مبانی برنامه‌نویسی
(۱۱-۱۳-۱۳۹)

جلسه‌ی سوم

سیستم اعداد

دانشگاه شهید بهشتی
پاییز ۱۳۹۲
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر
احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

- سیستم اعداد
- نحوه‌ی نمایش و محدودیت‌ها
- اعداد صحیح
  - اعداد صحیح بدون‌علامت
  - اعداد صحیح علامت‌دار
- اعداد کسری

نمایش اعداد بدون علامت

Positional Number Representation

- ساده‌ترین شیوه‌ی نمایش اعداد، مربوط به اعداد صحیح بدون علامت می‌باشد. یک عدد در مبنای 10 به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

Unsigned Numbers

$$D = d_{n-1}d_{n-2}\cdots d_1 d_0$$

- در اصل این عدد برابرست با

$$V(D) = d_{n-1}\times 10^{n-1} + d_{n-2}\times 10^{n-2} + \cdots + d_1\times 10^1 + d_0\times 10^0$$

Radix-10 (Base-10)

- به طور کلی یک عدد در مبنای r را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$x_{k-1}x_{k-2}\ \ldots\ x_1x_0\ .\ x_{-1}x_{-2}\ \ldots\ x_{-l}\ ) = \sum_{i=-l}^{k-1} x_i r^i$$

- بنا به دلایل کاربردی، در «مدارهای منطقی» تنها امکان استفاده از «منطق دو مقداری» وجود دارد و در نتیجه برای نمایش اعداد از مبنای 2 استفاده می‌شود.

$$B = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0$$

$$V(B) = b_{n-1}\times 2^{n-1} + b_{n-2}\times 2^{n-2} + \cdots + b_1\times 2^1 + b_0\times 2^0$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

binary digit (bit)

- هر رقم دودویی یک bit نامیده می‌شود.
- در سیستم اعداد دودویی، به کم‌ارزش‌ترین بیت LSB و به پرارزش‌ترین بیت MSB گفته می‌شود.

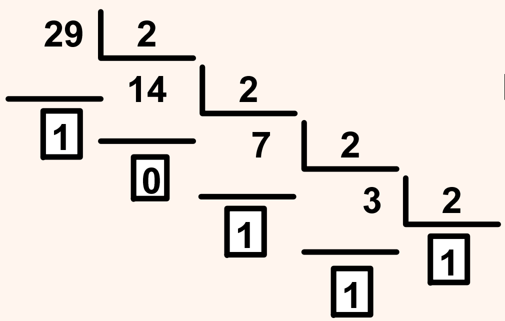
Least Significant Bit

Most Significant Bit

- به طور معمول به هر چهار بیت یک nibble و به هر هشت بیت یک byte گفته می‌شود.
- بازه‌ی نمایش اعداد به تعداد بیت‌هایی محدود است که مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای یک سیستم n بیتی می‌توان تا 2^n عدد مختلف را نمایش داد.

تبدیل مبنا

- تبدیل مبنای دو به مبنای ده، به سادگی و با استفاده از نوشتن ارزش مکانی هر رقم در مبنای ده انجام می‌شود.
- برای تبدیل عددی از مبنای ده به مبنای دو از تقسیم‌های متوالی استفاده می‌کنیم:



Binary Point

$(29)_D = (11101.)_B$

$$V = b_{n-1}\times 2^{n-1} + b_{n-2}\times 2^{n-2} + \cdots + b_1\times 2^1 + b_0\times 2^0$$

$$\frac{V}{2} = b_{n-1}\times 2^{n-2} + b_{n-2}\times 2^{n-3} + \cdots + b_2\times 2^1 + b_1$$

مثال ۱

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1_2 = (?)_{10}$$

$$2^5 + \cancel{2^4} + \cancel{2^3} + 2^2 + \cancel{2^1} + 2^0 = 32 + 4 + 1 = 37_{10}$$

$\boxed{100101_2 = 37_{10}}$

مثال ۲

$25_{10} = (?)_2$

			Q		R
	25/2	=	12	+	1 LSB
$Q \neq 0$	12/2	=	6	+	0
$Q \neq 0$	6/2	=	3	+	0
$Q \neq 0$	3/2	=	1	+	1
$Q \neq 0$	1/2	=	0	+	1 MSB

$\boxed{25_{10} = 11001_2}$

تبدیل دهدهی اعشاری به دودویی

$$\sum_{i=-l}^{n-1} b_i 2^i$$

$0.29 \times 2 = \boxed{0}.58$

$0.58 \times 2 = \boxed{1}.16$

$0.16 \times 2 = \boxed{0}.32$

$0.32 \times 2 = \boxed{0}.64$

$0.64 \times 2 = \boxed{1}.28$

$0.28 \times 2 = \boxed{0}.56$

$0.56 \times 2 = \boxed{1}.12$

$$(0.29)D = (0\,.\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1)B$$

$1.125 = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} + \cdots \Rightarrow A = 1$

$0.250 = B + \frac{C}{2} + \frac{D}{4} + \cdots \Rightarrow B = 0$

$0.500 = C + \frac{D}{2} \Rightarrow C = 0$

$1.00 = D + 0 \Rightarrow D = 1$

$\boxed{1.125 = (1.001)}$

نمایش در مبنای هشت و شانزده

- با توجه به استفاده‌ی گسترده‌ی اعداد دودویی در سیستم‌های دیجیتال و حجم بالایی که برای نمایش اشغال می‌کنند، استفاده از مبنای هشت و شانزده متداول است. برتری این دو مبنا بر سایر مبناها در این است که تبدیل بین این‌مبناها و مبنای دو به سادگی قابل انجام می‌باشد.
- در مبنای شانزده افزون بر ارقام 0 تا 9 از حروف A تا F نیز استفاده می‌شود.

Octal

Hexadecimal (Hex)

Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Hexadecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Binary	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

نمایش در مبنای هشت و شانزده(ادامه...)

مثال ۱

$2AF_{16} = (?)_{10}$

$= 2\times16^2 + 10\times16^1 + 15\times16^0$

$= 512 + 160 + 15$

$= 687_{10}$

مثال ۲

$(857)_{10} = (?)_2$

$= (1101011001)_2$

مثال ۳

$(\underline{101}\ \underline{011}\ \underline{010}\ \underline{111})_2 = (?)_8$

$= (5327)_8$

مثال ۴

$(\underline{1010}\ \underline{1111}\ \underline{0010}\ \underline{0101})_2 = (?)_{16}$

$= (AF25)_{16}$

مثال ۵

$$9F2_{16} = (?)_2$$

$$\begin{array}{ccc} 9 & F & 2 \\ 1001 & 1111 & 0010 = \end{array}$$

$$=100111110010_2$$

مثال ۶

$$(35.37)_D = (?)_B = (?)_{hex} = (?)_{octal}$$

با دقت شش رقم دودویی

$$(35.37)_D = (0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,.\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0)_B$$

$$(23.5C)_{hex} = (43.27)_{octal}$$

جمع ارقام بدون علامت

- در جمع در مبنای دو تنها از دو رقم '1' و '0' استفاده می‌شود.
- بدین ترتیب چهار حالت ممکن است رخ دهد.

x	0	0	1	1
$+y$	$+0$	$+1$	$+0$	$+1$
$c\ s$	0 0	0 1	0 1	1 0

Carry — Sum

جمع اعداد دودویی بدون علامت

مثال ۱

رقم های نقلی

	1 1 1 1
$X= \quad x_4x_3x_2x_1x_0$	0 1 1 1 1
$+Y= \quad y_4y_3y_2y_1y_0$	+ 0 1 0 1 0
$S= \quad s_4s_3s_2s_1s_0$	1 1 0 0 1

مثال ۲

1 1 1 1 1 1 1 1 1		1 1 1 1 1 1 1 1 1
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1	یا	0 9 9 9 9 9 9 9 9 9
+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1		+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0		1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

زنجیره‌ی رقم‌های نقلی باعث کندی عملیات جمع می‌شود، در درس‌های آینده (مدارمنطقی) با این مشکل و روش‌های مقابله با آن آشنا خواهید شد