سیستم اعداد ۲

مبانی برنامه‌نویسی
(۱۱-۱۳-۱۳۹۱)
جلسه‌ی چهارم (جبرانی)

دانشگاه شهید بهشتی
پاییز ۱۳۹۲
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر
احمد محمودی ازناوه

http://faculties.sbu.ac.ir/~a_mahmoudi/

فهرست مطالب

- اعداد صحیح
  - اعداد صحیح بدون‌علامت
  - اعداد صحیح علامت‌دار

جمع اعداد دودویی بدون علامت

$$
\begin{array}{rl}
X= & x_4x_3x_2x_1x_0 \\
+Y= & y_4y_3y_2y_1y_0 \\
\hline
S= & s_4s_3s_2s_1s_0
\end{array}
$$

مثال ۱

رقم‌های نقلی

$$
\begin{array}{r}
\color{red}{1\,1\,1\,1\ \ } \\
0\,1\,1\,1\,1 \\
+\,0\,1\,0\,1\,0 \\
\hline
1\,1\,0\,0\,1
\end{array}
$$

مثال ۲

$$
\begin{array}{r}
\color{red}{1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ \ } \\
0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\
+\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \\
\hline
1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0
\end{array}
$$

یا

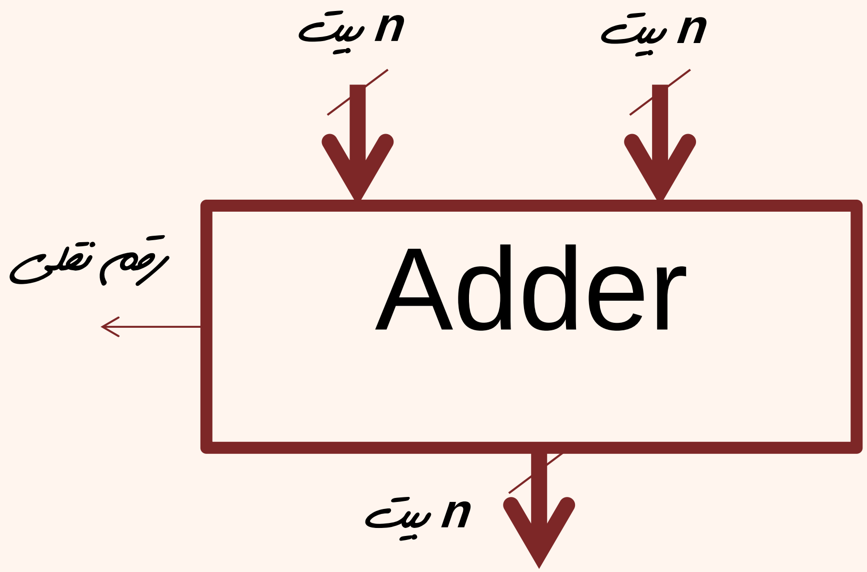
$$
\begin{array}{r}
\color{red}{1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ \ } \\
0\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 \\
+\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \\
\hline
1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0
\end{array}
$$

زنجیره‌ی رقم‌های نقلی باعث کندی عملیات جمع می‌شود، در درس‌های آینده (مدارمنطقی) با این مشکل و روش‌های مقابله با آن آشنا خواهید شد

- در ادامه برای سادگی فرض می‌کنیم اعداد چهار بیتی باشند:
  - می‌توان از ۰ تا ۱۵ را با چهار بیت نمایش داد.
- برای نمایش اعداد به حافظه‌ای که در نظر گرفته شده است، محدود هستیم.
- در صورتی که حاصل عملیات (جمع) در فضای در نظر گرفته نگنجد، گفته می‌شود که «سرریز(Overflow)» رخ داده است.

$$\begin{array}{r} 1111 \\ +\ 0001 \\ \hline 10000 \end{array}$$

جمع‌کننده و سرریز در اعداد بدون علامت



رقم نقلی مشخص می‌کند، که سرریز رخ داده است یا نه

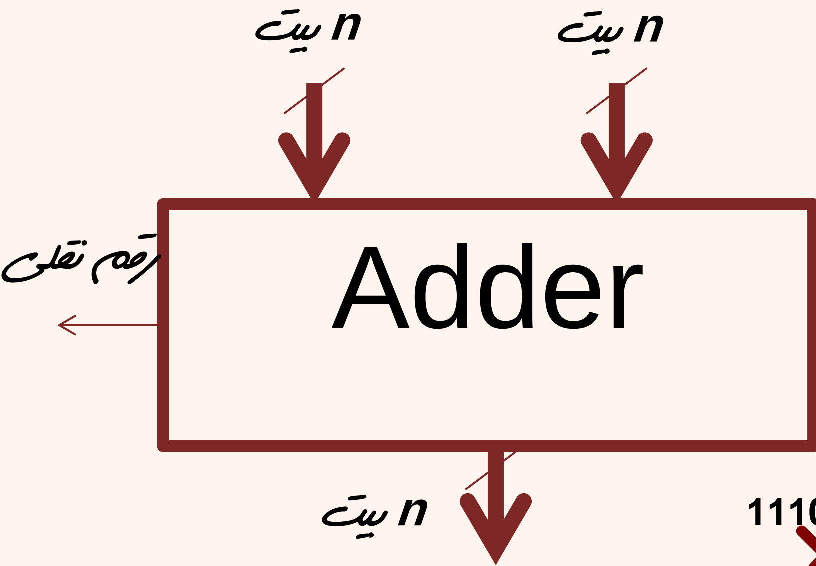
$$\begin{array}{r} 1111 \\ +\ 0001 \\ \hline 10000 \end{array}$$

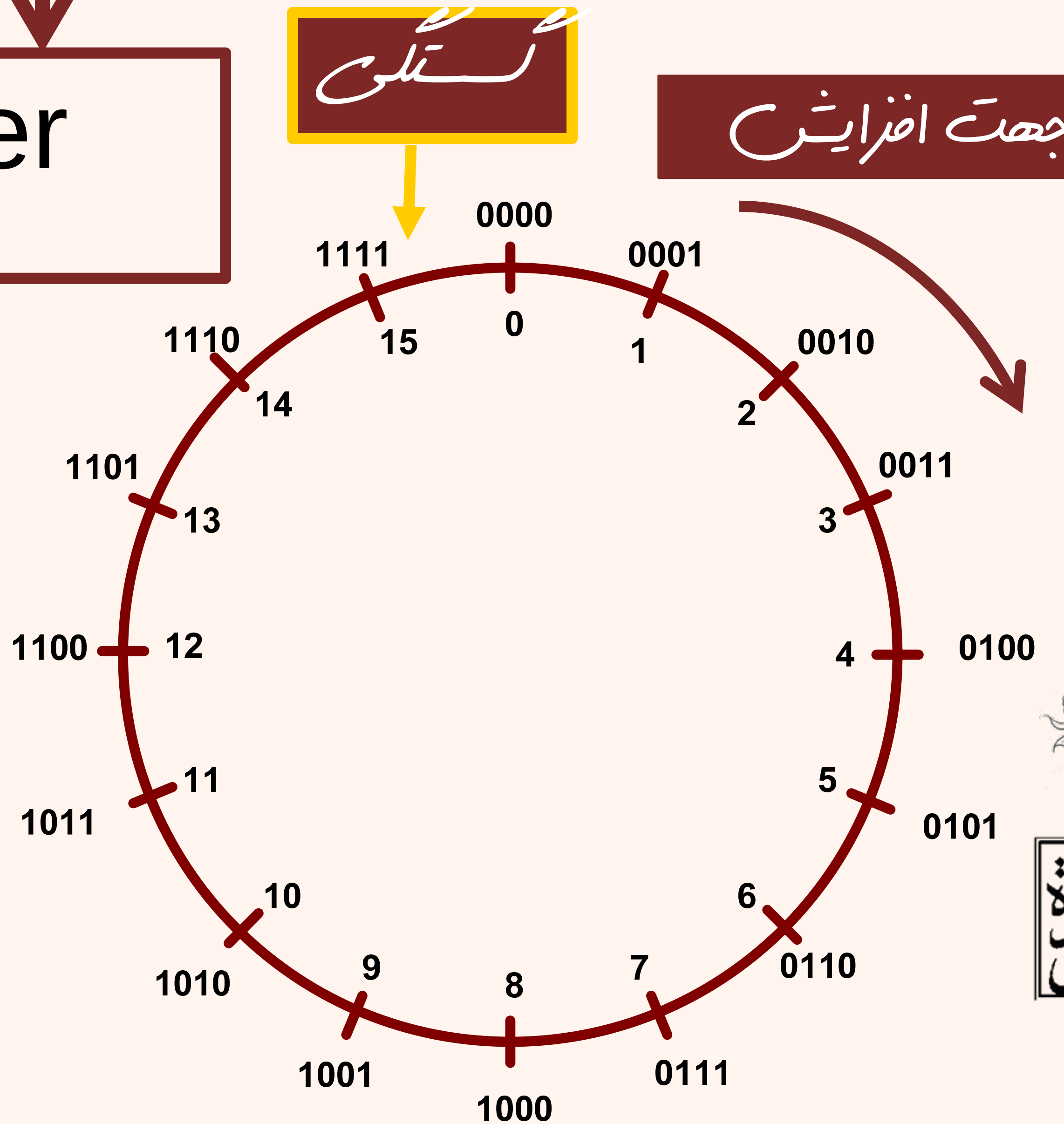
این بیت قابل ذخیره کردن نیست، جا نمی‌شود

جمع کننده در عمل به صورت زیر عمل می‌کند:

15+1=0

جمع‌کننده‌ی پیمانه‌ای



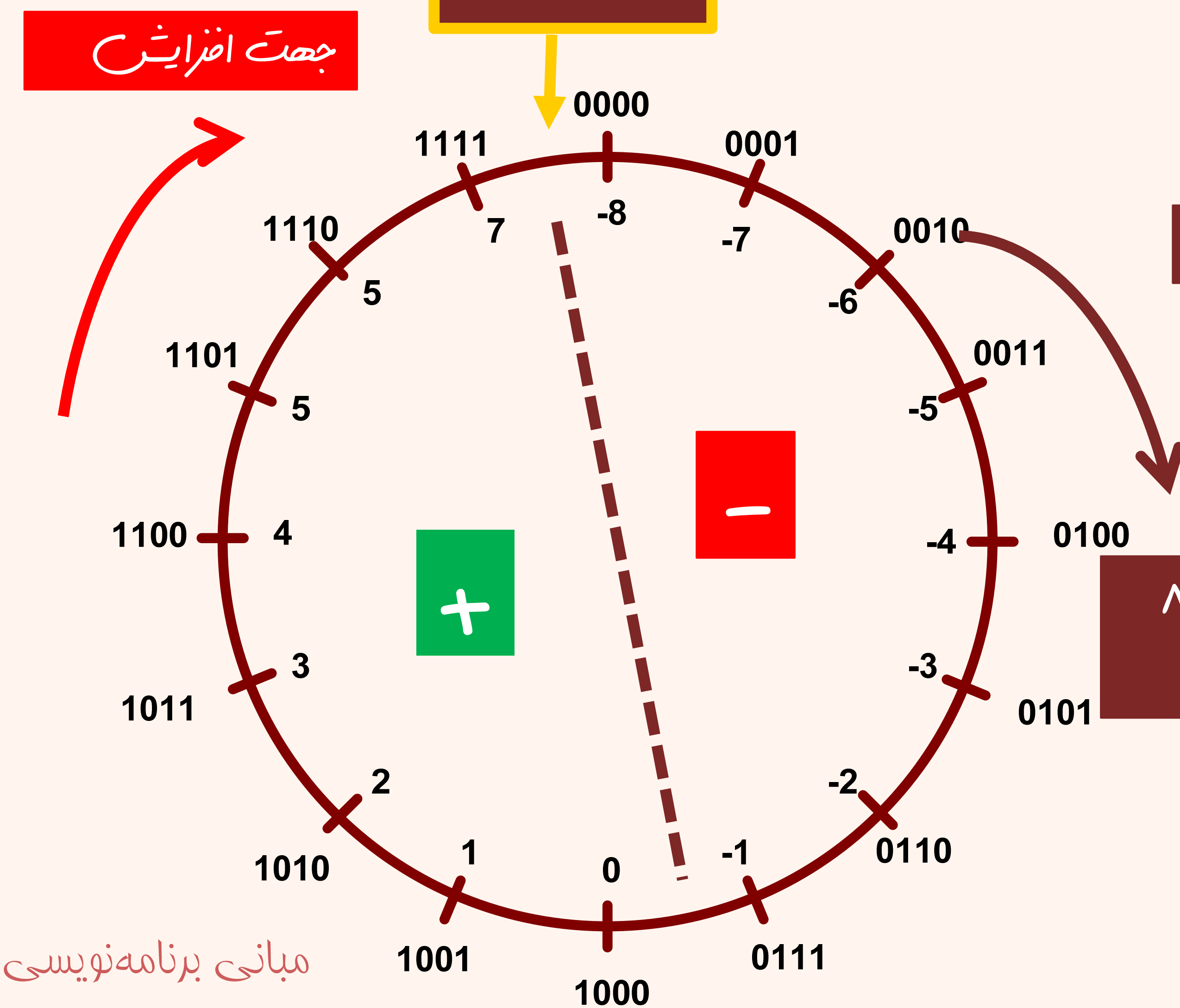


تاکنون در مورد اعداد بدون‌علامت بحث شد، در ادامه خواهیم دید اعداد علامت‌دار چگونه ذخیره می‌شوند؟

- اعداد صحیح بدون‌علامت Unsigned integer
- اعداد علامت‌دار
  - سیستم‌عددی پیش‌قدردار Biased representation
  - سیستم علامت و مقدار Signed magnitude
  - اعداد مکمل ۱ 1's complement
  - اعداد مکمل ۲ 2's complement

سیستم عددی پیش‌قدردار

- در این شیوه اعداد به صورت جمع شده با عددی دیگر (Bias) فرض می‌شوند.



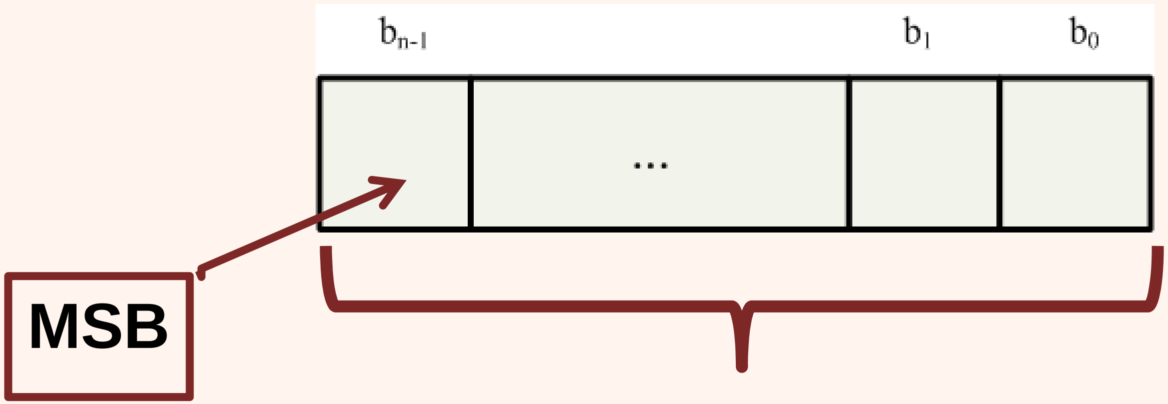
در این مثال Bias برابر ۸ است.

- در سیستم پیش‌قدردار، به ازای هر عملیات جمع یا تفریق نیاز به تصحیح نتیجه خواهیم داشت:

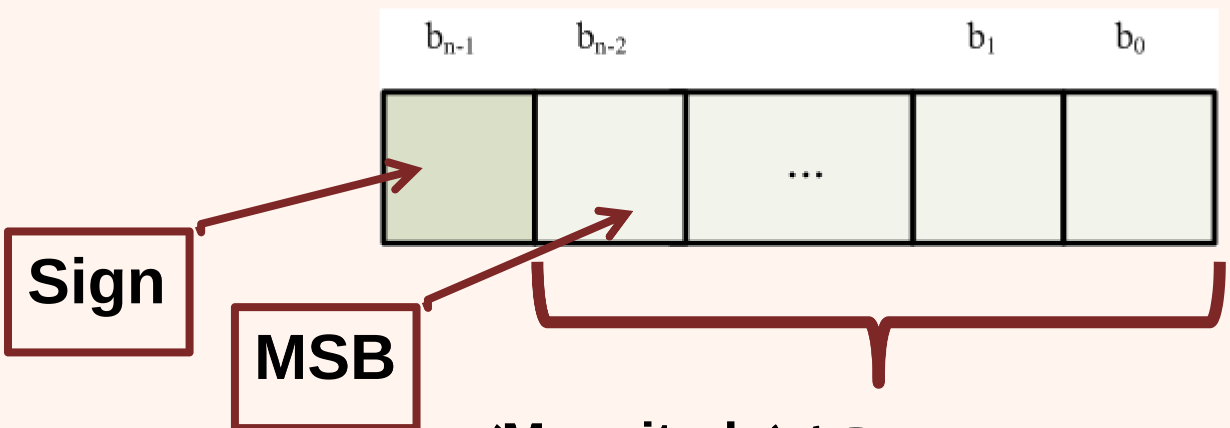
$$x + y + \text{bias} = (x + \text{bias}) + (y + \text{bias}) - \text{bias}$$
$$x - y + \text{bias} = (x + \text{bias}) - (y + \text{bias}) + \text{bias}$$

بدین ترتیب نیاز به سخت‌افزار پیچیده‌تری برای عملیات جمع خواهیم داشت.

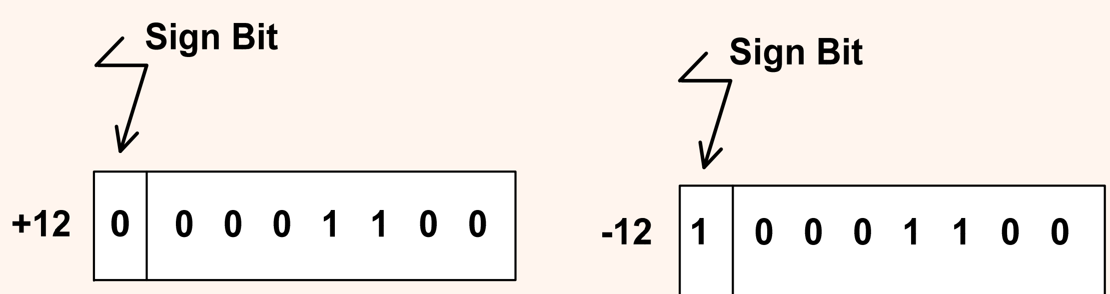
سیستم عددی علامت و مقدار



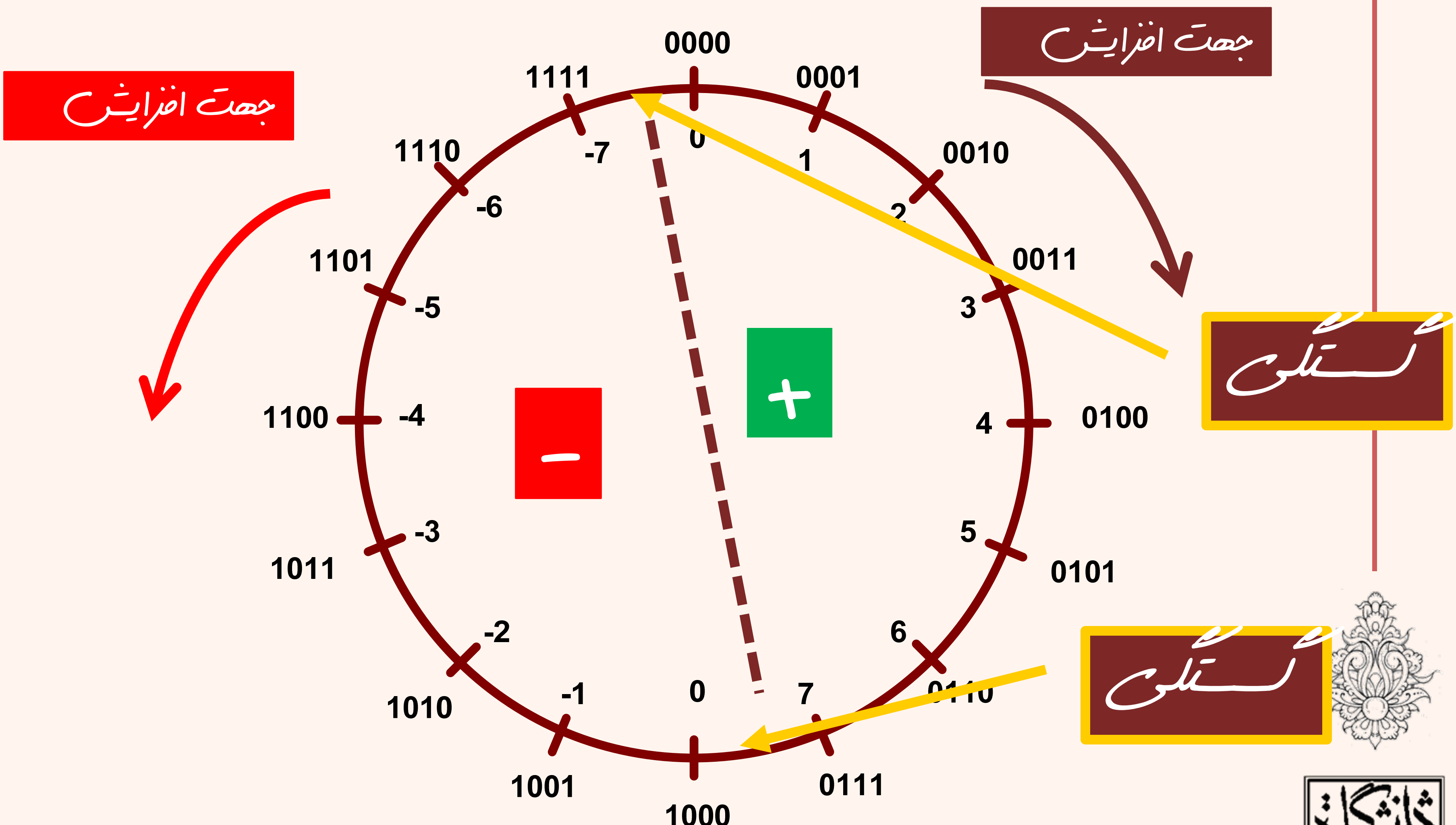
مقدار (Magnitude)



مقدار (Magnitude)

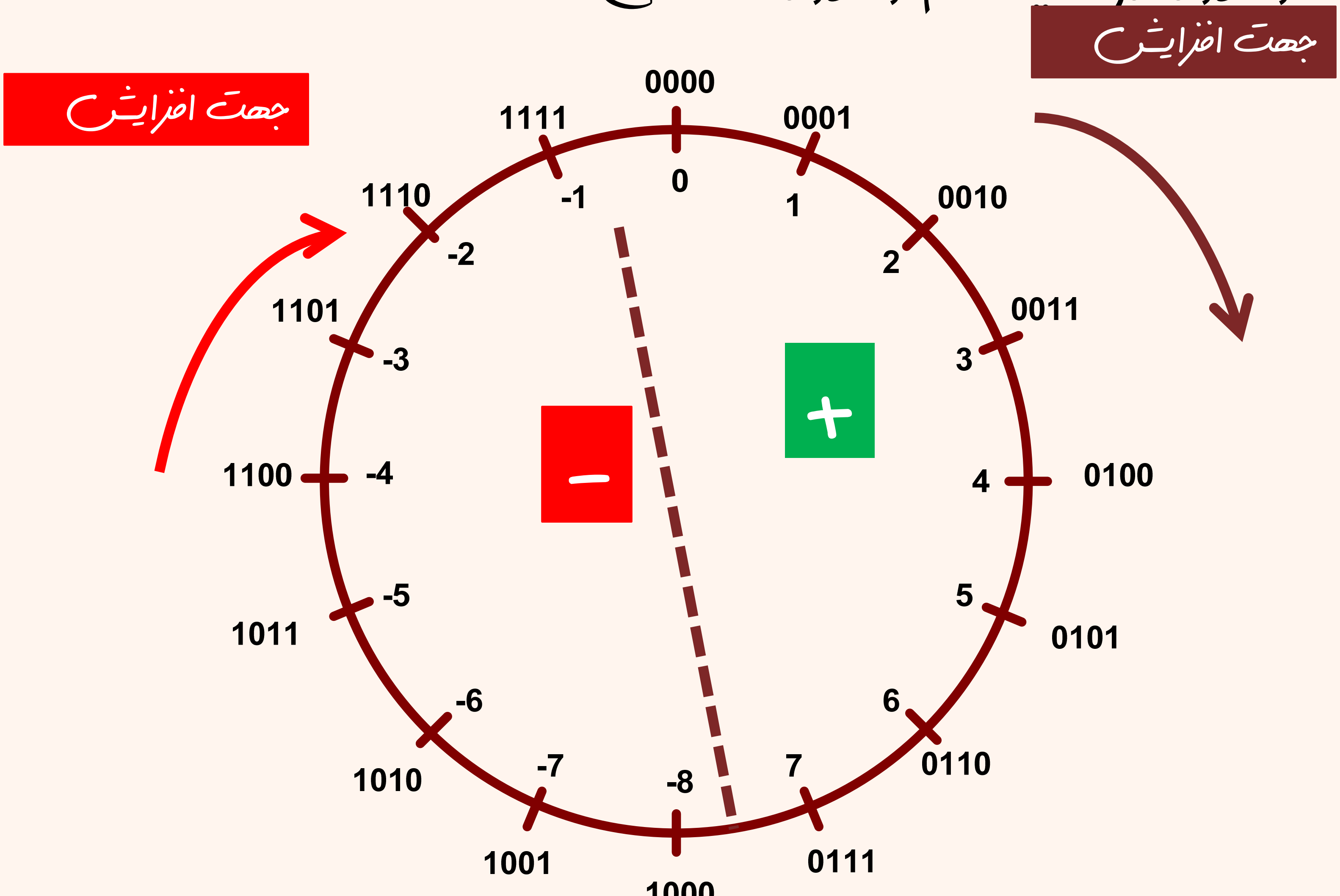


نمایش گرافیکی اعداد در سیستم علامت و مقدار



در این سیستم عددی برای جمع اعداد منفی باید از جمع کننده‌ی دیگری استفاده کرد، که باعث پیچیدگی سخت‌افزار خواهد شد.
ضمنا دو نمایش برای صفر وجود دارد.

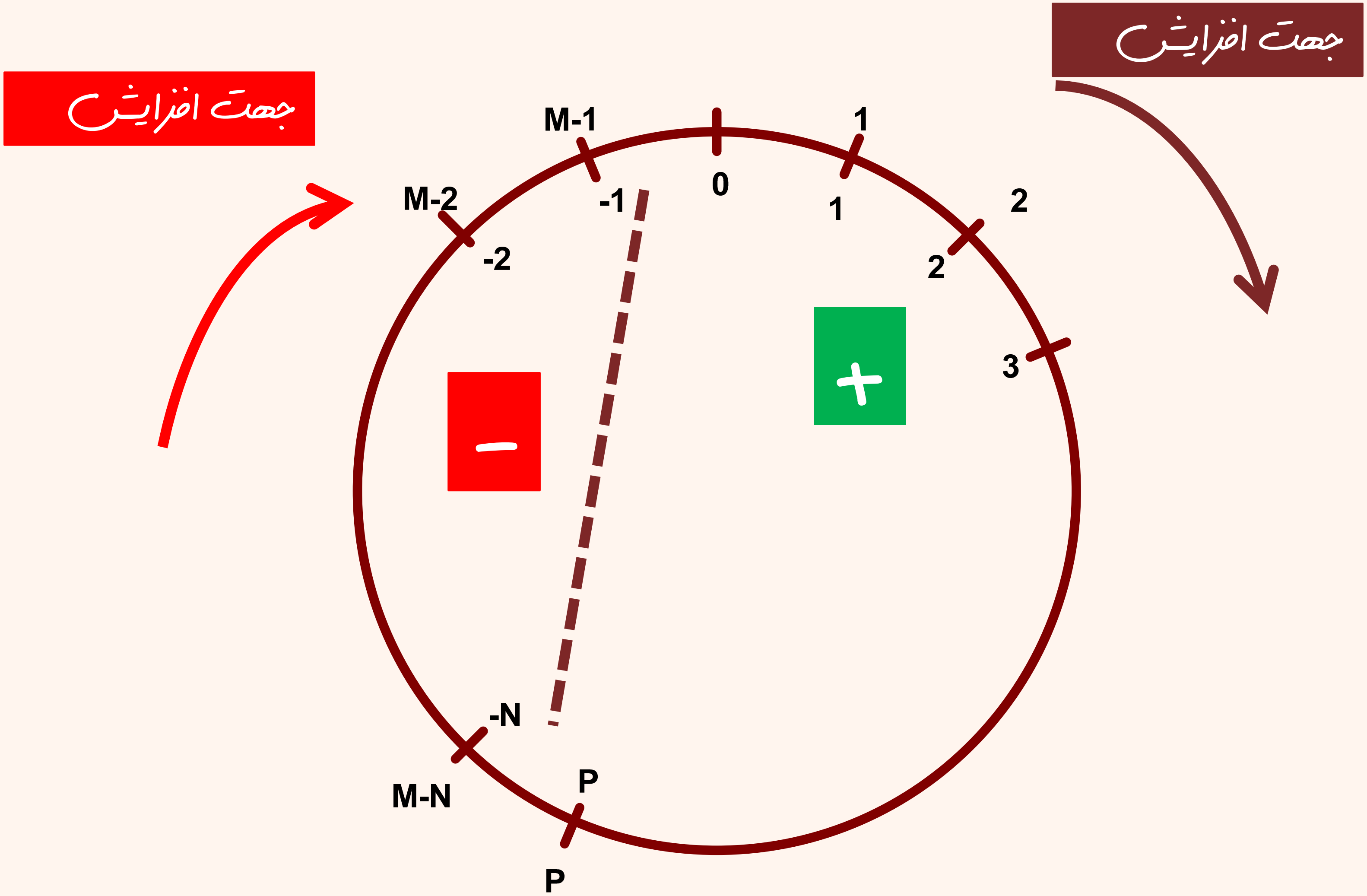
اعداد در سیستم اعداد مکمل



در این صورت برای اعداد منفی نیز می‌توان جمع‌کننده‌ی پیشین را استفاده نمود.

در ادامه به بررسی نظری سیستم‌های مکمل خواهیم پرداخت.

اعداد در سیستم اعداد مکمل



سیستم اعداد مکمل

- در سیستم اعداد مکمل اعداد منفی به صورت روبرو نمایش داده می شوند.

این نماد یعنی مکمل N در مبنای r

Radix Complement

$$[N]_r = r^n - (N)_r$$

سیستم n رقم صحیح دارد و r مبنا را مشخص می‌کند.

مثال: (در سیستم چهار بیتی)

```
-5 = 2^4 - 5
   = 16 -  5 = 11
   = (1011)
```

- سیستم اعداد مکمل کاهیده

Diminished Radix Complement System

$$[N]_r = r^n - (N)_r - ulp$$

مثال: (در سیستم چهار بیتی)

```
-5 = 2^4 - 5 - 1
   = 10
   = (1010)
```

unit in the last place or unit of least precision (*ulp*)

مثال

- مکمل ده عدد $(40960)_{10}$ را حساب کنید.
- $10^5-(40960)=(59040)_{10}$
- در صورتی که عددی با مکملش جمع شود؛ با توجه به این که مکمل نقش قرینه‌ی آن را ایفا می‌کند، انتظار داریم پاسخ صفر باشد:
- $40960+59040=\color{red}{1}\color{black}{00000}$
- که با در نظر گرفتن حساب پیمانه‌ای عملا چنین است:

$$100000 \overset{100000}{\equiv} 0$$

سیستم اعداد مکمل و تفریق

- می‌خواهیم تفریق زیر انجام دهیم:

49-37

=49-37+100-100

- در عمل حاصل تفاوتی نکرده است.

=49+63-100

- این ساده‌سازی عملا مکمل ده گرفتن است.

=112-100=12

- تفریق آخر عملا معادل چشم‌پوشی از پیمانه است، به صورت خلاصه می‌توان ۴۹ را با مکمل ده ۳۷ جمع پیمانه‌ای کرد.

اعداد مکمل ۱

- برای به دست آوردن مکمل ۱ عدد کافیست جای صفرها و یک‌ها را عوض کنیم.

$$K = \left(2^n - 1\right) - P$$

1 0 0 0	→ -7	0 1 1 1	→ 7
1 0 0 1	→ -6	0 1 1 0	→ 6
1 0 1 0	→ -5	0 1 0 1	→ 5
1 0 1 1	→ -4	0 1 0 0	→ 4
1 1 0 0	→ -3	0 0 1 1	→ 3
1 1 0 1	→ -2	0 0 1 0	→ 2
1 1 1 0	→ -1	0 0 0 1	→ 1
1 1 1 1	→ 0^-	0 0 0 0	→ 0^+

مکمل ۲

$$K = 2^n - P$$

- برای به دست آوردن مکمل۲ از سمت راست بیت‌هایی که برابر با ‘0’ هستند را نادیده گرفته تا به اولین مقدار ‘1’ برسیم پس از آن مقادیر را به صورت مکمل جایگزین می‌کنیم.

1 0 0 0	**-8**	0 1 1 1	**7**
1 0 0 1	**-7**	0 1 1 0	**6**
1 0 1 0	**-6**	0 1 0 1	**5**
1 0 1 1	**-5**	0 1 0 0	**4**
1 1 0 0	**-4**	0 0 1 1	**3**
1 1 0 1	**-3**	0 0 1 0	**2**
1 1 1 0	**-2**	0 0 0 1	**1**
1 1 1 1	**-1**	0 0 0 0	**0**

نمایش اعداد

Sequence	Two's complement	One's complement	Signed-magnitude
0111	7	7	7
0110	6	6	6
0101	5	5	5
0100	4	4	4
0011	3	3	3
0010	2	2	2
0001	1	1	1
0000	0	0	0
1111	−1	−0	−7
1110	−2	−1	−6
1101	−3	−2	−5
1100	−4	−3	−4
1011	−5	−4	−3
1010	−6	−5	−2
1001	−7	−6	−1
1000	−8	−7	−0