کوشیار، سال اول، شمارهٔ ۲، صص ۱۰۰ ـ ۱۰۵

مسائل موزاییک بندی و ایده‌های حل آنها (قسمت اول)

محرم ایرد موسی

موزاییک بندی همواره یکی از موضوعات اصلی مسایل ترکیبیات بوده است. و در این زمینه با مسایل جالب و متنوعی روبرو هستیم. شاید با بعضی از مسایل موزاییک‌بندی در المپیادهای ریاضی و کامپیوتر برخورد کرده‌اید. در این نوع ازمسایل، غالباً نوع (یا انواع) خاصی از موزاییک‌ها برای فرش کردن یک زمین که می‌تواند به شکل مستطیل یا مثلث یا . . . . باشد به کار گرفته می‌شود و سؤال اصلی عموماً این است که وجودالگوهایی برای موزاییک‌بندی را ثابت یا رد کنیم. مسألهٔ زیر می‌تواند یک مسألهٔ الگو از این دست مسایل باشد. راه‌حلهایی که برای این مسأله آورده می‌شود به دقت مطالعه کنید و ایدهٔ بکار رفته در هرکدام از راه‌حلها را در حل مسایل انتهای مقاله بکار ببندید.

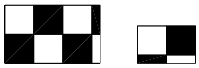
یک مسألهٔ نمونه. زمینی مستطیل شکل را توسط موزاییک‌هایی مستطیل شکل که طول یا عرض هر کدام از آنها عددی طبیعی است فرش کرده‌ایم. ثابت کنید یکی از ابعاد زمین نیز عددی طبیعی خواهد بود.

راه‌حل اول. رنگ آمیزی شطرنجی

گوشهٔ سمت راست و پایین زمین مستطیل شکل $a\times b$ را مبدأ مختصات و دو ضلع عمود بر هم در این رأس را محورهای x و y در نظر می‌گیریم (شکل ۱)

شکل1

سپس با شروع از مبدأ زمین را به مربعـاتی بـا طـول ضلع $\frac{1}{2}$ تقسیم می‌کنیم و آنها را همانند صفحهٔ شطرنج با دو رنگ سفید و سیاه رنگ آمیزی می‌کنیم.



شکل2

ناحیهٔ سیاه و ناحیهٔ سفید پوشیده شده توسط هر موزاییک با هم برابرند.علت این است که حـداقل یکـی از ابعاد موزاییک عددی صحیح است (شکل ۲) چون توانسته‌ایم زمینی را توسط چنین موزاییک‌هـایی فـرش کنیم نتیجه چنین خواهد شد که مجموع مساحت ناحیه‌های سیاه و مجموع مساحت ناحیه‌های سفید زمین با هم برابرند. در صورتی که اگر ابعاد زمین، a و b اعدادی ناصحیح باشـند (شـکل ۱) دیگـر ناحیـهٔ سـیاه و ناحیهٔ سفید زمین هم مساحت نخواهند بود.

توجه کنید که خط $x=[a]$ و $y=[b]$ زمین را چهار مستطیل کوچکترتقسیم کرده‌اند کـه در سـه‌تـای آنها ناحیه‌های سیاه و سفید هم مساحتند اما در مستطیل مقابل به رأس مبدأ که ابعاد آن، $\{a\}$, $\{b\}$ اعـدادی بین صفر و یک هستند ناحیه‌های سیاه و سفید به هیچ وجه هم مساحت نخواهد بود. بنابراین حداقل یکی از ابعاد زمین، a یا b عددی صحیح خواهد بود.

ایدهٔ راه حل اول. همهٔ زمینها را قبل از موزاییک‌بندی شطرنجی کنید!

راه‌حل دوم. شمارش مربعات

اضلاع موزاییک‌ها را با الگوی زیر جابجا می‌کنیم.ضلع عمـودی موزاییـک M را در صـورتی کـه روی خط $x=n$ قرار دارد و $n\in N$، جابجا نمی‌کنیم و در صورتی که روی خط $x=a$ $(a\notin N)$ قرار دارد به موازات خودش به روی خط $x=[a]+\frac{1}{2}$ جابجا مـی‌کنـیم. همچنـین ضـلع افقـی موزاییـک M را در صورتی که روی خط $y=n$ $(n\in N)$ قرار دارد جابجا نمـی‌کنـیم و در صـورتی کـه روی خـط $y=b$ $(b\notin N)$ قرار داشته باشد، به موازات خودش به روی خط $y=[b]+\frac{1}{2}$ جابجا می‌کنیم. پس از جابجایی اضلاع موزاییک‌ها، مستطیل اصلی به مستطیل جدید R' تبدیل می‌شود، همچنین با توجه به نوع موزاییک‌هـا نتیجه خواهد شد که یا اضلاع عمودی و یا اضلاع افقی هر موزاییک به یک اندازه و در یـک جهـت جابجـا خواهند شد. بنابراین پس از جابجایی اضلاع موزاییک‌ها هر موزاییک تعداد زوجی از مربعات به ابعاد $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ را خواهند پوشاند. بنابراین R' نیز باید شامل تعداد زوجـی از مربعـات $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ باشـد. امـا اگـر در مسـتطیل اصلی a و b هیچ کدام صحیح نباشد. R' مستطیلی به ابعاد $[a]+\frac{1}{2}$ و $[b]+\frac{1}{2}$ خواهـد بـود کـه شـامل تعداد فردی از مربعات $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ خواهد بود و این تناقض است.در نتیجه a یا b عددی صحیح خواهـد بـود.

در این راه‌حل از تقسیم‌بندی مستطیل اصلی به مربعات $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ استفاده شده است اما بدون رنگ‌آمیزی شطرنجی.

ایدهٔ راه‌حل دوم. سعی کنید یک چیزهایی را که تعدادشان فرد است یک جوری بشمارید که تعدادشان زوج در بیاید و نتیجه بگیرید که حرف، حرف شماست!

راه‌حل سوم. چند جمله‌ایها

اضلاع موزاییک‌ها را با الگوی زیر جابجا می‌کنیم. ضلع عمودی موزاییک M را در صورتی که روی خط $x=n$ $(n\in N)$ قرار دارد، جابجا نمی‌کنیم و در صورتی که روی خط $x=a$ $(a\notin N)$ قرار داشته باشد به موازات خودش به روی خط $x=a+t$ جابجا می‌کنیم. همچنین ضلع افقی موزاییک M را در صورتی که روی خط $y=n$ $(n\in N)$ قرار دارد، جابجا نمی‌کنیم و در صورتی که روی خط $y=b$ $(b\notin N)$ قرار داشته باشد به موازات خودش به روی خط $y=b+t$ جابجا می‌کنیم. در اینجا t پارامتر ثابتی است. پس از جابجایی اضلاع موزاییکها،مستطیل اصلی به مستطیل جدید R' تبدیل می‌شود. همچنین با توجه به نوع موزاییک‌ها نتیجه خواهد شد که یا اضلاع عمودی و یا اضلاع افقی هر موزاییک، به یک اندازهٔ و در یک جهت جابجا خواهند شدو در نتیجه موزاییک $w\times h$ پس از جابجایی به فرم $w\times(h\pm t)$ یا $(w\pm t)\times h$ و یا $w\times h$ تبدیل خواهد شد.

بنابراین مساحت مستطیل R' یک چند جمله‌ای از درجهٔ حداکثر یک بر حسب پارامتر t خواهد بود. اما اگر ابعاد مستطیل اصلی، a و b هیچکدام صحیح نباشد، R' مستطیلی به ابعاد $a+t$ و $b+t$ خواهد بود که نشان می‌دهد مساحت R' یک چندجمله‌ای از درجهٔ ۲ بر حسب پارامتر t خواهد بود و این تناقض است. بنابراین a یا b عددی صحیح خواهد بود، تا مساحت R' برابر $a\times(b\pm t)$ یا $(a\pm t)\times b$ یا $a\times b$ بوده و نسبت به پارامتر t از درجهٔ حداکثر یک باشد.

ایدهٔ راه‌حل سوم. چندجمله‌ایهای درجهٔ اول و دوم را دست کم نگیرید!

راه حل چهارم. اعداد اول

ثابت کنید برای هرعدد اول p، جزء اعشاری a یا b یعنی $\{a\}$ و $\{b\}$ از $\frac{1}{p}$ کوچکتر است. در نتیجه حداقل یکی از ابعاد مستطیل اصلی، عددی صحیح است. برای این منظور $\frac{1}{p}$ را به عنوان واحد اندازه‌گیری در نظر می‌گیریم.

بنابراین هرکدام از ابعاد مستطیل با واحد جدید، p برابر ابعاد قبلی مستطیل است.رئوس هر کدام از موزاییک‌ها را به صورت زیر تغییر می‌دهیم : رأس $(x\ ,\ y)$ را به رأس $([x]\ ,[y])$ منتقل می‌کنیم.

با این تغییر چون طول حداقل یک ضلع از هر موزاییک مضرب p است (پس از تغییرواحد) و طول اضلاع موزاییک‌ها عددی صحیح خواهند بود بنابراین مساحت هر موزاییک مضربی از p و در نتیجه مساحت مستطیل جدید نیز مضرب p خواهند بود. بنابراین یا $[pa]$ و یا $[pb]$ مضرب p خواهد شد. درنتیجه با فرض $[pa]=kp$ خواهیم داشت :

$$kp \le pa < kp+1 \Rightarrow k \le a < k+\frac{1}{p} \Rightarrow \{a\} < \frac{1}{p}$$

و یا $\{b\} < \frac{1}{p}$. چون برای هر عدد اول p

$$\{a\} \text{ یا } \{b\} < \frac{1}{p}$$

بنابراین a یا b باید عددی صحیح باشد تا $\{a\}$ یا $\{b\}=0$.

ایدهٔ راه‌حل چهارم. راه حل چهارم کاربرد ماهرانه‌ای از دو گزارهٔ ساده و ابتدایی زیر در آنالیز ریاضی ونظریه اعداد است.

۱- اگر a , b اعدادی صحیح باشند و p عددی اول باشد در اینصورت $p \mid a.b \Rightarrow p \mid a$ یا $p \mid b$.

۲- اگر برای هر عدد اول p داشته باشیم $0 \le x < \frac{1}{p}$ ، در نتیجه باید $x=0$.

راه‌حل پنجم. مسیر اولری

گراف G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.مجموعهٔ رئوس موزاییک‌ها را همان مجموعه رئوس گراف در نظر بگیرید. دو رأس x و y در گراف G را به هم وصل می‌کنیم هرگاه x و y دو رأس یک ضلع با طول صحیح در یک موزاییک باشند (در صورتی که x و y دو رأس ضلع مشترک دو موزاییک با طول ضلع صحیح باشند دو یال بین x و y رسم می‌کنیم). چون در هر موزاییک دو ضلع با طول صحیح وجود دارد و هر رأس هر موزاییک رأس ۲ یا ٤ موزاییک است بنابراین درجهٔ هر رأس ۲ یا ٤ خواهد بود بجز رئوس مستطیل اصلی که از درجهٔ ۱ خواهند بود. بنابراین با شروع از یک رأس مستطیل اصلی و حرکت روی یالها به علت زوج بودن درجهٔ رئوس (بجز ٤ رأس مستطیل اصلی) مسیر به یک رأس دیگر مستطیل اصلی ختم خواهد شد.اگر ابتدا و انتهای مسیرمذکور رئوس مجاور مستطیل اصلی باشند ضلع مجاور به آن دو رأس دارای طولی صحیح خواهند بود و اگر دو رأس مقابل مستطیل اصلی باشند هر دو ضلع مستطیل اصلی دارای طول صحیح خواهند بود.

راه‌حل ششم : گراف دو بخشی

مجموعهٔ T را برابر با مجموعه موزاییک‌ها و S را برابر با مجموعهٔ رئوس با مختصات صحیح موزاییک‌ها در نظر می‌گیریم. گراف دو بخشی G را با دو بخش T و S در نظر بگیرید. رأس t_i از T که متناظر بایک موزاییک است به رأس s_j از S متصل است اگر و تنها اگر s_j متناظر با یک رأس موزاییک t_i باشد. در گراف مذکور هر موزاییک شامل صفر،۲ یا ٤ رأس با مختصات صحیح است. یعنی درجهٔ هر رأس از T عددی زوج است.

از طرفی

$$\text{تعداد یالهای گراف} = \sum_{t_i \in T} \deg(t_i) = \sum_{s_j \in S} \deg(s_j)$$

بنابراین چون $\deg(t_i)$ عددی زوج است بنابراین تعداد یالها عددی زوج است.در نتیجه مجموع درجهٔرئوس S نیز باید عددی زوج باشد.هررأس $(x\ ,\ y)$ از S بجز رئوس مستطیل اصلی می‌تواندرأس ۲ یا ٤ موزاییک باشد بنابراین چون رأس $(0,0)$ تنها متعلق به یک موزاییک است و درجه‌اش فرد است در نتیجه باید رأس دیگری بادرجهٔ فرد داشته باشیم یعنی حداقل یکی دیگر از رئوس مستطیل اصلی باید عضو S باشد که نتیجه می‌شود مختصات رأس دیگری از مستطیل اصلی باید صحیح باشد.بنابراین حداقل طول یک ضلع از مستطیل اصلی عددی صحیح است.

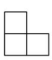
❖❖❖

چند مسألهٔ زیر برای آنهایی است که می‌خواهند بجای مطالعهٔ راه‌حلهای دیگران،خود یک راه‌حل برای مسأله‌ها دست و پا کنند هر چند دست و پا شکسته.

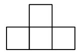
مسأله۱. فرض کنید از یک صفحهٔ شطرنجی $n \times n$، ۲ خانه را حذف کرده‌باشیم. ثابت کنید بقیهٔ خانه‌ها را می‌توان با موزاییک‌های 2×1 پوشاند اگرو فقط اگر n زوج باشد و دو خانهٔ حذف شده همرنگ نباشند.

مسأله۲. حداکثر چند مستطیل 4×1 را می‌توان در مربع 6×6 جا داد؟

مسأله۳. ثابت کنید شرط لازم و کافی برای آنکه بتوان یک مستطیل $m \times n$ را با موزاییک‌های $1 \times k$ فرش کرد آن است که $k | m$ یا $k | n$.

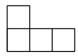
مسأله٤. از صفحهٔ شطرنج 8×8 یک خانه‌گوشه را بریده‌ایم. آیا می‌توان این صفحه را با سنگهای 1×3 فرش کرد؟ آیا همین صفحه را می‌توان با موزاییک‌های گونیایی  فرش کرد؟

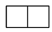
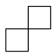
مسأله۵. آیا می‌توان شش ضلعی منتظم به ضلع n $(n\in N)$ را با موزاییک‌هایی به شکل  فرش کرد؟

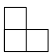
مسأله۶. زمینی مستطیل شکل با موزاییک‌های  فرش شده است. ثابت کنید $8|mn$.

مسأله۷. ثابت کنید نمی‌توان مربع 23×23 را با موزاییک‌های 2×2 و 3×3 فرش کرد.

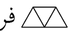
راهنمایی. سطرها را یکی در میان سیاه و سفید کنید.

مسأله۸. خانه‌های چهارگوشهٔ مربع $n\times n$ را حذف کرده‌ایم. بازای چه مقادیری از n، شکل حاصل را می‌توان با موزاییک‌های  فرش کرد؟

مسأله۹. از یک مربع $(2n+1)(2n+1)$ یک خانهٔ گوشه را حذف می‌کنیم. به ازای چه مقادیری از n، شکل حاصل را می‌توان با موزاییک‌های  و  فرش کرد؟

مسألهٔ۱۰. از مربعی به ضلع 2^n ($n\in N$) که به مربعات واحد افراز شده است، یک مربع واحد را به دلخواه حذف می‌کنیم. ثابت کنید شکل حاصل را می‌توان با موزاییک‌هایی به شکل  فرش کرد.

راهنمایی. از روش استقرا استفاده کنید.

مسألهٔ۱۱. از یک گوشهٔ مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع 2^n ($n\in N$) که به مثلثهای متساوی الاضلاع به ضلع واحد افراز شده است، مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع واحد را حذف کرده‌ایم. ثابت کنید شکل حاصل را می‌توان با موزاییک‌هایی به شکل  فرش کرد.

❖❖❖