمای بحرانی سیستم، یعنی $\gamma = 1$ را نیز بدست آورده‌ایم. با در نظر داشتن روابط مقیاسی، می‌توان سایر نماهای بحرانی را نیز بدست آورد. همچنین می‌توان با استفاده از رهیافت بازبهنجارش، روابط مقیاسی را محاسبه کرد [۳۰]. روش حل این مدل به حل میدان میانگین آیزینگ دو بعدی بسیار شبیه است و تعریف نماهای بدست آمده از شرایط مدل آیزینگ استخراج می‌شود اما روابط مقیاسی بین نماها در رهیافت بازبهنجارش، با روابط مربوط به آیزینگ متفاوت است. در این حل از میدان متوسط، نماهای مقیاسی شناخته شده‌ی تپه‌شنی، یعنی

نمای تابع توزیع اندازه برابر $\tau = 5/2$ و نمای تابع توزیع طول‌عمر $\alpha = 2$ بدست می‌آید. با توجه به فرض پایه‌ای تقریب میدان میانگین، بایستی به ازای برهمکنش‌های مستقیم هر عضو با همسایه‌ها یک میدان میانگین از کل سیستم را قرار دهیم. روشی که در مرجع [۳۰] برای اعمال این فرض در نظر گرفته است این است که برهمکنش‌های سایر اعضا را در احتمال حالت‌های مختلف (P_z) وارد کرده است. یعنی به جای مرتبط کردن ارتفاع خانه به سایر اعضا، ارتفاع هر خانه را با زبان احتمال بیان کرده‌است و وضعیت سایر خانه‌ها را در محاسبه‌ی احتمال وارد کرده‌است. بنابراین تمامی اعضای سیستم به نوعی در تعیین وضعیت یک خانه موثر هستند.

۲.۲.۲ شبکه‌کامل

همان‌طور که گفته شد، فرض پایه‌ای در تقریب میدان میانگین این است که همه‌ی اعضا با یکدیگر و از طریق یک میدان برهمکنش دارند. یکی از روش‌های اعمال این فرض در مدل این است که همه‌ی اعضا مستقیما با یکدیگر برهمکنش داشته باشند. در این حالت اطلاعات کل اعضا به یکدیگر مربوط می‌شوند. برای اعمال این روش، فرض غالب این است که مدل را بر روی شبکه‌ای فرض کنیم که همه‌ی اعضای آن به یکدیگر وصل هستند. به چنین شبکه‌ای در اصطلاح شبکه‌ی کامل[۸] گفته می‌شود. حل مدل تپه‌شنی روی چنین شبکه‌ای نخستین بار توسط جانووسکی[۹] در سال ۱۹۹۳ و در مقاله‌ي [۲۹] ارائه شد.

ماتریس مجاورت چنین شبکه‌ای یک ماتریس یک است که اعضای قطر اصلی آن صفر شده است. در یک شبکه‌ی کامل با N عضو، هر راس $N-1$ همسایه دارد. بنابراین حد آستانه برای فروریزش خانه‌ها برابر $z_i^{Thr} = N-1$ است. طبق معادله‌ی ۲.۶ ماتریس فروریزش برای چنین سیستمی عبارت است از:

$$\Delta_{ij} = -1 + N\delta_{ij} \quad \Longrightarrow \quad \Delta_{ij} = \begin{cases} -1 & i=j \\ N-1 & i \neq j \end{cases}$$

طبق نظریه‌ی گراف، تعداد پیکربندی‌های پایدار چنین سیستمی برابر با تعداد درخت پوشا[۱۰] موجود در سیستم

[۸] All-to-All Network

[۹] Janowsky

[۱۰] Spaning Tree

است [۳۱]. بنابراین تعداد پیکربندی‌های بازگشتی[۱۱] سیستم معادل با دترمینان ماتریس فروریزش است [۲۹]. تعداد پیکربندی‌ها معادل با تعداد حالات ممکن برای سیستم پس از فروریزش است. بنابراین یک نگاشت یک به یک بین تعداد پیکربندی‌ها در این مسئله و تابع پارش[۱۲] در مکانیک آماری وجود دارد. بنابراین با داشتن تعداد پیکربندی‌ها می‌توان کمیت‌های مورد تقاضا را در سیستم بدست آورد. تابع پارش سیستم عبارت است از:

$$Z(N, z_i^{Thr}) = det(\Delta) = (z^{Thr} + 1 - N)(z^{Thr} + 1)^{N-1} \tag{۹.۲}$$

بنابراین در این مسئله تابع پارش برابر با $Z(N, N) = (N+1)^{N-1}$ می‌شود. تمامی پیکربندی‌های سیستم دارای وزن و اهمیت یکسانی هستند. از طرفی با توجه به تقارن موجود در ماتریس فروریزش، می‌توان از هر یک از پیکربندی‌های سیستم به یک پیکربندی دیگر رسید. بنابراین در صورتی که فقط یکی از پیکربندی‌ها را در نظر بگیریم، می‌توانیم تابع پارش کل سیستم را بیابیم. برای سادگی در محاسبات، یک پیکربندی مناسب را اختیار می‌کنیم که در آن ارتفاع هر خانه به صورت زیر تغییر کند:

$$h(i) = i, \qquad h(i) > h(i-1), \qquad i = 1, 2, ...N$$

که در آن h بیانگر ارتفاع خانه‌ی iام است. اگر یک دانه‌ی شن در خانه‌ی $h(N)$ قرار بگیرد، یک بهمن به اندازه N ایجاد می‌شود. بنابراین این پیکربندی کمینه‌ترین پیکربندی برای سیستم است و هر پیکربندی دیگری برای تولید یک بهمن به اندازه N به تعداد دانه‌های شن بیشتری دارد. اندازه بهمن‌های مختلف به فاصله‌ی پیکربندی سیستم از این حالت کمینه مرتبط می‌شود. بنابراین می‌توان سایز بهمن را چنین تعریف کرد:

$$N_{Aval} = N - min[j : h(i) > i \quad for \quad all \quad j \leqslant i < N] \tag{۱۰.۲}$$

بنابراین برای یافتن تابع توزیع احتمال بهمن‌های با اندازه‌های k بایستی تعداد پیکربندی‌هایی که به بهمن با اندازه‌ی

[۱۱] Recurrent Configurations

[۱۲] Partition Function

k منتج می‌شوند را بشماریم. طبق محاسبات احتمال یافتن بهمن به اندازه‌ی k عبارتست از:

$$P(Avalanches\ of\ size\ k) = \tag{۱۱.۲}$$
$$Z(N,N)^{-1} Z(N-k,N-k) \sum_{j=2}^{k} \binom{N}{j,k-j,N-k} \frac{j}{N} Z(k-j,k-2)$$

برای رخ دادن یک بهمن با اندازه‌ی k، بایستی $N-K$ خانه در ارتفاع $N-k$ باشند. بنابراین بقیه‌ی خانه‌ها می‌توان هر پیکربندی دلخواهی داشته باشند. بنابراین ضریب $Z(N-k,N-k)$ به این دلیل ظاهر می‌شود. جمع‌زنی روی jهای مختلف نیز مربوط به شمارش تعداد راه‌های ممکن برای رسیدن به پیکربندی دقیق برای ایجاد بهمن به اندازه‌ی k است. ضریب $\frac{j}{N}$ نیز مربوط به احتمال داشتن سایتی با ارتفاع j است که عملا به احتمال فروریزش مربوط می‌شود. ضریب $Z(N,N)_{-1}$ که عملا تابع پارش کل سیستم است، برای بهنجار کردن احتمال استفاده شده است.

با ساده‌سازی معادله‌ی ۱۱.۲ به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$P(Avalanches\ of\ size\ k) = \frac{(N-k+1)^{N-K-1} k^{k-2} (N-1)!}{(N+1)^{N-1}(k-1)!(N-k)!} \tag{۱۲.۲}$$

با توجه به این‌که ما به حد ترمودینامیکی در سیستم‌ها علاقه‌مند هستیم، با در نظر گرفتن تقریب $1 \ll k \ll N$ رابطه‌ی ۱۲.۲ را ساده می‌کنیم. بنابراین احتمال رخ دادن بهمنی به اندازه‌ی k عبارتست از:

$$P(Avalanches\ of\ size\ k) \sim \frac{k^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}N} \tag{۱۳.۲}$$

طبق رابطه‌ی ۱۳.۲، نمای بحرانی تابع توزیع اندازه‌ها برابر $\frac{3}{2}$ بدست می‌آید که با نتایج تجربی و شبیه‌سازی‌های قبلی نیز در توافق است [۳۲،۳۳]. با بررسی تحول زمانی سیستم می‌توان نمای بحرانی مربوط به تابع توزیع طول‌عمر بهمن‌ها را محاسبه کرد. طبق نتایج [۲۹]، این نما برابر با $\alpha = 2$ بدست می‌آید که مطابق با نتایج شبیه‌سازی و تجربی است [۳۲،۳۳]. این نماها بارها در شبیه‌سازی‌ها و آزمایش‌های تجربی بدست آمده‌اند.

یکی دیگر از روش‌های بررسی تحلیلی سیستم‌های بحرانی استفاده از نظریه‌ی میدان‌های همدیس[۱۳] است. طبق حل‌های صورت گرفته با این روش، نماهای بحرانی و روابط مقیاسی مربوط به مدل تپه‌شنی همین مقادیر بدست آمده است. بنابراین به طور کلی نماهای بحرانی حل میدان میانگین مدل تپه‌شنی به صورت زیر هستند:

$$\tau = \frac{3}{2}, \qquad \alpha = 2, \qquad \frac{1}{\sigma\nu z} = 2 \tag{۱۴.۲}$$

در فصل بعد به ارتباط مدل تپه‌شنی، حل میدان میانگین این مدل و بحرانیت خودسامان‌ده در مغز می‌پردازیم.

۳.۲ تپه‌شنی و شبکه جهان‌کوچک

تا کنون دینامیک مدل تپه‌شنی بر روی شبکه‌های پیچیده‌ی مختلفی بررسی شده‌است. برخی از این مسائل دارای حل تحلیلی دقیق هستند؛ مانند شبکه‌ی منظم، شبکه‌ی کامل و شبکه‌ی بِته[۱۴] [۱۲، ۲۸–۳۰]

یکی دیگر از شبکه‌های مورد توجه در زمینه‌ی شبکه‌های پیچیده، شبکه‌ی جهان‌کوچک[۱۵] است. برای بررسی نتایج این مسئله بایستی ابتدا کمی با دانش شبکه‌های پیچیده و کمیت‌های مورد بررسی در این زمینه آشنا شویم.

۱.۳.۲ شبکه‌های پیچیده

نظریه‌ی شبکه‌های پیچیده، یکی از قدرتمندترین ابزارهای شناخت سیستم‌های پیچیده‌ی موجود در دنیای پیرامون ما است. دیدگاه شبکه‌ای با یک سری فرضیات ساده، بررسی بسیاری از فرآیندهای دینامیکی پیچیده‌ی جهان پیرامون را ممکن ساخته‌است.

در سیستم‌های پیچیده اطلاع دقیقی از اینکه کدام عناصر با هم برهمکنش دارند، موجود نیست. برای مثال الگوی اتصالات بین نورون‌ها در مغز به درستی مشخص نیست. اما در سیستم‌های فیزیکی، قضیه متفاوت است و هیچ گونه ابهامی در این امر که چه چیز با چه چیز برهمکنش می‌کند، وجود ندارد و همچنین قدرت برهمکنش ها به وسیله ی فواصل فیزیکی به طور منحصر به فردی تعیین می‌شود. وجود این ابهام باعث می گردد که سیستم‌های

---
[۱۳] Conformal Field Theory

[۱۴] Bethe Lattice

[۱۵] Small World

پیچیده نسبت به سیستم‌های فیزیکی متداول، سخت‌تر تحلیل شوند. یکی از شگفت‌انگیزترین روش‌ها برای تحلیل بهتر و البته ساده‌تر برهمکنش‌ها در سیستم‌های پیچیده، استفاده از مفهوم شبکه‌ها است. در این قسمت به طور مختصر برخی خصوصیات و مفاهیم مهم و اساسی در رهیافت شبکه‌های پیچیده را توضیح می دهیم.

خصوصیات ساختاری شبکه‌ها

تحلیل خصوصیات توپولوژی شبکه‌ها به وسیله‌ی تعریف یک سری معیارها صورت پذیرفته است که جنبه‌های مختلف توپولوژی شبکه‌های پیچیده‌ی مورد مطالعه را به صورت کمّی مشخص می سازند. در ادامه برخی از این ویژگی‌ها را معرفی می‌کنیم.

۱.۱.۳.۲ نمایش ماتریسی

یک شبکه را با N رأس و K یال در نظر بگیرید. یک چنین شبکه‌ای می‌تواند توسط یک ماتریس نمایش داده شود طوری که عنصر A_{ij} نشان دهنده‌ی نحوه‌ی اتصال بین دو رأس i و j باشد (شکل ۲.۲). به این ماتریس، ماتریس همسایگی [۱۶] می‌گویند. اگر دو رأس i و j با هم همسایه نباشند عنصر A_{ij} برابر صفر خواهد بود و در غیر این صورت مقداری غیر صفر به خود می‌گیرد. اگر یال‌ها در شبکه مورد نظر ارزش متفاوتی داشته باشند، به این معنی که قدرت برهمکنش بین عناصر سیستم مورد نظر متفاوت باشد، عناصر ماتریس همسایگی مقداری پیوسته خواهند داشت و با توجه به نوع برهمکنش، مقدار آن منفی یا مثبت خواهد بود. در این صورت شبکه وزن‌دار[۱۷] خواهد بود. اگر یال‌های شبکه هم ارزش باشند، آنگاه عناصر ماتریس همسایگی مقدار صفر و یک خواهند داشت.

اگر شبکه مورد نظر جهت‌دار باشد، ماتریس همسایگی نامتقارن و در صورت جهت‌دار نبودن، ماتریس همسایگی متقارن خواهد بود.

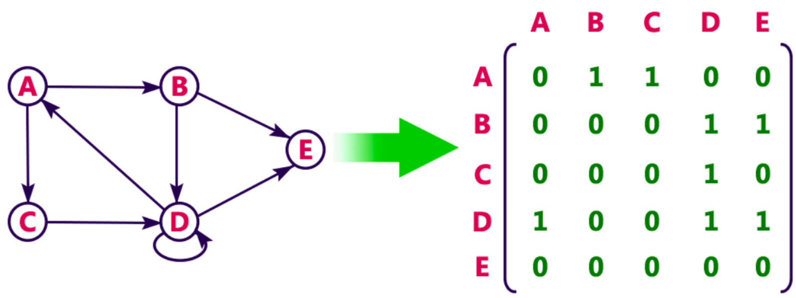
۲.۱.۳.۲ درجه‌ی رأس، توزیع درجه و ضریب‌خوشگی

تعداد همسایه هر رأس را درجه [۱۸] رأس (k) گویند. بنابراین هر چقدر درجه‌ی یک راس بالاتر باشد، تعداد برهمکنش‌های آن راس بیشتر است. میانگین درجه و افت‌وخیز درجه ، ساده‌ترین معیارها برای تعیین خواص

[۱۶] Adjacency matrix

[۱۷] Weighted network

[۱۸] Degree



شکل ۲.۲: نمایش ماتریسی یک گراف

شبکه هستند. اگر میانگین درجه در مقایسه با تعداد کل رأس‌ها (اندازه شبکه) کوچک باشد ، شبکه را پراکنده[۱۹] می‌نامند. همچنین افت‌وخیز درجه میزان پراکندگی در درجه‌ی رئوس را نشان می‌دهد. تابع توزیع درجات شبکه یک کمّیت پر کاربرد دیگر است که چگونگی توزیع یالها بین رئوس یک شبکه را معین می‌کند. برخی از شبکه‌ها براساس تابع توزیع درجه‌های آن‌ها شناخته می‌شوند. از جمله می‌توان به شبکه‌ی بی مقیاس[۲۰] و شبکه‌ی پواسونی[۲۱] اشاره کرد [۳۴].

وجود ارتباط بین همسایه‌های یک رأس در شبکه‌های واقعی بسیار محتمل است. این پدیده که در حقیقت به نوعی همبستگی سه تایی را نشان می‌دهد، به وسیله ی کمیتی به نام ضریب‌خوشگی[۲۲] مشخص می‌شود. [۳۵]:

$$c_i = \frac{N_i^{\Delta}}{k_i(k_i-1)/2} \tag{۱۵.۲}$$

که در آن N_i^{Δ} تعداد مثلث‌های گذرنده از رأس i و مخرج این عبارت تعداد کل یال‌های ممکن بین همسایه‌های رأس i است. به عبارت دیگر، ضریب‌خوشگی نشان دهنده‌ی چگالی تعداد مثلث‌های موجود گذرنده از رأس i است. از کمیت‌های مهم دیگر می‌توان به ضریب‌خوشگی میانگین شبکه $C = \sum_i \frac{c_i}{N}$ و همچنین طیف خوشگی $c(k)$ اشاره کرد که در واقع ضریب‌خوشگی میانگین مربوط به رئوس با درجه‌ی k است.

---

[۱۹] Sparse

[۲۰] Scale-Free

[۲۱] Poissoon

[۲۲] Clustering Coefficient

۳.۱.۳.۲ طول مسیر و خاصیت دنیای کوچک

مسیر[۲۳] در شبکه، زنجیره‌ای از یال‌ها است که ارتباطی بین دو رأس برقرار می‌کنند و طول[۲۴] آن برابر با تعداد یال‌های موجود در آن مسیر است. کوتاه‌ترین مسیر بین دو رأس به عنوان فاصله‌ی[۲۵] دو رأس تعریف می‌شود. از دیگر خصوصیات پایه‌ای یک شبکه، میانگین فاصله[۲۶] بین تمامی زوج رئوس حاضر در شبکه و قطر شبکه[۲۷] که به صورت بیشترین فاصله‌ی موجود در یک شبکه تعریف می‌شود، هستند. در اکثر شبکه‌های دنیای واقعی، با وجود اندازه‌های نسبتاً بزرگ، به خاطر وجود یال‌هایی که بین نواحی مختلف شبکه ارتباط ایجاد می‌کنند، مسیرهای نسبتاً کوتاهی بین هر دو رأس دلخواه وجود دارد. به این ویژگی از شبکه‌های دنیای واقعی خاصیت دنیای‌کوچک[۲۸] می‌گویند. به طور دقیقتر خاصیت دنیای کوچک بدین معنی است که قطر شبکه با رشد شبکه به عنوان تابعی از اندازه‌ی شبکه (N) بسیار کند رشد می‌کند و عموماً رفتاری به صورت $D \propto \log(N)$ دارد.

انواع شبکه‌ها

با توجه به پدیده‌های گوناگونی که توسط شبکه‌های پیچیده مدل می‌شوند، انواع مختلفی از شبکه‌ها با ویژگی‌های متنوع به وجود آمده‌اند. برای مثال می‌توان به شبکه‌های منظم، تصادفی، دنیای کوچک، بی مقیاس و... اشاره کرد.

۴.۱.۳.۲ شبکه منظم

برای مدل کردن سیستم‌های کاملاً منظم مانند ساختار بلور، از شبکه منظم استفاده می‌شود. همان‌طور که در بخش ۱.۲.۲ گفته شد، شبکه‌ی منظم مجموعه‌ای از رئوس است که یال‌ها به شکلی کاملا منظم بین آن‌ها توزیع شده‌اند و درجه رئوس در آن‌ها برابر است. چنین شبکه‌ای را می‌توان روی یک حلقه یا صفحه‌ی دو بعدی یا هر سطح d بعدی تعریف کرد. تعداد درجات نیز مستقل از بعد می‌تواند هر عددی باشد.

[۲۳] Path

[۲۴] Path length

[۲۵] Distance

[۲۶] Characteristic path length

[۲۷] Diameter

[۲۸] Small-world property

۵.۱.۳.۲ شبکه تصادفی

شبکه تصادفی، گرافی است که رئوس آن به طور تصادفی به هم متصل شده‌اند و معمولا تابع توزیع درجه آن‌ها پواسونی است. گراف تصادفی اردوش[۲۹]–رنیی[۳۰] از شناخته شده‌ترین شبکه‌های تصادفی است که در سال ۱۹۵۹ ارائه شد [۳۶]. اردوش و رینی روشی برای تولید گراف تصادفی ارائه دادند. در این روش با شروع از N رأس بدون یال، این گراف از طریق اتصال زوج رأس‌هایی که به طور تصادفی انتخاب شده‌اند، ساخته می‌شود. این فرآیند با شرط عدم وجود چنداتصالی ادامه می‌یابد تا تعداد یال‌ها برابر با K گردد [۳۶]. به لحاظ تاریخی برای بررسی سیستم‌های پیچیده از شبکه‌های تصادفی استفاده می‌شد اما امروزه شبکه‌های دیگری مثل شبکه‌ی دنیای‌کوچک و بی‌مقیاس کشف شده‌اند که تطبیق بیشتری با شبکه‌های واقعی دارند [۳۴].

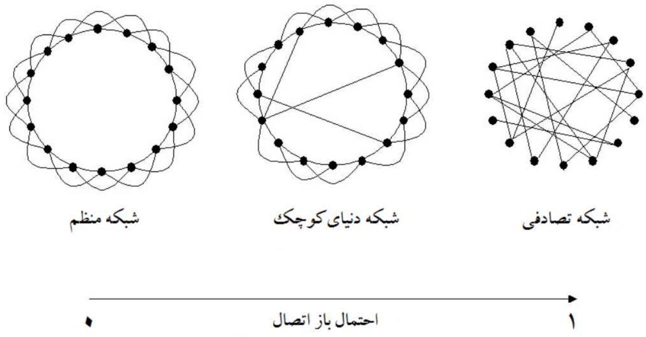
۶.۱.۳.۲ شبکه دنیای‌کوچک

در سال ۱۹۹۸ بررسی خواص گذار فاز از شبکه‌های منظم به شبکه‌های تصادفی توسط واتس و استروگاتز به کشف شبکه‌ای منجر شد که دو خاصیت میانگین فاصله کم و ضریب‌خوشگی بالا را هم‌زمان دارد. لازم به ذکر است که خوشگی بالا از خواص اصلی شبکه‌های منظم و خاصیت میانگین فاصله کم از ویژگی‌های شبکه‌های تصادفی است [۳۵]. در مدل آن‌ها، نقطه‌ی شروع یک حلقه با N رأس است که در آن هر رأس به طور متقارن به $2m$ از نزدیک‌ترین همسایه‌هایش متصل است. بنابراین در مجموع $K = mN$ یال در شبکه وجود دارد. سپس با شروع از یک رأس، هر یال متصل به نزدیک‌ترین همسایه‌های آن را در جهت ساعت‌گرد با احتمال p جدا کرده و به یک رأس دیگر که به صورت تصادفی انتخاب شده، متصل می‌کنیم. در این الگوریتم به ازای $p = 1$ به یک شبکه تصادفی خواهیم رسید و اگر $p = 0$ باشد شبکه منظم خواهد ماند. شبکه‌ی دنیای‌کوچک به ازای یک حد خاص در این بین ظهور می‌کند(شکل۳.۲). گزارش‌های زیادی مبنی بر وجود خاصیت دنیای‌کوچک و خوشگی بالا در مغز وجود دارد که به اهمیت شبکه‌های دنیای کوچک در حوزه‌ی علوم اعصاب افزوده است (مرجع [۳۷] و منابع موجود در آن ملاحظه شود). لازم به ذکر است که بعدتر روش‌های دیگری نیز برای تولید شبکه‌های دنیای‌کوچک ارائه شده است [۳۸، ۳۹].

---

[۲۹] Paul Erdös

[۳۰] Alfréd Rényi



شکل ۲.۳: گذار بین شبکه منظم و تصادفی و ظهور شبکه دنیای کوچک

۲.۳.۲ شبیه‌سازی تپه‌شنی روی شبکه جهان‌کوچک

در مدل تپه‌شنی، رخ دادن بهمن‌ها به نوعی با ارتباطات بلندبرد و همبستگی‌های بزرگ مرتبط است. دلیل این امر آن است که طبق این مدل، اتفاقات محلی با استفاده از ساختار شبکه، منجر به اتفاقات سراسری می‌شود. بنابراین نقش ساختار شبکه در انتقال اطلاعات و پخش اتفاقات بسیار مهم است. پیش از این شبیه‌سازی‌هایی بر روی اثر ساختار جهان‌کوچک در مدل تپه‌شنی صورت گرفته است [۴۰–۴۲]. طبق نتایج این پژوهش‌ها، سیستم به ازای تغییر میزان احتمال یال‌های بلندبرد یک گذار فاز از حالت غیربحرانی به بحرانی انجام می‌دهد. یعنی به ازای pهای کم، سیستم با حالت بحرانی فاصله دارد و با افزایش p، به حالت بحرانی نزدیک می‌شود. دلیل این امر آن است که با افزایش یال‌های بلندبرد، انتقال اطلاعات در شبکه بیشتر شده و دانه‌های شن مسافت‌های بیشتری را طی می‌کنند. در این حالت احتمال رخ دادن بهمن‌های بزرگتر بیشتر می‌شود و تابع توزیع اندازه‌ی بهمن‌ها از خود رفتار توانی نشان می‌دهد. از طرفی با توجه به تنوع مدل‌های شبکه‌ی جهان‌کوچک، نوع این شبکه نیز در حالت سیستم تاثیر گذار است. به طور مثال در شبکه‌ی جهان‌کوچکی که ساختار پایه‌ای آن یک حلقه است، گذار از حالت غیربحرانی به حالت بحرانی مشهود است [۴۱] اما در شبکه‌ای که ساختار پایه‌ای آن شبکه‌ی مربعی دو بعدی است، به ازای pهای کم نیز حالت بحرانی وجود دارد [۴۰]. بنابراین در مطالعه‌ی چنین شبکه‌هایی، توجه به ساختار اولیه‌ی شبکه بسیار اهمیت دارد. علاوه‌براین، در مرجع [۴۲] نشان داده شده‌است که تابع توزیع اندازه‌ی بهمن‌ها در شرایط خاصی دارای دو شیب خواهد بود. منظور از دو شیب این است که به ازای یک بازه‌ای از اندازه‌ها تابع

توزیع رفتار توانی با یک نمای بحرانی و به ازای بازه‌ی دیگری از اندازه‌ها، یک نمای بحرانی دیگر دارد. در این مطالعه علت این امر را اثرات سایز محدود سیستم عنوان می‌کند و تغییر شیب را به علت دسته‌بندی بهمن‌ها بر اساس اندازه‌ی نسبی در مقایسه با اندازه‌ی کل سیستم می‌داند [۴۲]. در ادامه اندکی در مورد ارتباط این مدل و فعالیت‌های مغزی بحث خواهیم کرد.

۴.۲ مدل‌تپه‌شنی در توصیف عملکردهای مغز

با کار پیشگامانه‌ی بگز و پلنز در سال ۲۰۰۳ [۱۵]، یعنی کشف بهمن‌های نورونی و پیشنهاد بحرانی بودن مغز و قابلیت توصیف این بهمن‌ها توسط مدل تپه‌شنی، استفاده از این مدل در حوزه علوم‌اعصاب جانی دوباره یافت. لازم به ذکر است که بهمن‌های نورونی تنها یک ویژگی و شاخص آماری است که از داده‌های مربوط به فعالیت‌های الکتروفیزیولوژی مغز می‌توان آن‌را بدست آورد. به تازگی نشان داده شده که مدل تپه‌شنی علاوه بر بهمن‌های نورونی، قادر به تولید نوسانات مغزی[۳۱] است [۴۳]. بدین ترتیب یکی دیگر از بزرگترین موفقیت‌های این مدل در توصیف مغز رقم خورد چرا که این نوسانات‌مغزی نماینده حالت‌های مختلف عملکردی مغز[۳۲] هستند و ارتباط نزدیکی با بسیاری از فعالیت‌های شناختی مغز دارند. [۴۴]

۱.۰.۴.۲ مدل تپه شنی تعمیم‌یافته‌ي پیشنهادی

در اینجا ما یک مدل تپه شنی تعمیم‌یافته متناسب با مغز ارائه می‌دهیم و نشان می‌دهیم که این مدل قادر به توصیف دامنه‌ی وسیعتری از فعالیت‌های مغزی است.

در بخش ۱.۱.۲ مکانیزم تولید بهمن‌ها توسط مدل تپه‌شنی را بیان کردیم. ویژگی جالب مدل تپه‌شنی این است که اگر تعداد خانه‌هایی که در هر لحظه به حد آستانه می‌رسند را ثبت کنیم، یک سری زمانی خواهیم داشت که می‌تواند به عنوان فعالیت‌های الکتریکی ثبت شده از مغز در مقیاس‌های مختلف قلمداد شود. به این ترتیب که ارتفاع هر شن در هر خانه را معیاری از پتانسیل در نورون یا مجموعه‌ای از نورون‌ها در نظر می‌گیریم. مزیت چنین تعبیری این است که می‌توان بسیاری از ویژگی‌های مغز مانند همگامی، پیچیدگی، انتقال اطلاعات و ... را در این

[۳۱] Brain oscillations

[۳۲] Functional brain states

سری زمانی جست‌وجو کرد. علاوه بر این‌ها، مدل تپه‌شنی پارامترهای زیادی دارد که می‌توان آن‌ها را تغییر داد و به ویژگی‌های مورد نظر رسید. در این بین پارامتر میزان برون‌رفت و دانه‌های اضافه‌شده به سیستم و همچنین الگوی اتصالات بین خانه‌ها می‌تواند نقش به‌سزایی داشته‌باشند. در مدل BTW ساختار اتصالات یک شبکه مربعی و منظم است که هر عضو به چهار همسایه متصل است و مقداری برون رفت در مرزهای این شبکه وجود دارد. در اینجا ما از ساختار دنیای کوچک با استفاده از الگوریتم واتس_استروگاتز استفاده می‌کنیم. برای مشخص کردن رأس‌هایی که عامل برون‌رفت هستند، باید چاره‌ای اندیشید چرا که در یک شبکه‌ی پیچیده، تعریف روشنی برای مرز و رأس‌های مرزی موجود نیست. برای حل این مشکل از سه ویژگی رئوس مرزی در شبکه‌ی مربعی استفاده می‌کنیم.

۱) نسبت تعداد رئوس مرزی N_b به تعداد کل رئوس N در شبکه‌ی مربعی از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند:

$$\frac{N_b}{N} = 4(\frac{1}{L} - \frac{1}{L^2}) \tag{۱۶.۲}$$

۲) رئوس مرزی تعداد همسایه‌های کمتری دارند.

۳) در بین رئوس مرزی، رأس‌هایی که در گوشه‌ها واقع هستند کمترین همسایه و بیشترین برون‌رفت را دارند.

بنابراین در یک شبکه‌ی پیچیده می‌توان تعداد خانه‌هایی که عامل برون‌رفت شن در مدل تپه‌شنی هستند را از معادله ۱۶.۲ بدست‌آورد و متناسب با عکس درجه هر رأس، مقداری برون‌رفت به آن تخصیص داد. همچنین حد آستانه برای هر رأس نمی‌تواند همانند مدل BTW ثابت باشد. حد آستانه برای هر رأس را برابر تعداد همسایه‌های آن رأس به‌علاوه‌ی میزان برون‌رفت آن رأس در نظر می‌گیریم و ارتفاع هر خانه پس از فروریزش به اندازه حد آستانه کم شده و به همسایه‌های آن هرکدام یک واحد اضافه می‌شود. به این صورت ارتفاع دانه‌های شن در هر خانه بعد از فروریزش صفر می‌شود.

میزان شن‌های اضافه‌شده به سیستم در هر لحظه را می‌توان به عنوان عامل خارجی یا تحریک بیرونی در نظر گرفت و تاثیر افزایش تحریک خارجی در مغز را توسط این پارامتر در مدل تپه‌شنی بررسی کرد.این مدل را بر روی یک شبکه‌ی جهان‌کوچک اجرا کردیم و در آن خواص دینامیک سیستم و ساختار شبکه را مورد بررسی قرار دادیم.

در ادامه به بررسی بهمن‌های نورونی می‌پردازیم و پس از آن نتایج شبیه‌سازی این مدل پیشنهادی را در بخش ۶.۵ بیان می‌کنیم.