چهل میلیون گام برای ثبت یک مثلث‌بندی

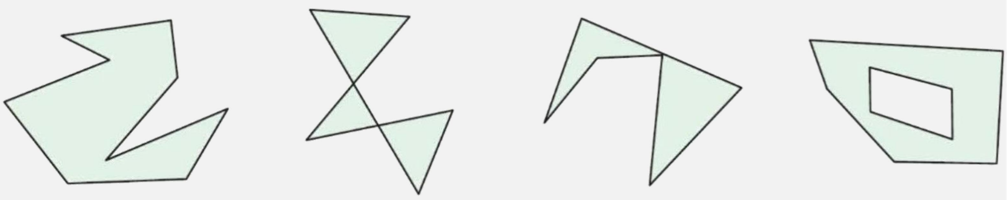
دکتر محرم نژاد ایردموسی
عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

➔ سال ۱۸۰۰ میلادی، قهرمان ۵۵ سالهٔ ژاپن، سفر هفده ساله‌اش را آغاز می‌کند. **اینو تاداتاکا (Ino Tadataka)**، قهرمان ملی ژاپن، یک نقشه‌بردار است. نقشه‌برداری که آرزویش را دیرهنگام آغاز می‌کند اما نشان می‌دهد که دود از کنده بلند می‌شود. نقشه‌ای که او از ژاپن تهیه می‌کند آنقدر دقیق و بی‌نقص است که با نقشه هوایی امروزی ژاپن مو نمی‌زند!

اما این پیرمرد بازنشسته، در دورانی که امپراطوری ژاپن به تازگی درهای ژاپن را به روی جهان گشوده است، چگونه با ابتدایی‌ترین وسایل که اغلب آنها را خودش می‌ساخته است، موفق به انجام این کار بزرگ می‌شود؟ در یک جمله می‌توان گفت او در طول ۱۷ سال، چهل میلیون گام برمی‌دارد تا یک مثلث‌بندی بزرگ را ثبت کند! مثلث‌هایی که به کمک آنها تهیهٔ نقشهٔ دقیق ژاپن در سال ۱۸۲۱ (چند سال پس از مرگ تاداتاکا) به سرانجام می‌رسد.

اما مثلث‌بندی به چه معناست؟ چندضلعی‌ها در هندسهٔ مسطحه مانند اعداد طبیعی هستند در نظریهٔ اعداد، همانطور که عدد یک در ساخت اعداد طبیعی نقشی مهم دارد مثلث هم در ساخت چندضلعی‌ها، نقش زیربنایی دارد. برای ورود به بحث اصلی ابتدا به تعریف چندضلعی می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم یک منحنی بسته در صفحه را ساده می‌نامیم هرگاه خودش را قطع نکند.

تعریف ۱. یک چندضلعی مانند P یک ناحیهٔ محدود از صفحه است که توسط تعدادی متناهی از پاره‌خط‌ها که یک منحنی بستهٔ ساده را تشکیل می‌دهند، محصور شده است. این پاره‌خط‌ها را اضلاع P و رئوس انتهایی آنها را رئوس چندضلعی P می‌نامیم. اجتماع نقاط اضلاع چندضلعی P را محیط P می‌نامیم و با ∂P نمایش می‌دهیم.
به عنوان مثال در شکل (۱)، تنها شکل (a)، یک چندضلعی را نشان می‌دهد و سه شکل دیگر واجد تمامی شرایط چندضلعی نیستند.



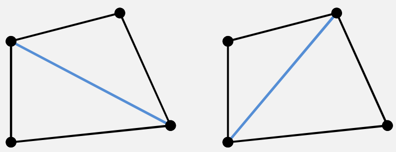
(a) (b) (c) (d)

شکل ۱

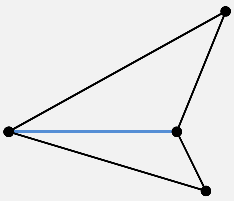
چهل میلیون گام برای ثبت یک مثلث‌بندی

محیط هر چندضلعی، صفحه را به دو ناحیه افراز می‌کند. به عبارت دقیق‌تر، به ازای هر چندضلعی P ، با حذف نقاط روی محیط P از صفحه، دو ناحیه ایجاد می‌شود: ناحیه‌ای کراندار که درون چندضلعی نامیده می‌شود و ناحیه‌ای بی‌کران که خارج چندضلعی P نامیده می‌شود. هرچند این افراز در حالت کلی‌تر در قضیهٔ معروف خم ژردان در سال ۱۸۸۲ ثابت شده است اما می‌توان این افراز را برای چندضلعی‌ها به طور مستقل ثابت کرد.

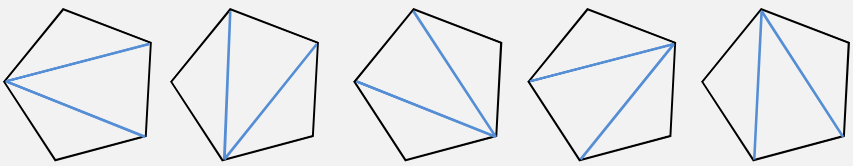
اما قضیهٔ اصلی که در این مقاله به آن خواهیم پرداخت این است که درون چندضلعی را می‌توان به مثلث‌هایی افراز کرد به‌طوری‌که رئوس مثلث‌ها همان رئوس چندضلعی هستند و اضلاع مثلث‌ها، قطرها یا اضلاع چندضلعی هستند. دقت کنید که هر نقطه از درون چندضلعی یا روی ضلع مشترک دو مثلث قرار می‌گیرد یا درون یک مثلث. به‌عنوان مثال، هر چهارضلعی محدب، دو مثلث‌بندی دارد (شکل ۲) و هر چهارضلعی غیرمحدب تنها یک مثلث‌بندی دارد (شکل ۳). به‌عنوان مثالی دیگر، پنج‌ضلعی محدب، پنج مثلث‌بندی دارد (شکل ۴).



شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

تمرین ۱. یک پنج‌ضلعی رسم کنید که تنها یک مثلث‌بندی داشته باشد.

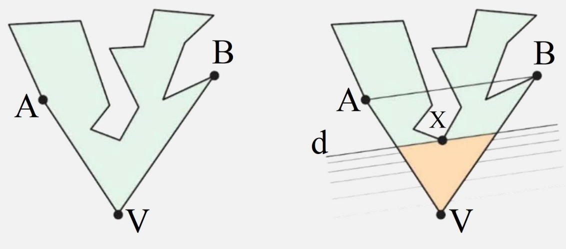
تمرین ۲. یک پنج‌ضلعی رسم کنید که دقیقاً دو مثلث‌بندی داشته باشد.

اما برای اثبات قضیهٔ اصلی به لم زیر احتیاج داریم.

لم ۱. هر چندضلعی با حداقل چهار رأس، حداقل یک قطر دارد.

(قطر چندضلعی، پاره‌خطی است که دو رأس چندضلعی را به هم وصل می‌کند و تمام نقاط آن به‌جز دو رأس انتهایی، درون چندضلعی قرار می‌گیرند.

اثبات. فرض کنید چندضلعی P را در صفحهٔ مختصات رسم کرده‌اید. رأسی از P با کمترین عرض را در نظر بگیرید. (اگر بیش از یک رأس وجود داشت؛ بین آنها رأسی را در نظر بگیرید که کمترین طول را دارد). این رأس را V می‌نامیم. دو رأس مجاور V روی محیط P را A و B می‌نامیم و پاره‌خط AB را در نظر می‌گیریم. اگر پاره‌خط AB محیط P را به‌جز A و B در جایی دیگر قطع نکند، آنگاه AB قطر P خواهد بود. در غیراین‌صورت فرض کنید پاره‌خط AB محیط P را در نقاطی به‌جز A و B قطع کرده است. درنتیجه مثلث ABV شامل رئوسی از چندضلعی P خواهد بود. حال خطی به موازات AB مانند d در نظر بگیرید که از رأس V می‌گذرد. با حرکت دادن این خط به موازات AB به سمت AB ، اولین جایی که خط d رأسی از P را قطع می‌کند در نظر بگیرید. فرض کنید X این رأس باشد. به راحتی نتیجه می‌شود پاره‌خط VX قطری از P خواهد بود.



شکل ۵

حال می‌توانیم به کمک این لم، قضیهٔ زیر را ثابت کنیم:

قضیهٔ ۱. هر چندضلعی ساده، حداقل یک مثلث‌بندی دارد.

اثبات. (به کمک استقرای قوی روی تعداد رئوس چندضلعی) اگر چندضلعی شامل n رأس باشد، در حالت $n = ۳$، چندضلعی خود یک مثلث است و چیزی برای اثبات باقی نمی‌ماند. پس حکم برای $n = ۳$ برقرار است. حال فرض کنید $n \geq ۴$ و فرض کنید حکم برای همهٔ چندضلعی‌های سادهٔ با کمتر از n رأس برقرار باشد. چندضلعی دلخواه P با n رأس را در نظر بگیرید. طبق لم ۱، P حداقل یک قطر دارد. فرض کنید AB قطری از P باشد. با رسم این قطر، P به دو چندضلعی کوچکتر افراز می‌شود که آنها را $P_۱$ و $P_۲$ می‌نامیم. چون A و B دو رأس غیرمجاور P هستند، پس تعداد رئوس $P_۱$ و $P_۲$ از P کمتر است. درنتیجه طبق فرض استقرای قوی، هرکدام از آنها یک مثلث‌بندی دارند. با کنار هم قرار دادن یک مثلث‌بندی از $P_۱$ و یک مثلث‌بندی از $P_۲$، به یک مثلث‌بندی از P می‌رسیم.

چهل میلیون گام برای ثبت یک مثلث‌بندی

همهٔ مثلث‌بندی‌های یک چندضلعی ساده در یک پارامتر یکسان هستند. درواقع می‌توان قضیهٔ زیر را به کمک استقرای قوی ثابت کرد:

قضیهٔ ۲. هر مثلث‌بندی یک n ضلعی ساده شامل $n-۲$ مثلث و $n-۳$ قطر n ضلعی است.

اثبات. به عهدهٔ خواننده.

همانطور که در ابتدای مقاله اشاره شد، اینو تاداتاکا، قهرمان ملی ژاپن، برای رسیدن به نقشهٔ دقیقی از ژاپن، ابتدا سطح کشور ژاپن را به مثلث‌هایی که طول هرکدام از اضلاع و همچنین ارتفاع رئوس آنها مشخص بود افراز می‌کند. این کار تاداتاکا و تیم همراهش نزدیک ۲۰ سال طول می‌کشد. اما حاصل کار نقشه‌ای از ژاپن می‌شود که از دقت بالایی برخوردار است.

در شمارهٔ آینده، به ارائه کاربردهایی از مثلث‌بندی خواهیم پرداخت.

فراغتگـــاه

شماره ۵

چه کسی با چه کسی؟!

یکی از خانم‌های کنجکاو فامیل، دربارهٔ ازدواج‌هایی که قرار بود به تازگی انجام شود تحقیق می‌کرد! و واقعیت این بود که سه نفر از آقایان به اسامی احمد، کریم و بهنام قرار بود که با سه نفر از خانم‌ها به اسامی الهام، زهره و مهناز در آیندهٔ نزدیک ازدواج کنند. نتیجهٔ پرس و جوهای او این‌ها بود: احمد گفت که می‌خواهد با الهام ازدواج کند. الهام گفت که همسر آیندهٔ او کریم است و کریم گفت که همسر آیندهٔ او زهره است و جالب این که هیچکدام از آنها حقیقت را نگفتند! هرکس قرار است با چه کسی ازدواج کند؟

پاسخ در صفحه ۴۸