

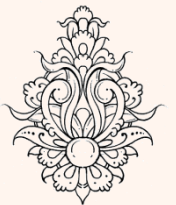
سیگنال و سیستم (تجزیه و تحلیل سیستم‌ها) ۱۸-۱۱-۱۳



دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر
پاییز ۱۳۹۴
احمد محمودی ازناوه

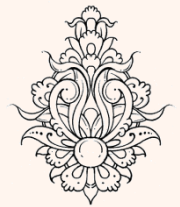
فهرست مطالب

- تبدیل لاپلاس
- تبدیل معکوس
- خواص تبدیل لاپلاس
- آنالیز سیستم‌های LTI
- سیستم‌های توصیف‌شونده معادلات دیفرانسیل



تبدیل لاپلاس

- تبدیل فوریه ابزار بسیار مفیدی برای تحلیل سیگنال‌ها است:
 - تحلیل پاسخ ضربه
 - نمونه برداری
 - مدولاسیون
- با این وجود توانایی تحلیل سیستم‌های ناپایدار را ندارد.
- در بسیاری از کاربردها با سیگنال‌های ناپایدار سروکار داریم.
- در برخی موارد، این ناپایداری در عمل مورد نظر است.
- تبدیل لاپلاس برای تحلیل دامنه‌ی وسیع‌تری از سیگنال‌ها به کار می‌رود.



تبدیل لاپلاس

$$e^{st} \xrightarrow{LTI} H(s)e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt$$

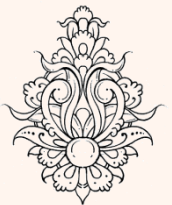
$$X(s) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$X(s) = L\{x(t)\}$$

$$X(s) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

Laplace Transform

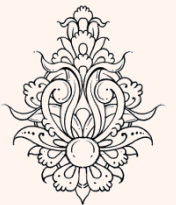


$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

Dirichlet Condition 1

$$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$

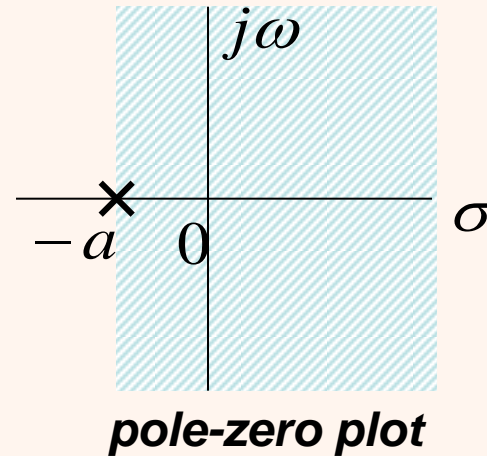
$$\sigma = 0 \subseteq \text{ROC}$$



مثال

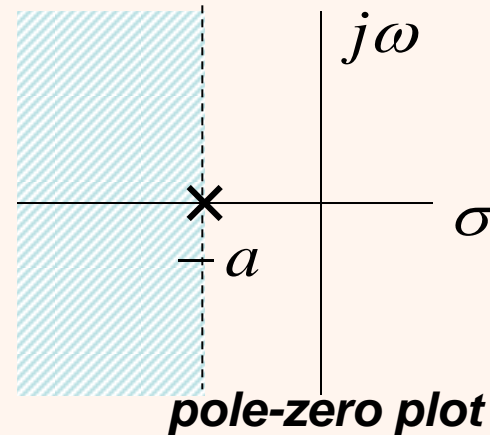
$$x(t) = e^{-at} u(t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

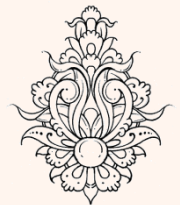


$$x(t) = -e^{-at} u(-t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} < -a$$



$$x(t) \longleftrightarrow X(s) ; \text{ROC}$$



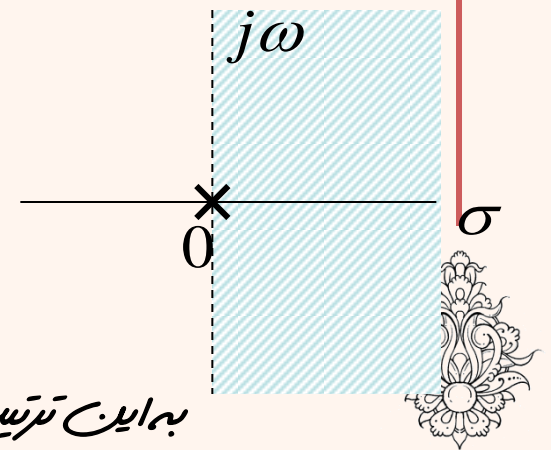
مثال

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} < -a$$

$$x(t) \longleftrightarrow X(s) ; \text{ROC}$$

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$



به این ترتیب نمی‌توان تبدیل فوریه $u(t)$ را حساب کرد

$$u(t) \xrightarrow{F} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



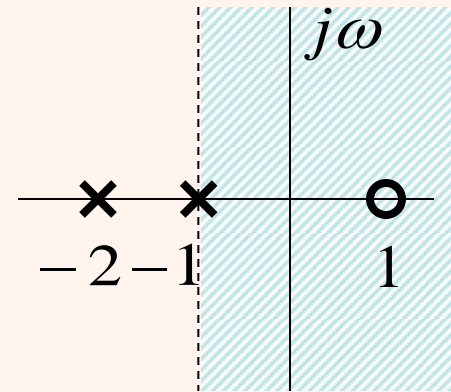
مثال

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$$

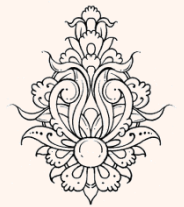
$$3e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{3}{s+2} \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$2e^{-t}u(t) \longleftrightarrow \frac{2}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \longleftrightarrow \frac{s-1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$



σ



مثال

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t} \cos(3t)u(t)$$

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-t}e^{j3t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-t}e^{-j3t}u(t)$$

$$e^{-2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+2} \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$\frac{1}{2}e^{-\underbrace{(1-j3)}_a t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1/2}{s+1-3j}$$

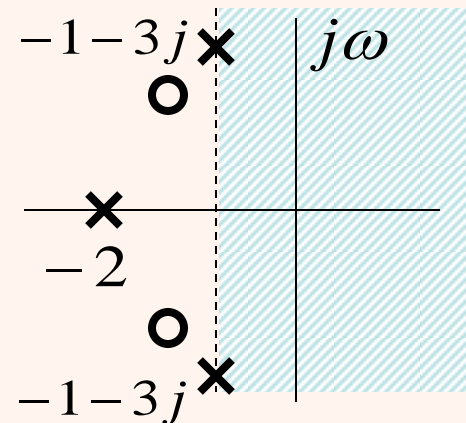
$$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{-a\} = -1$$

$$\frac{1}{2}e^{-(1+j3)t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1/2}{s+1+3j}$$

$$\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{-a\} = -1$$

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s+2)(s^2 + 2s + 10)}$$

$$\text{Re}\{s\} > -1$$



مثال

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

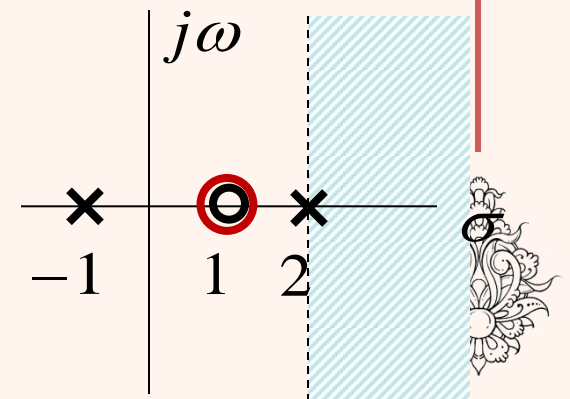
$$\delta(t) \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st} dt = 1$$

$$\text{Re}\{s\} > -\infty$$

$$-\frac{4}{3}e^{-t}u(t) \longleftrightarrow \frac{-4/3}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$\frac{1}{3}e^{2t}u(t) \longleftrightarrow \frac{1/3}{s-2} \quad \text{Re}\{s\} > 2$$

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad \text{Re}\{s\} > 2$$



pole-zero plot



$$\sigma = 0 \notin \{\text{Re}\{s\} > 2\}$$

$F\{x(t)\}$ does not exist.

مثال

• برخی سیگنال‌ها تبدیل لاپلاس ندارند، در هیچ

ناحیه‌ای همگرا نیستند.

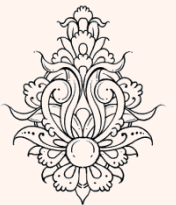
$$x(t) = Ce^{-t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |Ce^{-t} e^{-\sigma t}| dt = \infty$$

• در دامنه‌ی تبدیل لاپلاس ضربه مجاز نیست.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) e^{-\sigma t}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-\sigma t}| dt = \infty$$



تبدیل لاپلاس

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

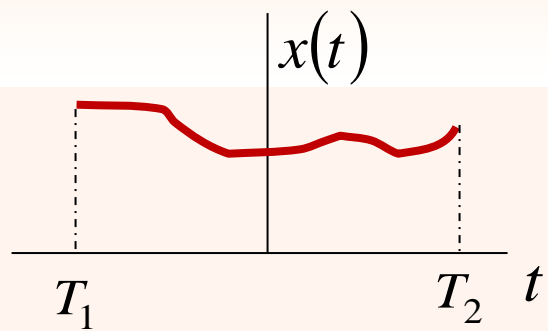
$N(s) = 0$ → صفرها
 $D(s) = 0$ → قطبها

ناحیهی همگرایی شامل نوارهایی است که با محور موهومی موازی هستند

ناحیهی همگرایی نمی‌تواند شامل هیچ قطبی باشد

در صورتی که X یک سیگنال محدود باشد و حداقل به ازای یک مقدار s تبدیل لاپلاس آن همگرا شود، محدوده‌ی همگرایی آن کل صفحه را در بر خواهد گرفت.

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 0 \quad ; \quad t < T_1, t > T_2 \\ \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt < \infty \\ \int_{T_1}^{T_2} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \end{array} \right.$$



ویژگی ۱

ویژگی ۲

ویژگی ۳



تبدیل لاپلاس

$$x(t) = 0, \quad t < T_1$$

در صورتی که x یک سیگنال دست راستی

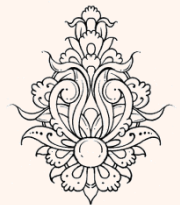
ویژگی ۴

$\exists \sigma_0 \subseteq \text{ROC} \longrightarrow \text{Re}\{s\} > \sigma_0$ باشد،

$$\sigma_1 > \sigma_0 \quad e^{-\sigma_1 t} < e^{-\sigma_0 t} \quad (t > 0)$$

$$\textcircled{1} \quad T_1 \geq 0 \quad \int_{T_1}^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma_1 t}| dt < \int_{T_1}^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$$

$$\textcircled{2} \quad T_1 < 0 \quad \underbrace{\int_{T_1}^0 |x(t)e^{-\sigma_1 t}| dt}_{\text{finite}} + \underbrace{\int_0^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma_1 t}| dt}_{< \int_0^{+\infty} |x(t)e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty}$$



تبدیل لاپلاس

ویژه ۵

در صورتی که x یک سیگنال دست چپ باشد،
 $x(t) = 0, t > T_1$

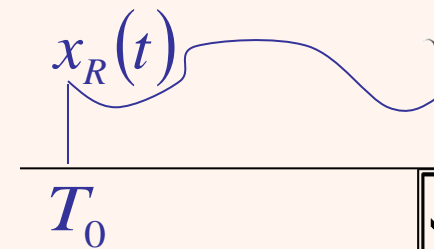
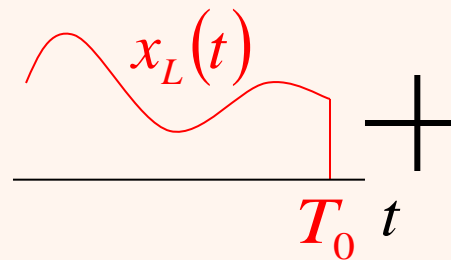
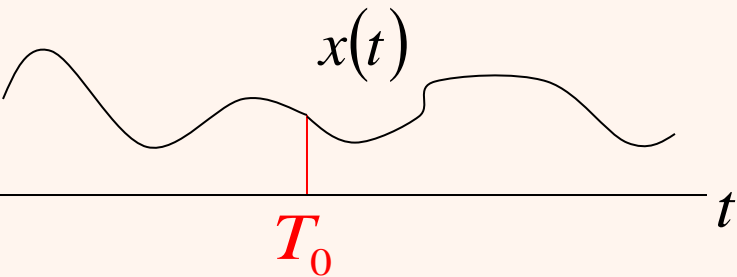
$$\exists \sigma_0 \subseteq \text{ROC} \longrightarrow \text{Re}\{s\} < \sigma_0 \subseteq \text{ROC}$$

ویژه ۶

در صورتی که x یک سیگنال دو طرفه باشد

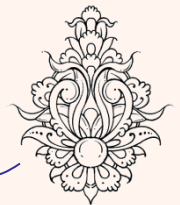
$$x(t), -\infty < t < +\infty$$

$$\exists \sigma_0 \subseteq \text{ROC} \longrightarrow \sigma_1 < \text{Re}\{s\} < \sigma_2 \supseteq \sigma_0$$



$$\text{Re}\{s\} < \sigma_2$$

$$\text{Re}\{s\} > \sigma_1$$



دانشگاه
تهران
پیشین

مثال

$$x(t) = u(t) - u(t - T)$$

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

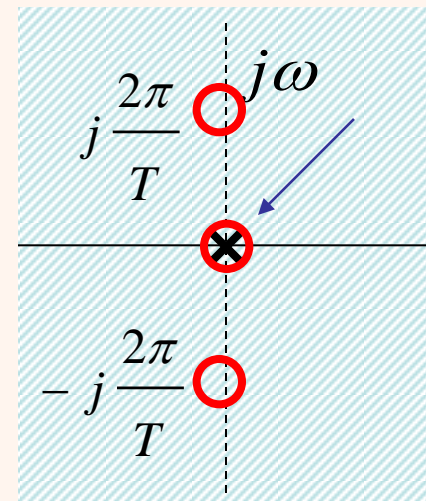
$$u(t - T) \longleftrightarrow \int_T^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{-1}{s} e^{-st} \Big|_T^{+\infty} = \frac{e^{-sT}}{s} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$u(t) - u(t - T) \longleftrightarrow \frac{1 - e^{-sT}}{s} \quad \text{Re}\{s\} > -\infty$$

pole: $s = 0$

zero: $1 - e^{-sT} = 0 \quad e^{-sT} = e^{j2k\pi}$

zeros: $s_k = -j \frac{2k\pi}{T}, k = 0, \pm 1, \dots$



pole-zero plot



مثال

$$x(t) = e^{-b|t|}$$

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

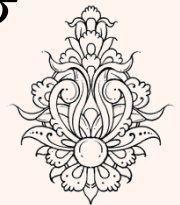
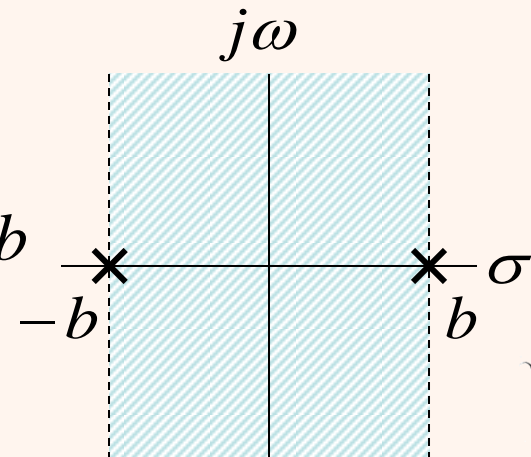
$$e^{-bt}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+b} \quad \text{Re}\{s\} > -b$$

$$e^{bt}u(-t) \longleftrightarrow \frac{-1}{s-b} \quad \text{Re}\{s\} < b$$

If $b > 0$, $e^{-b|t|} \longleftrightarrow \frac{-2b}{s^2 - b^2} \quad -b < \text{Re}\{s\} < b$

If $b \leq 0$,

تبدیل لاپلاس ندارد $x(t)$

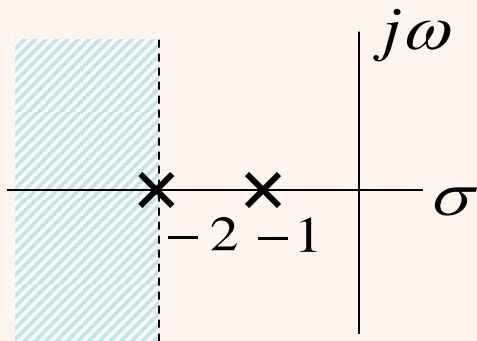


تبدیل لاپلاس

ویژگی

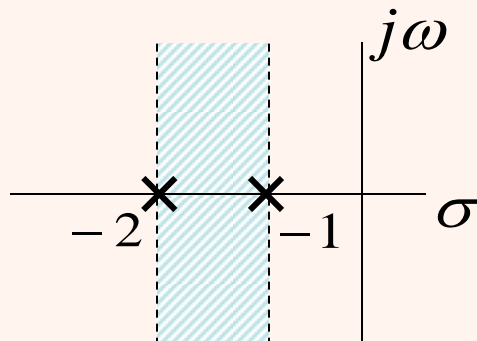
در صورتی که X یک سیگنال گویا باشد، ناحیه همگرایی محدود به ناحیه بین قطب‌ها و ویا بین قطب‌ها و بی‌نهایت خواهد بود.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$



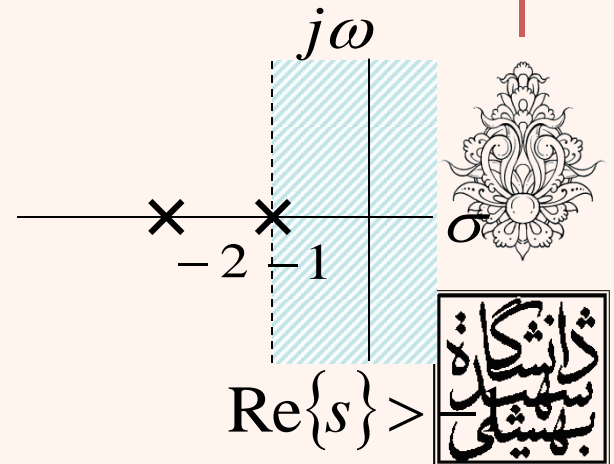
$$\text{Re}\{s\} < -2$$

left sided



$$-2 < \text{Re}\{s\} < -1$$

two sided



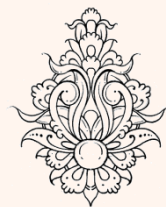
$$\text{Re}\{s\} > -1$$

right sided



تبدیل لاپلاس سیگنال‌های پایه

$x(t)$	$X(s)$	Poles	ROC
$\delta(t)$	1	none	$\text{Re}\{s\} > -\infty$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$s = 0$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$s = 0$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$s = -a$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$s = -a$	$\text{Re}\{s\} < -a$



تبدیل لاپلاس معکوس

$$X(\sigma + j\omega) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt$$



$$x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

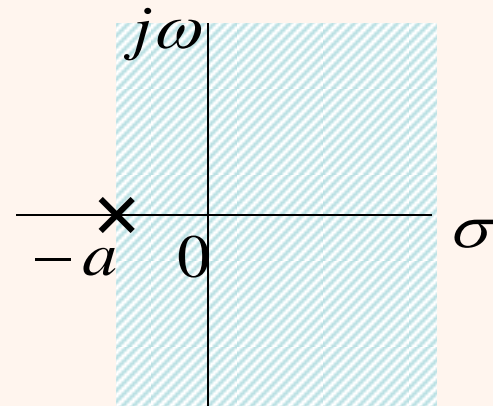


$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$



$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

$$\sigma \subseteq ROC$$



برای تبدیل لاپلاس‌های گویا (rational Laplace transforms) از تفکیک کسر استفاده می‌کنیم.

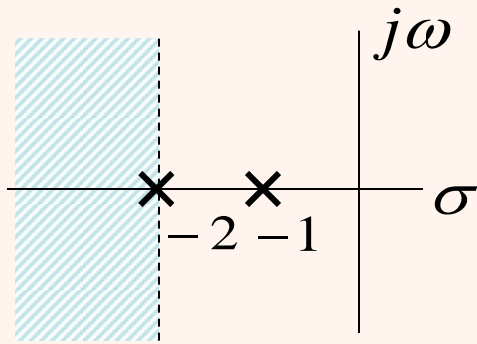
$$X(s) = \sum_{i=1}^M \frac{A_i}{s + a_i}$$

$$L^{-1}\{A_i / (s + a_i)\} \begin{cases} A_i e^{-a_i t} u(t) & \text{Re}\{s\} > -a_i \\ -A_i e^{-a_i t} u(-t) & \text{Re}\{s\} < -a_i \end{cases}$$

لاپلاس
تبدیل
بهبودی

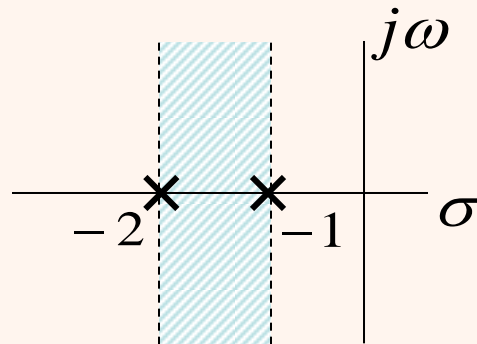
مثال

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$



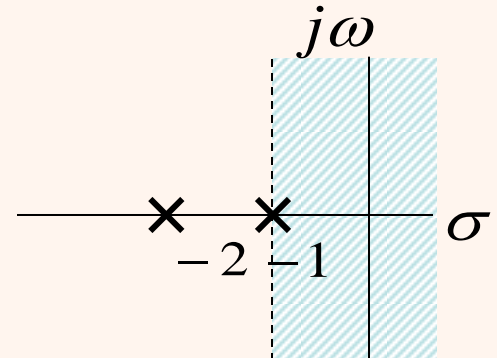
$$\text{Re}\{s\} < -2$$

left sided



$$-2 < \text{Re}\{s\} < -1$$

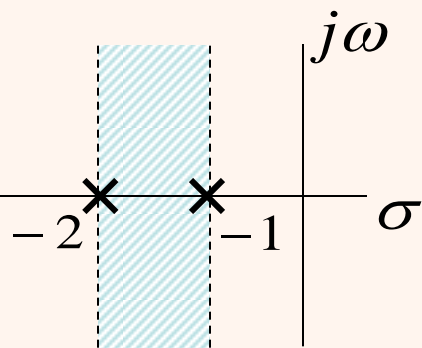
two sided



$$\text{Re}\{s\} > -1$$

right sided

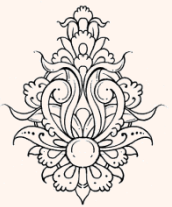
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$



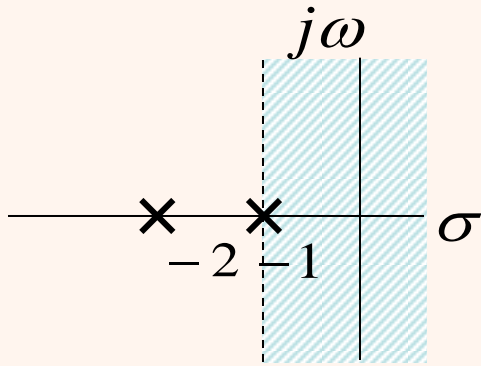
$$-e^{-t}u(-t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} < -1$$

$$e^{-2t}u(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$



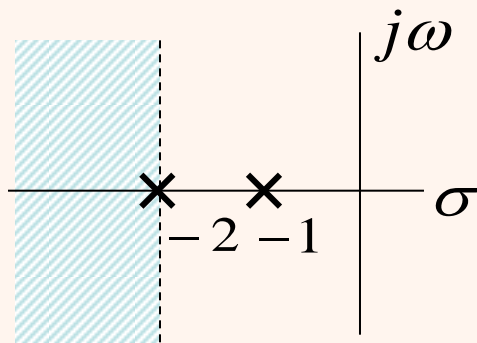
ادامہی مثال



$$e^{-t}u(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-2t}u(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

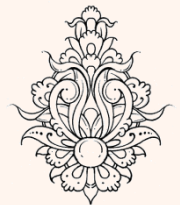


$$-e^{-t}u(-t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} < -1$$

$$-e^{-2t}u(-t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} < -2$$

$$x(t) = (-e^{-t} + e^{-2t})u(-t) \stackrel{L}{\leftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

$$\text{Re}\{s\} < -2$$



خواص تبدیل لاپلاس

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s) \quad \text{Roc} = R_1$$

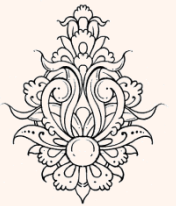
$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s) \quad \text{Roc} = R_2$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{L} aX_1(s) + bX_2(s)$$

$$\text{Roc} \supseteq R_1 \cap R_2$$

خطی بودن

حداقل



مثال

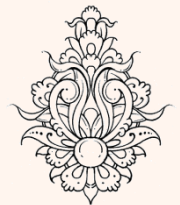
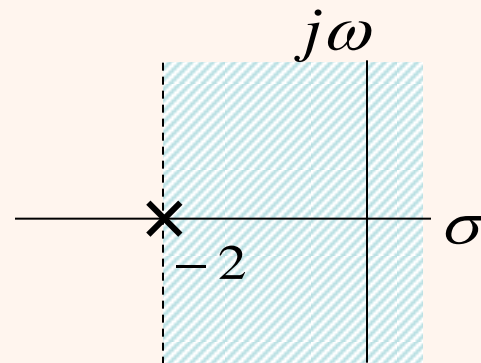
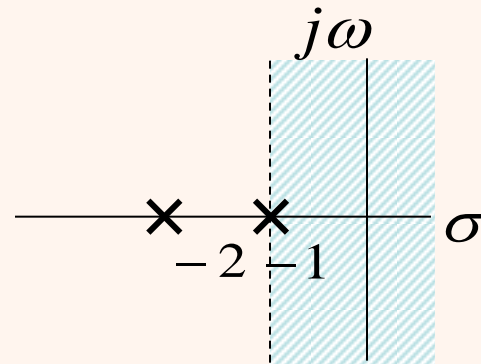
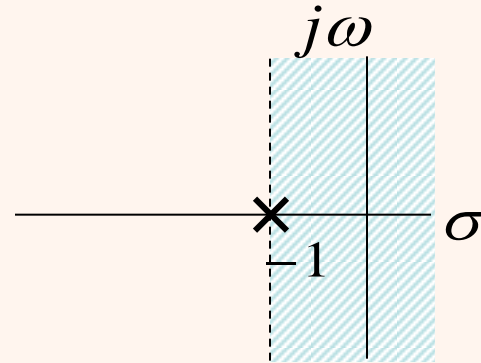
$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$\text{Re}\{s\} > -2$$

$$x(t) = e^{-2t} u(t)$$



خواص تبدیل لاپلاس

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

$$Roc = R$$

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} X(s)e^{-st_0}$$

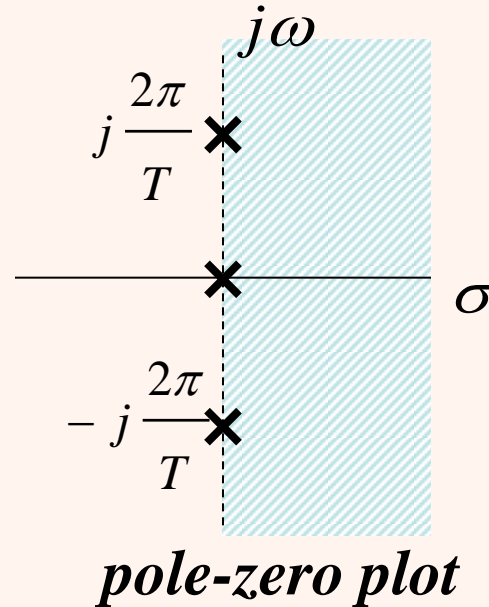
$$Roc = R$$

شیفت
در حوزه زمان

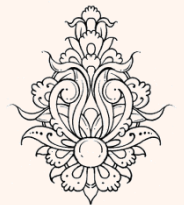
$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

$$\text{Re}\{s\} > 0$$



مثال

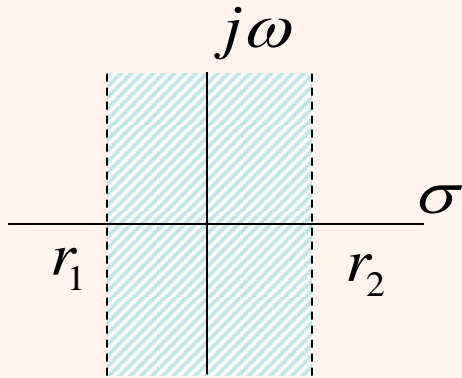


خواص تبدیل لاپلاس

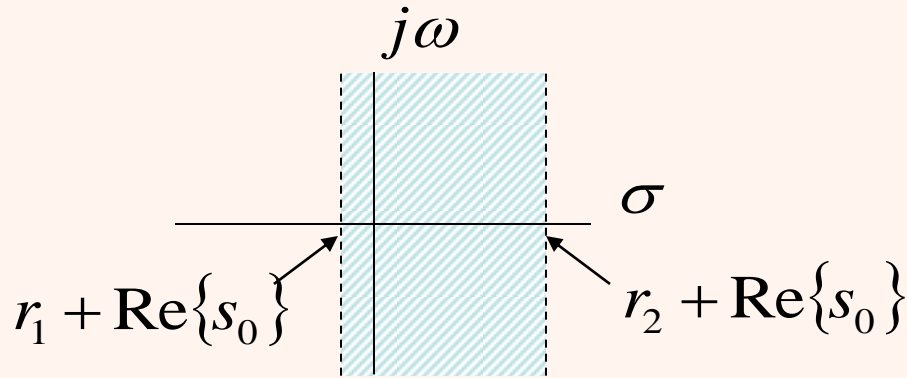
شیفت
در حوزه s

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad \text{Roc} = R$$

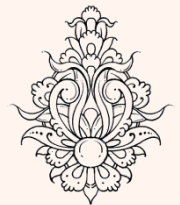
$$x(t)e^{s_0 t} \xleftrightarrow{L} X(s - s_0) \quad \text{Roc} = R + \text{Re}\{s_0\}$$



$$r_1 < \text{Re}\{s\} < r_2$$



$$r_1 + \text{Re}\{s_0\} < \text{Re}\{s\} < r_2 + \text{Re}\{s_0\}$$



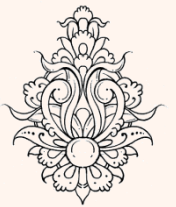
مثال

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$e^{-at} \cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$e^{-at} \sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$



خواص تبدیل لاپلاس

تغییر مقیاس

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

$$Roc = R$$

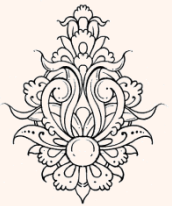
$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X(s/a)$$

$$Roc = aR$$

$$a = -1$$

$$x(-t) \xleftrightarrow{L} X(-s)$$

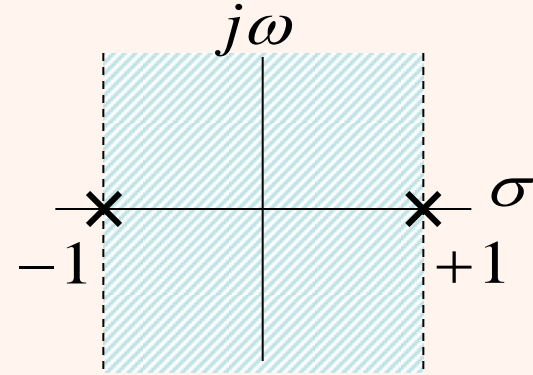
$$Roc = -R$$



مثال

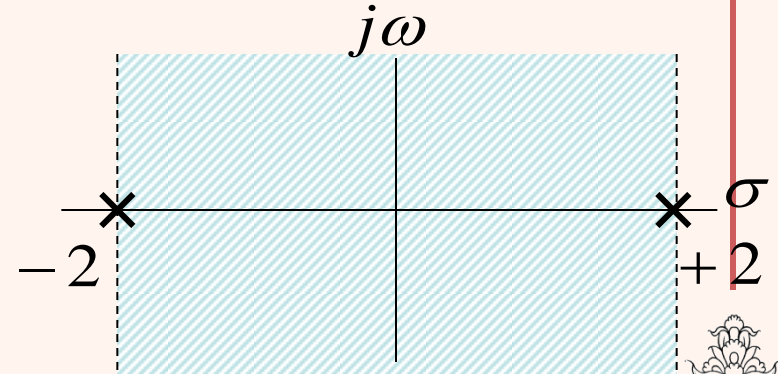
$$e^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{-2}{s^2 - 1}$$

$$-1 < \text{Re}\{s\} < 1$$



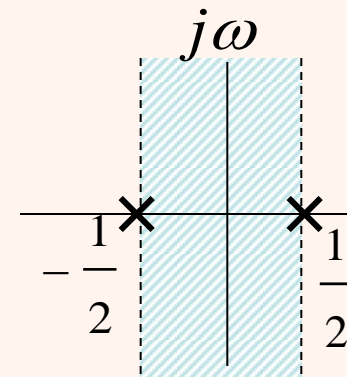
$$e^{-2|t|} \longleftrightarrow \frac{-4}{s^2 - 4}$$

$$-2 < \text{Re}\{s\} < 2$$



$$e^{-\frac{1}{2}|t|} \longleftrightarrow \frac{-1}{s^2 - 1/4}$$

$$-\frac{1}{2} < \text{Re}\{s\} < \frac{1}{2}$$



خواص تبدیل لاپلاس

مزبور کردن

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

$$Roc = R$$

$$x^*(t) \xleftrightarrow{L} X^*(s^*)$$

$$Roc = R$$

$$x^*(t) = x(t) \Rightarrow X(s) = X^*(s^*)$$

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)$$

$$Roc = R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s)$$

$$Roc = R_2$$

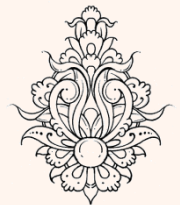
$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)X_2(s) \quad Roc \supseteq R_1 \cap R_2$$

مداخل

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2} \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

مثال

$$X_2(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$



$$X_1(s)X_2(s) = 1 \quad \text{Re}\{s\} > -\infty \Rightarrow x_1(t) * x_2(t) = \delta(t)$$

مثال

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t) \quad x_2(t) = e^{3t}u(t) \Rightarrow x_1(t) * x_2(t) = ?$$

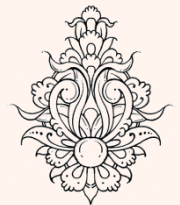
$$x_1(t) * x_2(t) = ?$$

$$X_1(s) X_2(s) = \frac{1}{s+2} \times \frac{1}{s-3} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-3}$$

$$= -\frac{1}{5} \times \left[\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-3} \right]$$

$$= -\frac{1}{5} e^{-2t} u(t) + \frac{1}{5} e^{3t} u(t)$$

$$x_1(t) * x_2(t) = -\frac{1}{5} e^{-2t} u(t) + \frac{1}{5} e^{3t} u(t)$$



خواص تبدیل لاپلاس

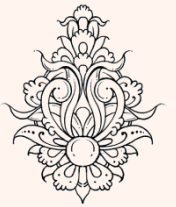
$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

$$Roc = R$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s)$$

$$Roc \supseteq R$$

مشق در حوزه زمان



خواص تبدیل لاپلاس

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

$$Roc = R$$

$$-tx(t) \xleftrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}$$

$$Roc = R$$

مشق در حوزه s

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

مثال

$$\frac{1}{2}t^2e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^3} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$\frac{1}{n!}t^ne^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^{n+1}} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

به طور کلی خواهیم داشت:

$$\frac{-1}{n!}t^ne^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^{n+1}} \quad \text{Re}\{s\} < -a$$



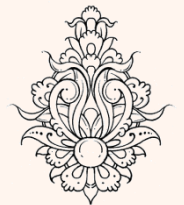
مثال

$$X(s) = \frac{e^{-s} + 1}{(s+1)^2(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$x(t) = ?$$

$$X(s) = (e^{-s} + 1) \left[\frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} \right]$$

$$x(t) = te^{-t}u(t) - e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t) \\ + (t-1)e^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-1)}u(t-1) + e^{-2(t-1)}u(t-1)$$



خواص تبدیل لاپلاس

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad \text{Roc} = R$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s) \quad \text{Roc} \supseteq R \cap \text{Re}\{s\} > 0$$

اشتراک در حوزه s

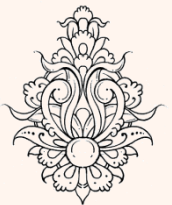
The Initial- and Final-Value Theorems

$X(t)$ در نقطه صفر شامل صفره و یا مراتب بالاتر نباشد

$$x(t) = 0, \quad t < 0$$

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

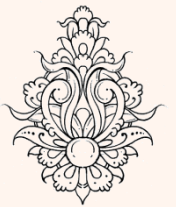
$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$



مثال

$$X(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

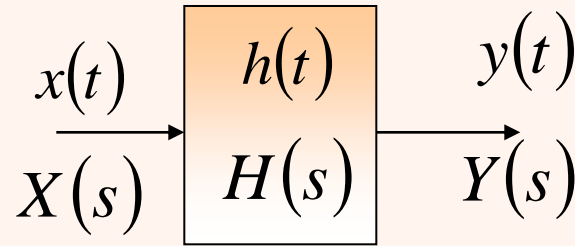
$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s(s^2 + 2s + 1)}{(s-1)(s+2)(s+3)} = 1$$



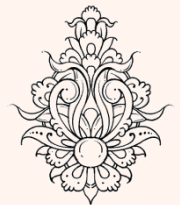
آنالیز سیستم‌های LTI بر اساس تبدیل لاپلاس

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$



system Function or Transfer Function



آنالیز سیستم‌های LTI بر اساس تبدیل لاپلاس

علی بودن

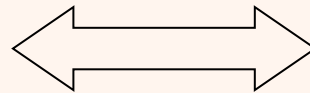
سیستم علی است \Rightarrow $ROC = \text{Re}\{s\} > \sigma_{\max}$

در صورتی که تابع سیستم گویا باشد

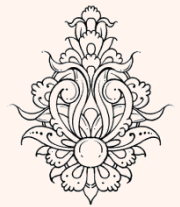
سیستم علی است \Leftrightarrow $ROC = \text{Re}\{s\} > \sigma_{\max}$

پایداری

سیستم پایدار است

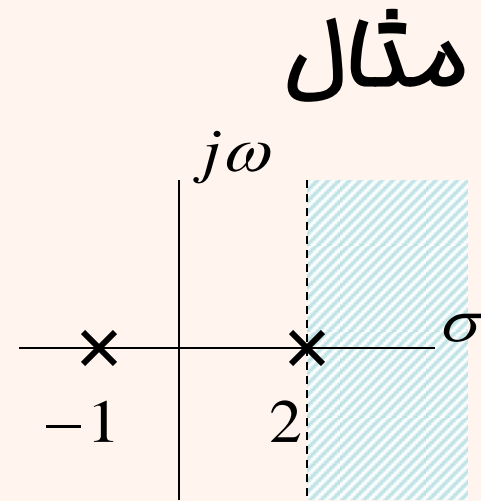


$ROC \supseteq j\omega - \text{axis}$



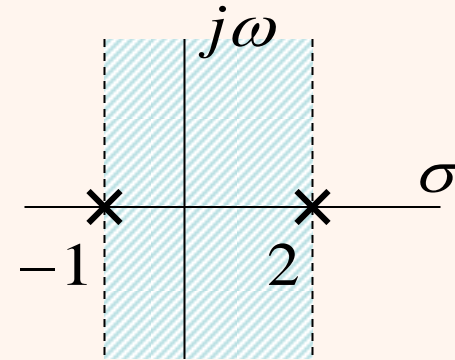
$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

(a) $\text{Re}\{s\} > 2$ **علی و ناپایدار**



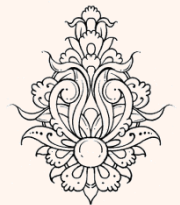
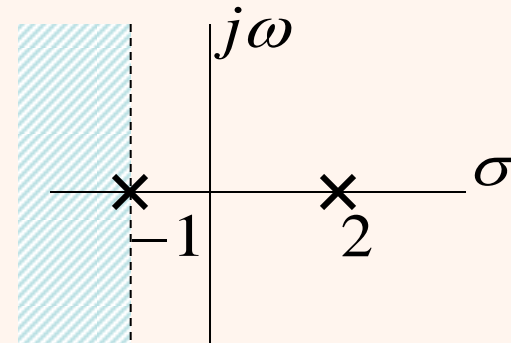
(b) $-1 < \text{Re}\{s\} < 2$

غیر علی و پایدار



(c) $\text{Re}\{s\} < -1$

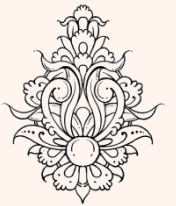
غیر علی و ناپایدار



مثال

$$(a) \quad H(s) = \frac{1}{s+1} \quad \text{—} \textit{Stable}$$

$$(b) \quad H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)} \quad \text{—} \textit{unstable}$$



معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

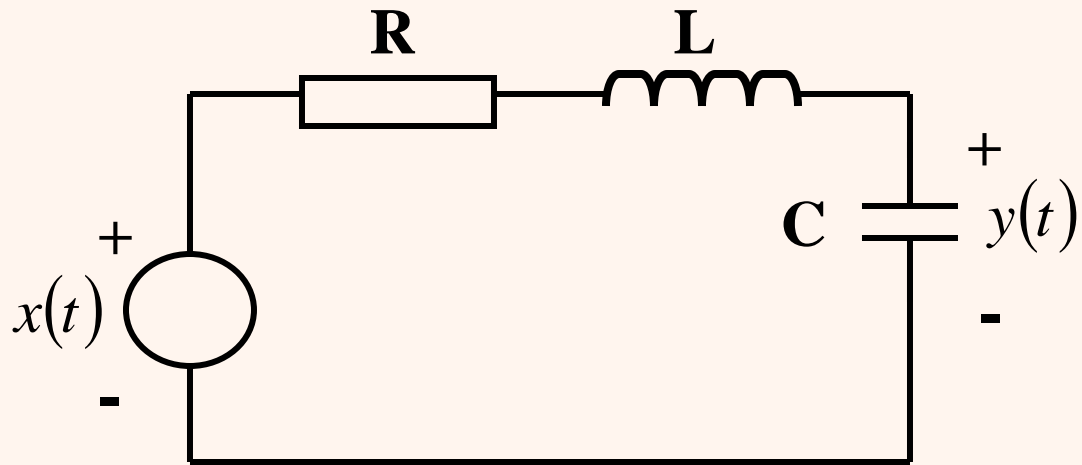
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} \quad \text{ROC}$$

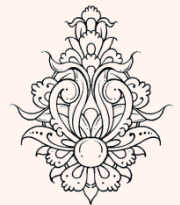
$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$$

$$s(t) = \left(\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right) u(t)$$





$$H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + 1/LC}$$



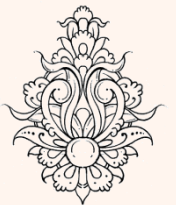
مثال

$$x(t) = e^{-3t} u(t)$$

$$y(t) = [e^{-t} - e^{-2t}] u(t)$$

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 3x(t)$$



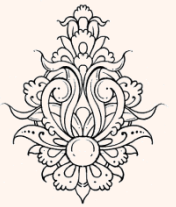
مثال

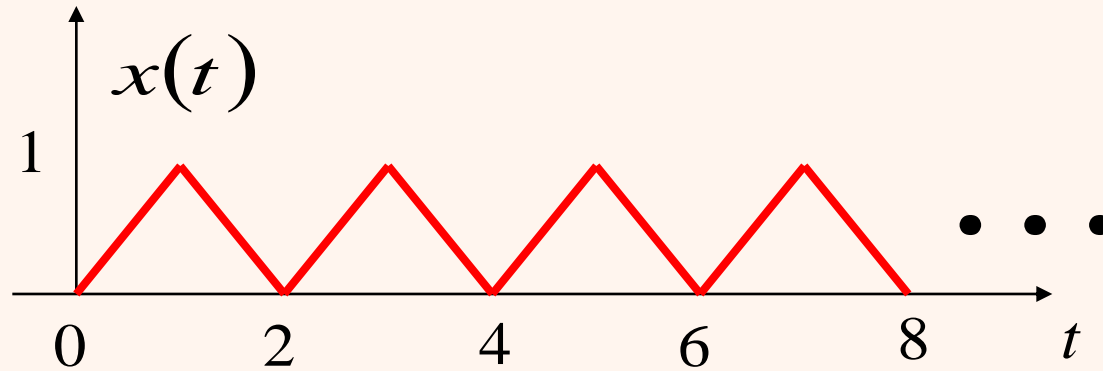
$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$\textcircled{1} \quad a > 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = 0$$

$$\textcircled{2} \quad a = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} = 1$$

$$\textcircled{3} \quad a < 0$$





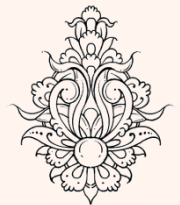
مثال

$X(s) = ?$

$$X(s) = X_1(s) X_2(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2 (1 - e^{-2s})} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$x(t) = \frac{1}{t} [1 - e^{-at}] u(t)$$

$$X(s) = \ln \left| \frac{s+a}{s} \right| \quad \text{Re}\{s\} > \max\{0, -a\}$$

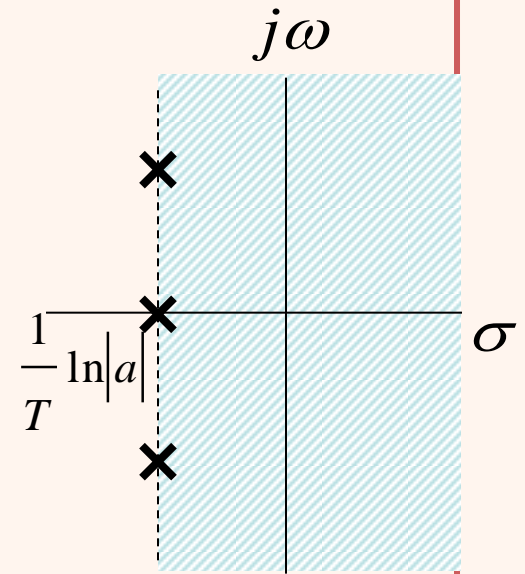


مثال

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \delta(t - kT)$$

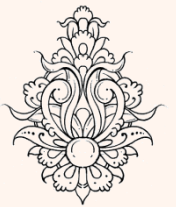
$$X(s) = ?$$

$$X(s) = \frac{1}{1 - ae^{-sT}} \quad \text{Re}\{s\} > \frac{1}{T} \ln|a|$$



$$X(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-s})} \quad \text{Re}\{s\} > 0 \quad x(t) = ?$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u(t - k)$$



مثال

$$X(s) = \frac{2}{(s^2 + 1)^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0 \quad x(t) = ?$$

$$\sin \omega_0 t u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

$$x(t) = (\sin t - t \cos t) u(t)$$

