اصل جمع و اصل ضرب، دو اصل پایه در شمارش

محرم ایردموسی

موضوع آنالیز ترکیبی شمارش تعداد اعضای مجموعه‌هاست. برای محاسبهٔ تعداد اعضای یک مجموعه در اکثر موارد نیازی نیست که تک تک اعضا را بشماریم. بلکه در آنالیز ترکیبی یاد می‌گیریم که بدون شمارش اعضاء، تعداد اعضاء را مشخص کنیم.

همانند دیگر شاخه‌های ریاضی آنالیز ترکیبی با دو اصل مهم پایه‌ریزی می‌شود : اصل جمع و اصل ضرب. که پس از اشاره به آنها، کاربرد آنها را در شمارش ارائه خواهیم کرد.

اصل جمع. اگر A و B دو مجموعهٔ جدا از هم باشند یعنی $A\bigcap B=\varnothing$ آنگاه $|A\bigcup B|=|A|+|B|$. که در آن $|X|$ تعداد عضوهای مجموعه X را نشان می‌دهد.

می‌توان اصل جمع را به صورت زیر تعمیم داد :

« اگر A_1 ، A_2 ، . . . و A_n، مجموعه‌هایی دو به دو جدا از هم باشند، آنگاه $|\bigcup_{i=1}^{n} A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$.»

اصل جمع به صورت زیر نیز قابل تعمیم است :

« اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند آنگاه $|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|$.»

اصل ضرب. بیان ریاضی این اصل به صورت زیر است :

« اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی باشند آنگاه $|A\times B|=|A|.|B|$. که در آن $A\times B$ ضرب دکارتی دو مجموعه است.»

اما بیان کاربردی این اصل به صورت زیر است :

« اگر عمل W در ۲ مرحله انجام پذیر باشد و مرحلهٔ اول آن به n_1 طریق و مرحلهٔ دوم آن پس از مرحلهٔ اول، به n_2 طریق قابل انجام باشد در این صورت عمل Wبه n_1n_2 طریق انجام‌پذیر است.»

می‌توان اصل ضرب را به عملهایی با ۳ مرحله، ٤ مرحله و یا بیشتر تعمیم داد.

مثال۱. می‌خواهیم از میان ۵ کتاب مختلف ریاضی، ۷ کتاب مختلف شیمی و ۱۰ کتاب متمایز فیزیک دو کتاب با موضوع مختلف انتخاب کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

راه‌حل. شمارش اعضای این مجموعه (کدام مجموعه؟) را به سه بخش تقسیم می‌کنیم. یعنی اینکه ابتدا سه مسألهٔ زیر را حل می‌کنیم :

به چند طریق یک کتاب ریاضی و یک کتاب شیمی می‌توان انتخاب کرد؟

به چند طریق یک کتاب ریاضی و یک کتاب فیزیک می‌توان انتخاب کرد؟

به چند طریق یک کتاب شیمی و یک کتاب فیزیک می‌توان انتخاب کرد؟

اگر پاسخ این سه سؤال به ترتیب N_1 ، N_2 و N_3 باشد جواب مسأله $N_1 + N_2 + N3$ خواهد بود (طبق کدام اصل؟) اما پاسخ هر یک از سه سؤال فوق با استفاده از اصل ضرب قابل محاسبه است. چرا که انتخاب دو کتاب را می‌توان در دو مرحله انجام داد. پس $N_1 = 5\times 7$ ، $N_2 = 5\times 10$ و $N_3 = 7\times 10$. پس $N = 35+50+70$ و جواب ۱۵۵ خواهد بود. (این همه توضیح راجع به یک مثال ساده که از همان ابتدا جوابش مشخص بود! به نظر شما چه دلیلی وجود دارد برای اینکه یک شمارش ساده را به این دو اصل ربط دهیم؟ نظر خود را برایمان بفرستید.)

مثال۲. با ارقام ۱،۲،۳ و ٤ چند عدد چهار رقمی می‌توان ساخت؟

راه‌حل. ساختن عدد چهاررقمی را می‌توان در چهار مرحلهٔ زیر انجام داد :

۱. انتخاب رقم یکان که به ٤ طریق انجام می‌شود.

۲. انتخاب رقم دهگان که به ۳ طریق امکان‌پذیر است.

۳. انتخاب رقم صدگان که به ۲ طریق انجام می‌شود.

٤. انتخاب رقم هزارگان که اجباراً به یک طریق انجام‌پذیر است. بنابراین طبق اصل ضرب ساختن عدد چهار رقمی به $4\times 3\times 2\times 1$ طریق یعنی ۲٤ طریق قابل انجام است.

تعمیم مثال۲. به چند طریق چهار شیء متمایز را می‌توان در یک ردیف مرتب کرد؟ جواب قطعاً ۲٤ خواهد بود.

تعمیم تعمیم مثال۲. به چند طریق می‌توان n شیء متمایز را در یک ردیف مرتب کرد؟ جواب به طور مشابه $n\times \ldots \times 3\times 2\times 1$ خواهد بود.

در اینجا چون جواب آخر برای ما مهم نیست از یک نماد برای نمایش این حاصلضرب استفاده می‌کنیم :

$n!=1\times 2\times 3\times ...\times (n-1)\times n(n\in N)$ ، $0!=1$ (خوانده می‌شود n فاکتوریل).

تعریف. هر ترتیبی از اشیاء را یک جایگشت از آن اشیاء می‌نامیم.

قضیه۱. تعداد جایگشتهای n شیء متمایز برابر است با $n!$.

مثال۳. ۹ کتاب متمایز ریاضی و ٦ کتاب متمایز فیزیک را به چند طریق می‌توان در یک قفسهٔ کتاب چید؟

راه‌حل. ۱۵ کتاب مختلف داریم. بنابراین تعداد جایگشت‌های این کتابها برابر است با $15!$.

مثال٤. اگر کمی بخواهیم سلیقه به خرج دهیم و کتابهای هم موضوع را کنار هم بچینیم جواب چه خواهد بود؟

راه‌حل. ابتدا کتابهای ریاضی را مرتب می‌کنیم (به $9!$ طریق). سپس کتابهای فیزیک را مرتب می‌کنیم(به $6!$ طریق). در آخر دو دسته کتاب را در قفسه مرتب می‌کنیم (به $2!$ طریق). پس طبق اصل ضرب جواب $9!\times 6!\times 2!$ خواهد بود.

مثال۵. با ارقام ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ و ٤ چند عدد پنج‌رقمی می‌توان ساخت؟

راه‌حل. نوشتن عدد پنج رقمی را در پنج مرحله انجام می‌دهیم . . . . جواب $4\times 4!=96$ خواهد بود.

مثال٦. از ۹٦ عدد پنج‌رقمی مثال۵، چندتایشان زوج هستند؟

راه‌حل. با کمی کنکاش پیرامون مثال خواهید دریافت که باید دو حالت در نظر بگیرید. (۱) رقم یکان مساوی صفر باشد : در این حالت برای ٤ رقم بعدی $4!=24$ حالت وجود دارد. (۲) رقم یکان مساوی ۲ و یا ٤ باشد : در این حالت برای ٤ رقم بعدی $3\times 3!=18$ حالت وجود دارد. پس تعداد اعداد پنج‌رقمی زوج برابر است با $4!+2\times 18=60$ حالت.

مثال۷. چهار سخنران A ، B ، C و D برای سخنرانی در همایش دعوت شده‌اند. به چند طریق برنامه سخنرانی‌ها را می‌توان چید اگر بخواهیم

(۱) A سخنران اول باشد؟

(۲) A پیش از B سخنرانی کند؟

راه‌حل. (۱) به نمودار زیر توجه کنید :

$\underline{A \quad B \quad C \quad D}$

۱	۳	۲	۱

$\Rightarrow N_1 = 1 \times 3! = 6$

(۲) **راه حل اول.** به نمودار بعد توجه کنید :

C	D	A	B
٤	۳	۱	۱

$\Rightarrow N_2 = 4 \times 3 \times 1 \times 1 = 12$

راه‌حل دوم. اگر شرط مسأله این بود که B پیش از A سخنرانی کند جواب مسأله چه بود؟ به دلیل تقارنی که وجود دارد جواب این دو یکسان خواهد بود. از طرفی هر ترتیبی از این چهار سخنران را در نظر بگیریم از این دو حالت خارج نخواهد بود. پس $N_2 = \frac{4!}{2} = 12$.

مثال۸. خانواده‌ای ۳ دختر و ۲ پسر دارند. در نزدیکی خانهٔ آنها ۲ مدرسه دخترانه و ٤ مدرسهٔ پسرانه وجود دارد. برای ثبت نام فرزندان این خانواده چند انتخاب وجود دارد؟

راه‌حل. جدول زیر را برای خود حلاجی کنید :

پسر اول	پسر دوم	دختر اول	دختر دوم	دختر سوم
٤	٤	۲	۲	۲

$\Rightarrow N_1 = 4^2 \times 2^3 = 128$

مثال۹. در آزمونی ۲۰ سؤال تستی چهارگزینه‌ای داده شده است. برای پاسخنامه‌ها چند حالت مختلف وجود دارد؟

راه‌حل. در پاسخ به هر سؤال ۵ انتخاب وجود دارد. یا به آن سؤال جواب ندهیم یا اینکه جواب بدهیم که در این صورت ٤ انتخاب وجود دارد. پس در پاسخ به ۲۰ سؤال آزمون $N = 5^{20}$ امکان وجود دارد.

مثال۱۰. پنج دانش‌آموز می‌خواهند روی ٦ صندلی که در یک کلاس وجود دارد بنشینند. چند انتخاب برای آنها وجود دارد؟

راه‌حل. برای دانش‌آموز اول، ٦ انتخاب، برای دانش‌آموز دوم، ۵ انتخاب، . . . و برای دانش‌آموز پنجم، ۲ انتخاب وجود دارد. پس طبق اصل ضرب $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$ انتخاب وجود دارد.

تعمیم مثال۱۰. k شیء متمایز را می‌خواهیم در k جعبه از n جعبه که در یک ردیف قرار دارند بچینیم. ثابت کنید تعداد انتخابها برای این کار برابر با $\frac{n!}{(n-k)!}$.

قضیه۲. تعداد جایگشتهای k تایی از میان n شیء متمایز برابر است با $P_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

سعی کنید قضیهٔ فوق را همانند مثال۱۰، اثبات کنید.

مثال۱۱. یک اتوبوس با n مسافر در m ایستگاه توقف می‌کند. به چند طریق مسافرین می‌توانند در ایستگاههای مسیر مورد نظر پیاده شوند؟ اگر بخواهیم در هر ایستگاه حداکثر یک نفر پیاده شود، جواب چه خواهد بود؟ $(m \geq n)$

راه‌حل. تعمیم مثال۱۰ را ببینید. آیا در اینجا تعداد جایگشتهای n تایی از ایستگاهها را می‌شماریم؟ اگر به مسافران شماره بدهیم و یک جایگشت n تایی از ایستگاهها را انتخاب کنیم، در واقع برای هر مسافر یک ایستگاه انتخاب کرده‌ایم. (هر مسافر با شمارهٔ k در ایستگاه kام جایگشت پیاده می‌شود). بنابراین تعداد انتخابها برابر P_m^n خواهد بود.

مثال۱۲. فرض کنید $1 \leq n \leq m$. ثابت کنید $(m+1)P_m^n = (m-n+1)P_{m+1}^n$.

راه‌حل جبری.

$$(m+1)P_m^n = (m+1)\frac{m!}{(m-n)!} = \frac{(m-n+1)(m+1)!}{(m-n+1)(m-n)!}$$
$$= \frac{(m-n+1)(m+1)!}{(m-n+1)!} = (m-n+1)P_{m+1}^n$$

راه‌حل ترکیبیاتی. این نوع راه‌حل‌ها به روش مفهومی معروف هستند. فرض کنید می‌خواهیم از میان $m+1$ شیء یک جایگشت n تایی و از بقیهٔ افراد یک شیء را انتخاب کنیم. می‌توانیم ابتدا جایگشت n تایی را انتخاب کنیم(P_{m+1}^n حالت) سپس یک شیء را از بقیه برداریم که به $m+1-n$ حالت می‌توان انتخاب کرد. پس برای این عمل $(m-n+1)P_{m+1}^n$ انتخاب وجود دارد. روش دوم این است که ابتدا یک شیء را انتخاب کنیم. (به$m+1$ حالت) سپس از بقیه اشیاء یک جایگشت n تایی انتخاب کنیم که به P_m^n حالت می‌توان انتخاب کرد. پس جواب آخر این دو روش محاسبه با هم برابرند و حکم ثابت می‌شود.

تمرین۱. در مثال٦، چند تا از اعداد مضرب چهار هستند؟

تمرین۲. در چند جایگشت از اعداد ۱ تا ۹، عدد ۱ بین دو عدد ۲ و۳ قرار گرفته است؟ (به عنوان مثال، جایگشت ۹۸٦۲٤۱۵۳۷ را در نظر بگیرید.)

تمرین۳. چند تابع از مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ به مجموعهٔ $\{1,2,...,10\}$وجود دارد؟ این تمرین را تعمیم دهید.

تمرین٤. اتوبوسی ٣٦ صندلی دارد که در ۹ ردیف ٤ تایی چیده شده‌اند. اگر ۹ دانش‌آموز از پایهٔ اول، ۹ دانش‌آموز از پایهٔ دوم، ۹ دانش‌آموز از پایهٔسوم و ۹ دانش‌آموز از پایهٔ پیش‌دانشگاهی بخواهند روی صندلیها بنشینند به طوری که در هر ردیف چهارتایی دقیقاً یک نفر از هر پایه نشسته باشد، چند امکان برای نشستن دانش‌آموزان وجود دارد؟

تمرین۵. هشت مهرهٔ سفید رخ را به چند طریق می‌توان در یک صفحهٔ شطرنج چید به طوریکه هیچ دو تایی از آنها همدیگر را تهدید نکنند؟

تمرین٦. هشت دانش‌آموز به چند طریق می‌توانند روی ۸ صندلی از ۱۰ صندلی خالی که در یک ردیف چیده شده‌اند بنشینند؟ اگر بخواهیم دو دانش‌آموز A و B مجاور هم نباشند جواب چیست؟

تمرین۷. تمام جایگشتهای ۵ تایی اعداد ۱،۲،۳،٤،۵ و٦ را به صورت اعداد پنج‌رقمی نوشته‌ایم. مجموع این اعداد پنج‌رقمی را به دست آورید.

تمرین۸. در چند جایگشت از اعداد ۱ تا ۹ دو عدد ۱ و ۲ مجاور هم هستند؟ در چند جایگشت نه ۱ و ۲ مجاور هم‌اند نه ۳ و ٤؟ در چند جایگشت عدد ۱ در مکان اول نیست و عدد ۹ نیز در مکان آخر نیست؟

تمرین۹. فرض کنید C_m^n برابر با تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی از یک مجموعهٔ m عضوی باشد $(0 \le n \le m)$. به روش مفهومی ثابت کنید :

(۱) $C_m^n = C_m^{m-n}$

(۲) $(C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ در نتیجه$) P_m^n = C_m^n \times n!$

(۳) $C_m^{\circ} + C_m^1 + \ldots + C_m^m = 2^m$