کوشیار، سال اول، شمارهٔ ٤، صص ۲۱۸ ـ ۲۲۳

معادلهٔ مارکوف : $x^2+y^2+z^2=3xyz$

M. Krein
مترجم : محرم ایردموسی

در این مقاله قصد داریم به معرفی یک معادلهٔ سیاله (معادله با دسته جوابهای صحیح) بپردازیم و راه‌حلی برای آن ارائه کنیم. در راه‌حل ارائه شده تنها از خواص اولیهٔ اعداد صحیح و قضیه ویت (مربوط به سه جمله‌ایهای درجه دوم) استفاده شده است. بنابراین مطلب ارائه شده قابل استفاده برای تمامی دانش‌آموزان دبیرستان خواهد بود.

در سال ۱۸۷۹ و در دانشگاه سنپترزبورگ یک دانشجوی جوان بیست و سه‌ساله از رسالهٔ کارشناسی خود در رشتهٔ ریاضیات با عنوان « فرمهای مربعی دودویی با دترمینان مثبت» دفاع کرد. در این رساله، راه‌حلهایی برای بعضی از مسایل مشکل نظریه اعداد ارائه شده بود که باعث شد شاخه جدیدی در نظریهٔ اعداد گشوده شود. این ریاضیدان جوان آندری مارکوف نام داشت (۱۹۲۲ - ۱۸۵٦) که بعدها به یک ریاضیدان مطرح و مشهور، تبدیل شد. قسمت اصلی این رساله در دو مقاله در سالهای ۱۸۷۹ و ۱۸۸۰ در یکی از نشریات معتبر ریاضی *(Mathematische Annalen)* به چاپ رسید. اما حدوداً تا سی سال پژوهشها و تحقیقات مارکوف نامکشوف باقی ماندند. در سال ۱۹۱۳، ریاضیدان معروف آلمانی، جورج فروبینوس (۱۹۱۷ - ۱۸٤۹) مطلبی به چاپ رسانید با عنوان« دربارهٔ اعداد مارکوف» و در مقدمه نوشتهٔ خود، کارهای انجام شدهٔ مارکوف را بسیار مهم توصیف کرد.

در این مقاله به بررسی وحل معادلهٔ سیالهٔ زیر که آنرا از این پس، معادلهٔ مارکوف خواهیم نامید می‌پردازیم :

$$x^2+y^2+z^2=3xyz \qquad (1)$$

جالب است که مارکوف در راه‌حل خود برای این معادله تنها از روشهای مقدماتی (مانند قضیهٔ ویت) استفاده کرده است. قبل از ارائه راه حل معادلهٔ (۱) اجازه دهید اشارهٔ مختصری دربارهٔ معادلات سیاله (دیوفانتی) داشته باشیم.

معادله دیوفانتی

یک معادلهٔ دیوفانتی با مقادیر صحیح x، y، . . . . w، معادله‌ای است به فرم $P(x,y,...,w)=0$ که در آن P یک چند جمله‌ای است با متغیرهای مذکور که ضرایب آن صحیح هستند.

احتمالاً با معادلات سیالهٔ ساده‌تری برخورد داشته‌اید. به عنوان مثال تعداد روشـهای پرداخـت n کوپـک توسط سکه‌هایی با ارزش ۱،۲،۳ و ۵ کوپک، به معادلهٔ دیوفانتی

$$x+2y+3z+5w=n$$

برمی‌گردد. و یا سـاختن مثلثهـای قـائم الزاویـه‌ای کـه طـول اضـلاع آن اعـدادی طبیعـی باشـند بـه معادلـهٔ دیوفانتی $x^2+y^2=z^2$ بر می‌گردد که در آن x، y و z سه عدد طبیعـی هسـتند. ایـن معادلـه بـه رابطـهٔ فیثاغورث و دسته جوابهای این معادله به سه‌تایی‌های فیثاغورثی معروف هستند. یافتن جوابهای یـک معادلـهٔ دیوفانتی اغلب اوقات مشکل است حتی اگر معادلهٔ دیوفانتی فرم ساده‌ای داشته باشد و بـه طـور کلـی روش عمومی یا الگوریتم کلی برای یافتن جوابهای معادلات دیوفانتی وجود ندارد. حتـی یـک روش واحـد بـرای تشخیص وجود جواب یا عدم وجود آن وجود ندارد. بررسی و تحلیل معادلات دیوفـانتی خـاص تـا امـروز ادامه یافته است و در سالهای اخیر، پیشرفتهای چشمگیری با استفاده از مباحث جبری ماننـد هندسـه جبـری پیشرفته، داشته است.

شجره‌نامهٔ معادلهٔ مارکوف

سه‌تایی مرتب (a,b,c) را یک جواب برای معادلهٔ دیوفـانتی سـه متغیـره $f(x,y,z)=0$ مـی‌نـامیم هرگاه با جایگذاری مقادیر $x=a$، $y=b$, $z=c$ در معادلهٔ فوق یک تساوی عددی صحیح حاصل شـود. اعداد a، b و c از جواب (a,b,c) را مختصات جواب یا مولفه‌های جواب معادله می‌نامیم. اگر در معادلهٔ مارکوف یکی از متغیرها صفر باشد به راحتی می‌توان نشان داد که دو متغیر دیگر نیز صـفر هسـتند. بنـابراین در حل معادلهٔ مارکوف تنها به دنبال جوابهای ناصفر معادله خواهیم بود. سـمت چـپ معادلـهٔ مـارکوف (۱) مثبت است. بنابراین اگر (a,b,c) یکی از جوابهای معادلهٔ مارکوف باشد، یا باید a، b و c هر سـه مثبـت باشند یا دقیقاً دو تا از آنها منفی باشند. در هـر صـورت $(|a|,|b|,|c|)$ نیـز یکـی از جوابهـای معادلـهٔ خواهد بود. همچنین، اگر (a,b,c) یکی از جوابهای معادلهٔ با مختصات مثبت باشد، با تغییـر علامـت هـر دوتایی از مختصات جواب، سه جواب دیگر برای معادله بدست می‌آید.

به همین دلیل، بدون اینکه از کلیت مساله کاسته شود، می‌توان تنها به جستجوی جوابهایی از معادله بـود که مختصات مثبت دارند.

همچنین معادلهٔ مارکوف نسبت به سه متغیـر x و y و z یـک معادلـهٔ متقـارن اسـت. در نتیجـه اگـر (a,b,c) یک جواب معادله باشـد، سـه‌تـایی‌هـای (a,c,b) ، (b,a,c) ، (b,c,a) ، (c,a,b) و (c,b,a) نیز جوابهـایی از معادلـهٔ خواهنـد بـود. بنـابراین در جسـتجوی جوابهـای معادلـه تنهـا مقـادیر x، y و z و می‌تواند برای ما مهم باشد و از مرتب در نظر گرفتن جواب می‌توان صرفنظر کـرد. بـه راحتـی

می‌توان نشان داد که $(1,1,1)$ یکی از جوابهای معادله است. حال می‌خواهیم ببینیم داشتن یک جـواب معادلـه آیا می‌تواند کمکی برای یافتن دیگر جوابها باشد یا نه. اگر (a,b,c) یکی از جوابهای معادله باشد، آنگاه a یکی از جوابهای معادلهٔ $F_a(x)=x^2+b^2+c^2-3bcx=0$ خواهد بود. با استفاده از قضیهٔ ویـت راجـع به ریشه‌های یک عبارت درجه دوم، نتیجه خواهد شد کـه معادلـهٔ فـوق ریشـه دیگـریماننـد $x=a'$ دارد بطوری که

$$a+a'=3bc\ ,\ aa'=b^2+c^2 \qquad (2)$$

تساوی دوم از تساویهای فوق نشـان مـی‌دهـد کـه $a'>0$ و در نتیجـه (a',b,c) نیـز یکـی دیگـر از جوابهای معادلهٔ مارکوف خواهد بود. سه‌تایی $(a'\ ,\ b\ ,\ c)$ را جواب مجاور متناظر بـا مؤلفـهٔ a مـی‌نـامیم. بنابراین اگر (a',b,c) جواب مجاور (a,b,c) باشد، (a,b,c) نیز جواب مجـاور (a',b,c) خواهـد بود. به طور مشابه می‌توان جوابهای مجاور (a,b,c) نسبت به b و یا نسبت به c را تعریـف و پیـدا کـرد. حـال اجـازه دهیـد جوابهـای مجـاور $(1,1,1)$ را پیـدا کنـیم. بـرای اینکـار مـا بایـد معادلـهٔ درجـه دوم $x^2+1^2+1^2-3\times1\times1\times x=0$ را حل کنیم که نشان می‌دهد عـلاوه بـر ریشـه $x=1$ ، $x=2$ نیـز ریشه معادله است. بنابراین $(2,1,1)$ یکی از ریشه‌های معادله مارکوف خواهد بود.

در جواب $(1,1,1)$ و $(2,1,1)$ در میان ریشه‌های معادلهٔ مارکوف نقش مهمی دارند. همانند مارکوف مـا نیز دو جواب فوق را جوابهای منفرد معادله می‌نامیم. جوابهای منفرد فوق، تنها جوابهایی از معادلـهٔ مـارکوف است که دارای حداقل دو مؤلفهٔ برابر هستند.

مسألهٔ ۱. ثابت کنید جواب (a,b,c) از معادلهٔ مارکوف یک جواب منفرد است اگر و تنها اگر دو تـا از مؤلفه‌های آن برابر باشند.

جواب $(1,1,1)$ تنها یک جواب مجاور دارد. دومین جواب منفرد یعنی $(2,1,1)$ دو جـواب مجـاور دارد که عبارتند از $(1,1,1)$ و $(2,5,1)$. جواب مجاور دوم از معادلهٔ :

$$2^2+y^2+1^2=3\times2\times y\times1$$

که با مؤلفهٔ $y=1$ متناظر است بدست می‌آید. جواب $(2,5,1)$ سه جواب مجاور دارد کـه عبـارت انـد از $(2,1,1)$، $(2,5,29)$ و $(13,5,1)$. به طور کلی هـر جـواب منفـرد (a,b,c) از معادلـهٔ مـارکوف سـه جـواب مجـاور تولیـد مـی‌کنـد کـه عبارتنـد از (a',b,c) , (a,b',c) , (a,b,c') کـه در آنهـا $a'=3bc-a$، $b'=3ac-b$ و $c'=3ab-c$.

مسألهٔ ۲. نشان دهید اگر (a,b,c) یکی از جوابهای منفـرد معادلـهٔ مـارکوف باشـد، یکـی از جوابهـای مجاور آن، دارای ماکزیمم مؤلفهٔ کوچکتر و دوتای دیگر دارای ماکزیمم مؤلفهٔ بزرگتر خواهند بود. (مـاکزیمم مؤلفهٔ (a,b,c) عبارت است از $\max\{a,b,c\}$)

قضیهٔ مارکوف. هر جواب معادلهٔ (۱) با زنجیره‌ای از جوابهای مجاور به جـواب منفـرد $(1,1,1)$ منتهـی می‌شود.

اثبات. فرض کنید (a,b,c) یک جواب نامنفرد معادلهٔ(۱) باشد. بنابراین این جواب یک جواب مجاور با ماکزیمم مؤلفهٔ کوچکتر مانند (a_1,b_1,c_1) دارد یعنی :

$$\max\{a_1,b_1,c_1\} < \max\{a,b,c\}$$

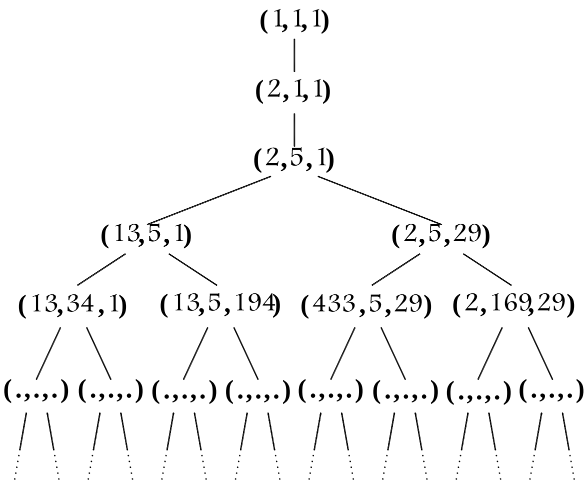
اگر جواب (a_1,b_1,c_1) دوباره نامنفرد باشـد، حتمـاً جـواب مجـاوریماننـد (a_2,b_2,c_2) بـا مؤلفـهٔ ماکزیمم کوچکتر خواهد داشت یعنی $\max\{a_2,b_2,c_2\} < \max\{a_1,b_2,c_1\}$

با ادامهٔ این عمل، دنباله‌ای اکیداً نزولی از اعداد طبیعی حاصل می‌شود :

$$\max\{a,b,c\} > \max\{a_1,b_1,c_1\} > \max\{a_2,b_2,c_2\} > 000$$

که چون طبیعی هستند حتماً دنباله متوقف خواهد شد (اصل نزول نامتناهی می‌گویـد هـیچ دنبالـهٔ اکیـداً نزولی از اعداد طبیعی وجود ندارد.) اگر این روند در جواب (a_n,b_n,c_n) متوقف شود، نتیجه خواهد شد که (a_n,b_n,c_n) حتماً منفرد است. اگر $(a_n,b_n,c_n)=(1,1,1)$ حکم ثابت شـده اسـت در غیـر ایـن صورت $(a_n,b_n,c_n)=(2,1,1)$. همان طور که می‌دانـیم $(2,1,1)$ تنهـا جـواب مجـاور $(1,1,1)$ اسـت. بنابراین حکم ثابت شده است.

قضیهٔ مارکوف نشان می‌دهد که با شروع از جواب $(1,1,1)$ و رفتن به جوابهای مجاور با ماکزیمم مؤلفـهٔ بزرگتر، می‌توان تمام جوابهای معادلهٔ مارکوف را پیدا کرد. بنابراین جوابهای معادلهٔ مارکوف یک شـجره‌نامـه تشکیل می‌دهند (شکل۱). با استفاده از این درخت و با فرض $N>1$، مـی‌تـوان همـهٔ جوابهـای معادلـه بـا مؤلفه‌های نابیشتر از N را پیدا کرد.



(شکل ۱)

مسأله۳. ثابت کنید مؤلفه‌های هر کدام از جوابهای معادلهٔ مارکوف دو به دو نسبت به هم اول هستند.

تعمیم معادلهٔ مارکوف

مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید :

اگر مجموع مربعات سه عدد طبیعی بر حاصلضرب‌شان بخشپذیر باشد، حاصل تقسیم آنها چه عددی خواهد بود؟ به عبارت دیگر می‌خواهیم ببینیم به ازای چه مقداری از k معادلهٔ زیر جواب ناصفر دارد؟

$$X^2+Y^2+Z^2=kXYZ \qquad (3)$$

به ازای $k=3$، معادلهٔ(۳) به معادلهٔ مارکوف تبدیل می‌شود و بازای $k=1$ نیز به راحتی می‌توان نشان داد که معادلهٔ(۳) جواب طبیعی دارد. به عنوان مثال جواب $(3,3,3)$ را در نظر بگیرید.

هورویتس و فروبنیوس معادلهٔ (۳) را بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که معادلهٔ (۳) تنها بازای $k=1$ و $k=3$ جواب دارد. این نتیجه با استفاده از مفاهیم مقدماتی قابل اثبات است.

مسألهٔ٤. فرض کنید A، B و C اعدادی طبیعی باشند. نشان دهید $A^2+B^2+C^2\overset{3}{\equiv}k$ که در آن k تعداد اعدادی از $\{A,B,C\}$ است که مضرب ۳ نیستند.

مسأله٥. ثابت کنید تمام جوابهای معادلهٔ

$$X^2+Y^2+Z^2=XYZ \qquad (4)$$

عبارتند از

$$A=3a\ ,\ B=3b\ ,\ C=3c \qquad (5)$$

که در آنها (a,b,c) یک جواب دلخواه معادلهٔ مارکوف است.

حال به بررسی معادلهٔ (۳) در حالت $k=2$ می‌پردازیم.

مسأله٦. فرض کنید A، B و C اعدادی طبیعی باشند. ثابت کنید.

$$A^2+B^2+C^2\overset{4}{\equiv}k$$

که در آن k تعداد اعداد فرد از $\{A,B,C\}$ می‌باشد.

مسأله۷. ثابت کنید معادلهٔ (۳) در حالت $k=2$ جواب ندارد.

قضیه. معادلهٔ (۳) جواب ناصفر دارد اگر وتنها اگر $k=1$ یا $k=3$.

اثبات. در حالت $k=1$، به مسألهٔ٥ می‌رسیم که نشان می‌دهد معادلهٔ جواب دارد و در حالت $k=3$، معادلهٔ مارکوف نتیجه خواهد شد که می‌دانیم جواب دارد و مسألهٔ۷ نشان می‌دهد که معادلهٔ (۳) در حالت $k=2$ جواب ندارد. بنابراین فرض کنید $k>3$. فرض کنید (a,b,c) یک جواب معادلهٔ (۳) باشد. ثابت می‌کنیم a، b و c دو به دو متمایز هستند. به عنوان مثال فرض کنید $b=c$.

بنابراین $a^2=kab^2-2b^2$ و یا $a^2=(ka-2)b^2$. در نتیجه $ka-2$ مربع کامل است و بنابراین $a^2=b^2d^2$ و یا $a=bd$. در نتیجه :

$$d^2 = ka - 2 = kbd - 2 \Rightarrow 2 = d(kb - d) \Rightarrow d \mid 2$$

اگر $d = 1$ یا 2، نتیجه خواهد شد که $kb = 3$، اما می‌دانیم $k > 3$ که با نتیجه $kb = 3$ تناقض دارد.

بنابراین هر جواب معادلهٔ (۳) دارای مؤلفه‌های دوبه دو متمایز خواهد بود. بدون اینکه کلیت مسأله از بین برود و می‌توان فرض کرد $a > b > c$. حال فرض کنید

$$P(x) = x^2 + b^2 + c^2 - kabc$$

اگر (a', b, c) جواب مجاور (a, b, c) باشد آنگاه

$$P(b) = 2b^2 + c^2 - kb^2c < 3b^2 - kb^2c \le 3b^2 - kb^2 < 0$$

همچنین براحتی می‌توان نشان داد که b بین دو ریشهٔ a و a' از معادلهٔ $P(x) = 0$ قرار دارد. نبابراین ماکزیمم مؤلفهٔ جواب (a', b, c) از ماکزیمم مؤلفهٔ جواب (a, b, c) کمتر است. بنابراین برای هر جواب (a, b, c) می‌توان جوابی با ماکزیمم مؤلفهٔ کمتر مانند (a_1, b_1, c_1) پیدا کرد و چون سه مؤلفهٔ هر جواب دو به دو متمایزند بنابراین با ادامهٔ این روند و یافتن جواب (a_2, b_2, c_2) از (a_1, b_1, c_1) و (a_3, b_3, c_3) از (a_2, b_2, c_2) و . . . دنباله‌ای نامتناهی از جواب خواهیم یافت که در آنها

$$\max\{a, b, c\} > \max\{a_1, b_1, c_1\} > \max\{a_2, b_2, c_2\} > \cdots.$$

که دنباله‌ای اکیداً نزولی از اعداد طبیعی است و این تناقض است. بنابراین $k \le 3$ و قضیه اثبات شده است.

نتیجه. اگر (a, b, c) یک جواب معادلهٔ مارکوف باشد اعداد a، b و c دو به دو نسبت به هم اول هستند.

اثبات. داریم :

$$(a, b) = d > 1 \Rightarrow d \mid c \Rightarrow a = dX\ ,\ b = dY\ ,\ c = dZ \Rightarrow X^2 + Y^2 + Z^2 = 3dXYZ$$

که نشان می‌هد معادلهٔ (۳) بازای $k = 3d > 3$ دارای جواب (X, Y, Z) است و این با قضیهٔ فوق تناقض دارد. بنابراین $(a, b) = 1$. به همین ترتیب

$$(b, c) = 1\ ,\ (c\ ,\ a) = 1$$

معادلهٔ زیر تعمیم مستقیمی از معادلهٔ مارکوف است :

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = nx_1x_2\ldots x_n \qquad (6)$$

که در آن $n > 3$. براحتی می‌توان بعضی از نتایج مربوط به معادلهٔ مارکوف را برای معادلهٔ(٦) تعمیم داد. (جواب منفرد $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ برای معادله وجود دارد و می‌توان از این جواب منفرد به جوابهای مجاور رسید.) جستجو و تحقیق پیرامون این معادله خود می‌توان موضوعی برای یک مقالهٔ تحقیقی باشد که به خوانندگان علاقمند واگذار می‌شود.

❖❖❖