قفل‌ها هنوز برای باز نشدن هستند! (قسمت دوم)

محرم ایردموسی

در شمارهٔ ۳۱ از نشریهٔ ریاضیات، از مسئلهٔ معروف «گاوصندوق» برایتان گفتیم و چند مسئلهٔ مرتبط با آن را بررسی کردیم. در انتهای مقاله، دو مسئله برایتان مطرح کردیم و وعده دادیم که یک روش کلی برای حل این جور مسئله‌ها ارائه خواهیم کرد. بهتر است قبل از خواندن این مطلب، قسمت اول مقاله را اگر نخوانده‌اید، مطالعه کنید. ابتدا صورت این دو مسئله را برای یادآوری می‌آوریم.

مسئلهٔ ۱ . یازده نفر یک گاوصندوق دارند و فرض کنید یکی از آنها رئیس گروه باشد. آنها می‌خواهند گاوصندوق تنها در یکی از دو حالت زیر باز شود:

(۱) اگر رئیس گروه حضور داشت: با آمدن حداقل ۴ نفر دیگر، گاوصندوق باز شود.

(۲) اگر رئیس گروه حضور نداشت، با آمدن حداقل ۶ نفر، گاوصندوق باز شود.

تعداد حداقل قفل‌ها و تعداد حداقل کلیدهای هر فرد را به‌دست آورید.

مسئلهٔ ۲ . پنج نفر از شرکت A و پنج نفر از شرکت B، مشترکاً یک گاوصندوق دارند. گاوصندوق تنها زمانی باز می‌شود که از هر شرکت حداقل ۳ نفر حضور داشته باشند. تعداد حداقل قفل‌ها و تعداد حداقل کلیدهای هر فرد را به‌دست آورید.

بهتر است قبل از هر چیز، به صورت‌بندی کلی این نوع مسئله‌ها بپردازیم.

معمولاً در این مسئله‌ها، مجموعه‌ای از افراد هستند، این مجموعه را با S نمایش می‌دهیم. همچنین، زیرمجموعه‌هایی از افراد ذکر شده‌اند که قرار است قفل‌ها و توزیع کلیدها به‌گونه‌ای باشد که با حضور یافتن اعضای هرکدام از این زیرمجموعه‌ها، گاوصندوق باز شود. این زیرمجموعه‌ها را مجموعه‌های مجاز می‌نامیم. پس خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های S به نام مجموعه‌های مجاز در هر مسئله مشخص می‌شوند. این خانواده را با

$$\mathcal{A} = \{A_۱, A_۲, A_۳, \ldots, A_k\} \subseteq p^k(S)$$

نمایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال در مسئلهٔ ۱، S مجموعه‌ای ۱۱ عضوی است مانند $\{P_۱, P_۲, \ldots, P_{۱۱}\}$ که اگر $P_۱$ همان رئیس باشد آنگاه

$$\mathcal{A} = \{X \subseteq S \mid P_۱ \in X, |X| \geqslant ۵\} \cup \{Y \subseteq S \mid P_۱ \in Y, |Y| \geqslant ۶\}$$

و یا در مسئلهٔ ۲، اگر فرض کنیم $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_5\}$ شامل افراد شرکت A و $B_1 = \{b_1, b_2, \ldots, b_5\}$ شامل افراد شرکت B باشند آنگاه $S = A_1 \cup B_1$ و

$$\mathcal{A} = \{X \cup Y \mid X \subseteq A_1,\ |X| \geqslant 3,\ Y \subseteq B_1,\ |Y| \geqslant 3\}$$

بدیهی است که در این نوع از مسئله‌ها اگر A یک مجموعهٔ مجاز باشد و $A \subseteq B \subseteq S$ آنگاه B نیز یک مجموعهٔ مجاز خواهد شد و اگر B یک مجموعهٔ غیرمجاز ($B \subseteq S$ را غیرمجاز می‌نامیم هرگاه $B \notin \mathcal{A}$) باشد و $A \subseteq B$ آنگاه A نیز غیرمجاز خواهد بود.

خلاصهٔ کلام اینکه یک مسئله از نوع گاوصندوق به صورت زیر مطرح می‌شود:

«فرض کنید S مجموعه‌ای از افراد و $\mathcal{A}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های S باشد (زیرمجموعه‌های مجاز) می‌خواهیم مجموعه‌ای مانند L (مجموعهٔ قفل‌ها) با کمترین تعداد عضو را پیدا کنیم به‌طوری که بتوان به هر عضو x از S، زیرمجموعه‌ای از L مانند $L(x)$ (کلیدهای شخص x) نسبت داد به‌گونه‌ای که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ A_i از $\mathcal{A}$، $\bigcup_{x \in A_i} L(x) = L$ و به‌ازای هر زیرمجموعهٔ غیرمجاز B، داشته باشیم $\bigcup_{x \in B} L(x) \neq L$.»

اما روش کلی حل یک مسئله از نوع گاوصندوق چگونه خواهد بود. به مسئلهٔ اول در قسمت اول مقاله برمی‌گردیم. در حل آن مسئله هر زیرمجموعهٔ حداکثر ۵ عضوی یک مجموعهٔ غیرمجاز بود و هر زیرمجموعهٔ حداقل ۶ عضوی یک مجموعهٔ مجاز بود. در حل آن مسئله، به هر زیرمجموعهٔ غیرمجاز ۵ عضوی دقیقاً یک قفل نسبت دادیم و کلید این قفل را به افرادی می‌دادیم که در آن زیرمجموعهٔ غیرمجاز بودند. ابتدا باید مشخص کنیم که زیرمجموعه‌های غیرمجاز ۵ عضوی در بین زیرمجموعه‌های غیرمجاز چه نقشی دارند. درواقع زیرمجموعه‌های غیرمجاز ۵ عضوی، بزرگ‌ترهای این خانوادهٔ غیرمجازها هستند! و زیرمجموعه‌ای غیرمجاز و بزرگ‌تر از آنها وجود ندارد. و همان‌طور که قبلاً گفته شد زیرمجموعه‌های غیرمجاز کوچک‌تر را می‌توان در نظر نگرفت.

اکنون به حالت کلی مسئله برگردیم، ابتدا چند نماد را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱ . زیرمجموعهٔ غیرمجاز A را بزرگ‌تر می‌نامیم هرگاه زیرمجموعه‌ای غیرمجاز مانند B وجود نداشته باشد که $A \subseteq B$.

اگر خانوادهٔ زیرمجموعه‌های مجاز S را با $\mathcal{A}$ و خانوادهٔ زیرمجموعه‌های غیرمجاز S را نیز با $\mathcal{A}'$ نمایش دهیم $(\mathcal{A}' = P^*(S) - \mathcal{A})$؛ آنگاه خانوادهٔ زیرمجموعه‌های غیرمجاز بزرگ‌تر S را با نماد $\mathcal{A}'_M$ نمایش می‌دهیم.

قضیه. در یک مسئله از نوع گاوصندوق، کمترین تعداد قفل‌ها برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های غیرمجاز بزرگ‌تر یعنی $|\mathcal{A}'_M|$.

اثبات. به‌ازای هر عضو B از $\mathcal{A}'_M$، حداقل یک قفل مانند l وجود دارد که $l \notin \bigcup_{x\in B} L(x)$. بنابراین به هر عضو $\mathcal{A}'_M$، مانند B یک قفل مانند l را نسبت می‌دهیم به‌طوری که $l \notin \bigcup_{x\in B} L(x)$. از طرفی امکان ندارد که به دو عضو $B_۱$ و $B_۲$ از $\mathcal{A}'_M$، قفل مشترک l را نسبت داده باشیم. چون در این حالت

$$l \notin \bigcup_{x\in B_۱} L(x)\ \ ,\ \ l \notin \bigcup_{x\in B_۲} L(x) \Rightarrow l \notin \bigcup_{x\in B_۱\cup B_۲} L(x) \Rightarrow B_۱\cup B_۲ \in \mathcal{A}'$$

اما غیرمجاز بودن $B_۱\cup B_۲$ با بزرگ‌تر بودن $B_۱$ و $B_۲$ تناقض دارد. پس تابعی یک‌به‌یک از $\mathcal{A}'_M$ به L پیدا کرده‌ایم که نشان می‌دهد $\left|\mathcal{A}'_M\right| \leqslant |L|$. اما با حذف قفل‌هایی که به هیچ‌کدام از زیرمجموعه‌های غیرمجاز بزرگ‌تر، نسبت داده نشده‌اند، خللی در شرایط مسئله پیش نخواهد آمد. بنابراین کمترین تعداد قفل‌ها در حالتی است که $|L| = \left|\mathcal{A}'_M\right|$.

با توجه به این قضیه کافی است در هر مسئله، اندازهٔ خانوادهٔ زیرمجموعه‌های غیرمجاز بزرگ‌تر را محاسبه کنیم.
در مسئلهٔ ۵، زیرمجموعه‌های غیرمجاز بزرگ‌تر، دو دسته هستند.
دستهٔ اول: اگر $S = \{p_۱, p_۲, \ldots, p_{۱۱}\}$ و $p_۱$ رئیس باشد آنگاه هر زیرمجموعهٔ ۴ عضوی از S که شامل $p_۱$ باشد یک زیرمجموعهٔ غیرمجاز بزرگ‌تر است. غیرمجاز بودن آن از مفروضات مسئله نتیجه می‌شود. از طرفی اگر زیرمجموعهٔ غیرمجاز ۴ عضوی B شامل $p_۱$ باشد و $B \subsetneqq A$، آنگاه A شامل رئیس و حداقل ۵ عضوی است. در نتیجه A مجاز خواهد شد. پس B یک زیرمجموعهٔ غیرمجاز بزرگ‌تر است.
دستهٔ دوم: هر زیرمجموعهٔ ۵ عضوی که شامل $p_۱$ نباشد، غیرمجاز و بزرگ‌تر است (استدلال کنید).

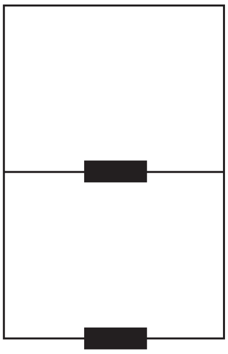
در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های غیرمجاز بزرگ‌تر برابر است با $|L| = \binom{۱۰}{۳} + \binom{۱۰}{۵}$.

برای تعیین تعداد کلیدها، واضح است که به‌جز رئیس بقیه وضعیت یکسانی دارند و تعداد کلیدهایشان برابر است. کلیدهای هر قفل متناظر با اعضای دستهٔ اول برابر است با ۷ و کلیدهای هر قفل متناظر با دستهٔ دوم برابر است با ۶. بنابراین تعداد کل کلیدها برابر است با $N_۱ = ۷\binom{۱۰}{۳} + ۶\binom{۱۰}{۵}$، تعداد کلیدهای رئیس برابر است با $\binom{۱۰}{۵}$ و تعداد کلیدهای هر کدام از بقیهٔ اعضا برابر است با:

$$\frac{۱}{۱۰}\left(۷\binom{۱۰}{۳} + ۶\binom{۱۰}{۵} - \binom{۱۰}{۵}\right) = \frac{۱}{۱۰}\left(۷\binom{۱۰}{۷} + ۵\binom{۱۰}{۵}\right) = \binom{۹}{۶} + \binom{۹}{۴}$$
$$= \binom{۹}{۳} + \binom{۹}{۴} = \binom{۱۰}{۴}$$

حل مسئلهٔ ۶ را (از این طریق) به عهدهٔ خودتان می‌گذاریم. تنها به ذکر جواب‌های آخر اکتفا می‌کنیم تا از درستی راه‌حل خودتان اطمینان حاصل کنید. تعداد قفل‌ها، ۲۰ و تعداد کلیدهای هر فرد برابر است با ۶۰.

اما دو مسئلهٔ جدید:



مسئلهٔ ۳ . اتاق سری یک شرکت دوتا در ورودی تودرتو دارد. و این شرکت، ۱۰ کارمند دارد و در اول زمانی باز می‌شود که حداقل ۶ نفر حاضر شوند و در دوم هنگامی باز می‌شود که حداقل ۳ نفر حضور داشته باشند. تعداد حداقل قفل‌های در اول و در دوم را مشخص کنید.

دقت کنید که در اینجا برای در دوم مسئله کمی متفاوت است.

مسئلهٔ ۴ . در مسئلهٔ ۲، مسئولان دو شرکت تصمیم گرفته‌اند که جلوی تقلب را بگیرند. فرض کنید تقلب این باشد که یک نفر، کلیدهای یک نفر دیگر از شرکت خودش را داشته باشد (تقلب دو نفر از یک شرکت). تعداد حداقل قفل‌ها و کلیدهای هر فرد را به‌دست آورید.