سیگنال و سیستم

(تجزیه و تحلیل سیستم‌ها)

۱۳-۱۱-۱۸۰

بخش چهارم

تبدیل فوریه

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

پاییز ۱۳۹۴

احمد محمودی ازناوه

http://faculties.sbu.ac.ir/~a_mahmoudi/

فهرست مطالب

تبدیل فوریه

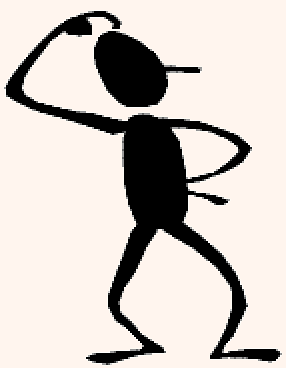
$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

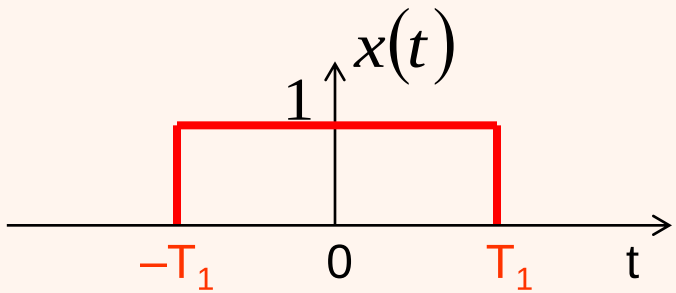
Synthesis equation

$$a_k=\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

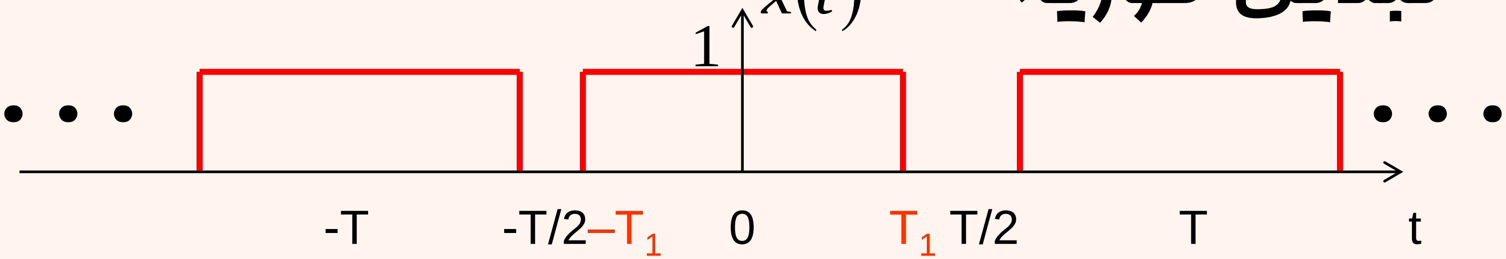
Analysis equation

برای آنالیز سیگنال های غیرپریودیک چه می توان کرد؟



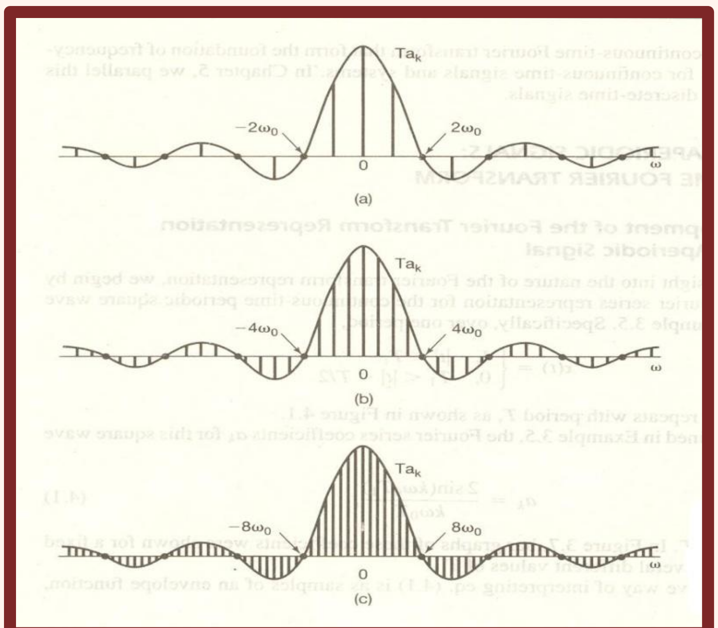


تبدیل فوریه



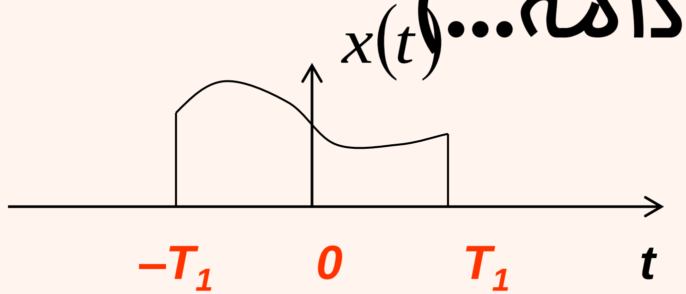
$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} = \frac{2T_1}{T}\,\mathrm{sinc}(k\omega_0 T_1)$$

$$\boldsymbol{T a_k = 2T_1\,\mathrm{sinc}(\omega T_1)\big|_{\omega = k\omega_0}}$$

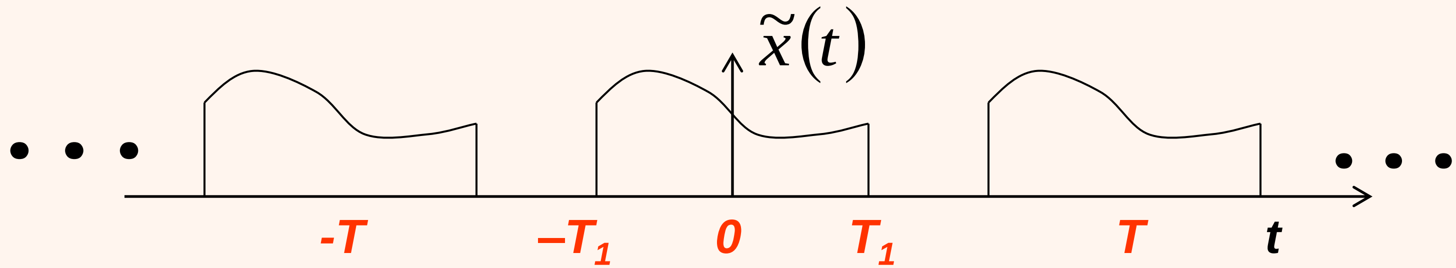


$$\boldsymbol{T \uparrow \Rightarrow \omega_0 = 2\pi / T \downarrow}$$

تبدیل فوریه(ادامه...)



$$x(t)=0 \quad , \quad |t|>T_1$$



$$\tilde{x}(t)=\begin{cases} x(t) & -\dfrac{T}{2}<t<\dfrac{T}{2} \\ periodic & |t|>\dfrac{T}{2} \end{cases}$$

As $T \to \infty$, $\tilde{x}(t) = x(t)$ for all t

تبدیل فوریه(ادامه...)

$$\tilde{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \left(\omega_0=\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad a_k=\frac{X(jk\omega_0)}{T}$$

تبدیل فوریه(ادامه...)

for $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

$$x(t) = \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{X(jk\omega_0)}{T}}_{a_k} e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

As $T \to \infty$, $\sum \omega_0 \to \int d\omega$, we get the CT Fourier Transform pair

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \\ X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FT}} X(j\omega)$$

همگرایی تبدیل فوریه

- در چه شرایطی می‌توان از سیگنال تبدیل فوریه گرفت؟
  - به طور مطلق انتگرال‌پذیر باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right|^2 dt < \infty$$

  - در یک بازه‌ی محدود زمانی تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد.
  - در یک بازه‌ی زمانی محدود تعداد نقاط گسستگی محدود باشد.

مثال

$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$$

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

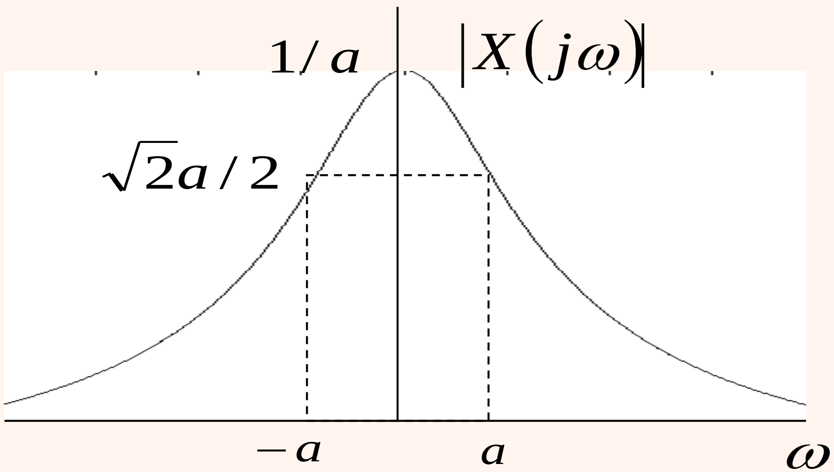
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

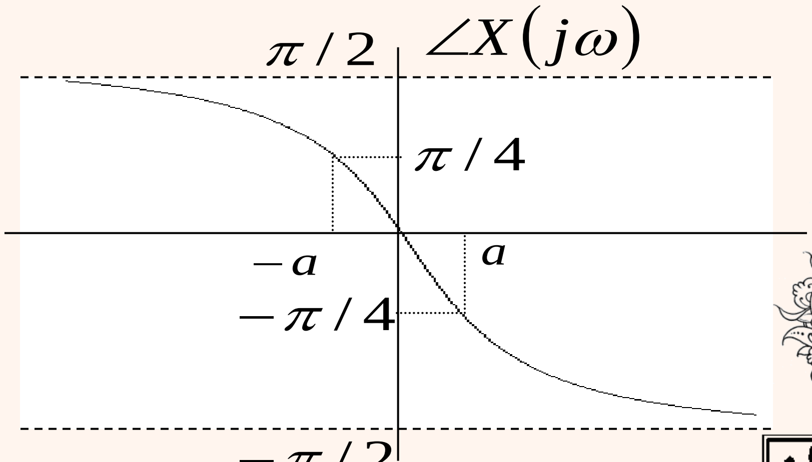
$$= e^{-j\omega_0 t}$$

مثال

$$x(t)=e^{-at}u(t)\quad a>0$$

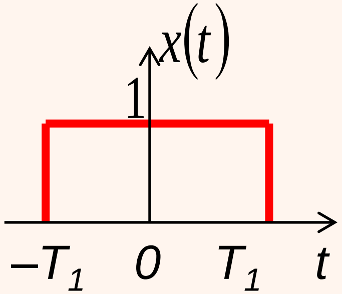
$$e^{-at}u(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{a+j\omega}$$





مثال

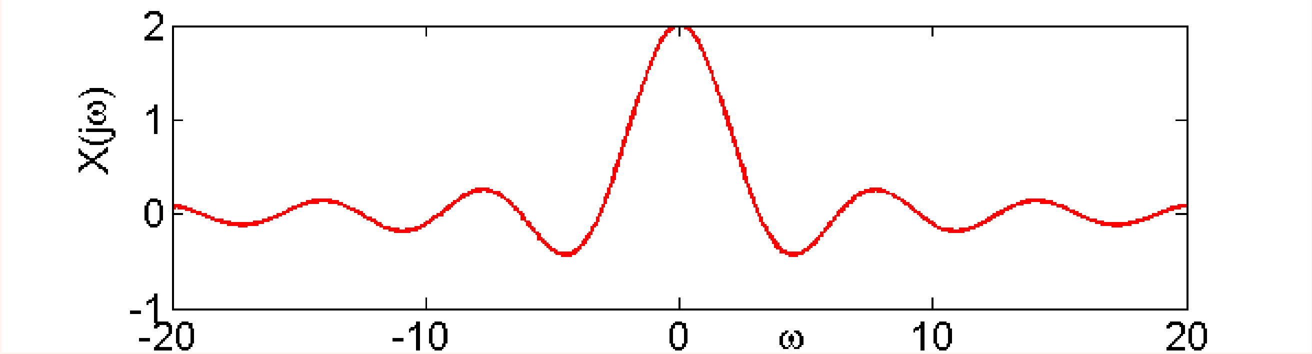
$$x(t)=\begin{cases} 1 & |t|\le T_1 \\ 0 & |t|>T_1 \end{cases}$$



$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

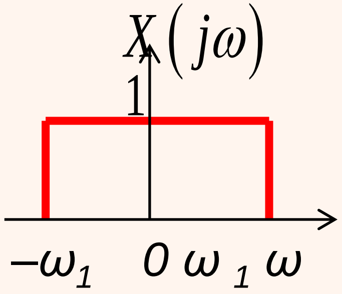
$$=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}=\frac{2T_1\sin(\omega T_1)}{\omega T_1}$$



$T_1 = 1$

مثال

$$x(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le\omega_1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$



$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1}e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{-\omega_1}^{\omega_1}$$

$$=\frac{2\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t}=\frac{\omega_1}{\pi}\operatorname{sinc}(\omega_1 t)$$

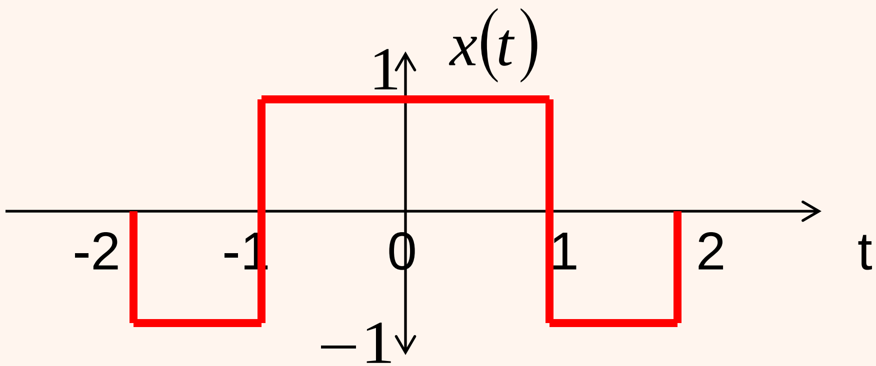
خواص تبدیل فوریه

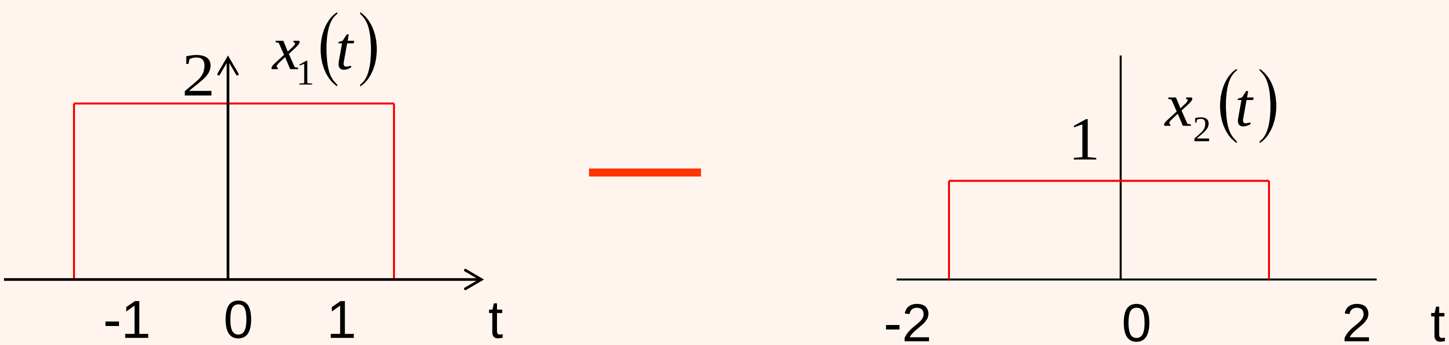
- خطی بودن:

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \qquad y(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega)$$

$$ax(t)+by(t) \xleftrightarrow{F} aX(j\omega)+bY(j\omega)$$

$$\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}$$





$$x(t) \xleftrightarrow{F} \frac{4\sin\omega - 2\sin 2\omega}{\omega}$$

خواص تبدیل فوریه

- شیفت زمانی:

$$x(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega)$$

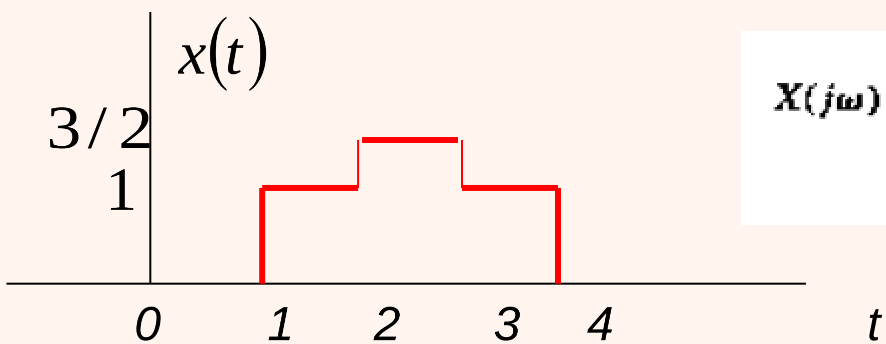
$$x(t-t_0) \overset{F}{\longleftrightarrow} X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$\left|X(j\omega)e^{-j\omega t_0}\right| = \left|X(j\omega)\right|$$

اندازه‌ی سری تفاوتی نمی‌کند

$$\angle\left(X(j\omega)e^{-j\omega t_0}\right) = \angle X(j\omega) - \omega t_0$$

فاز تبدیل به صورت خطی تغییر می‌کند



$$X(j\omega) = e^{-j5\omega/2}\left\{\frac{\sin(\omega/2) + 2\sin(3\omega/2)}{\omega}\right\}.$$

همگرایی تبدیل فوریه

- در چه شرایطی می‌توان از سیگنال تبدیل فوریه گرفت؟
  - به طور مطلق انتگرال‌پذیر باشد.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)\right|^2 dt < \infty$$

  - در یک بازه‌ی محدود زمانی تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد.
  - در یک بازه‌ی زمانی محدود تعداد نقاط گسستگی محدود باشد.

تبدیل فوریه‌ی سیگنال پریودیک

- سیگنال‌های پریودیک در شرط اول از شرایط Dirichlet صدق نمی‌کند، برای محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی آن‌ها به طریق زیر عمل می‌کنیم:
- فرض کنید تبدیل فوریه‌ی یک سیگنال به صورت زیر باشد:

$$X(j\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

- خواهیم داشت:
- در نتیجه

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega t}d\omega=e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 t}\xleftrightarrow{FT}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

تبدیل فوریه‌ی سیگنال پریودیک

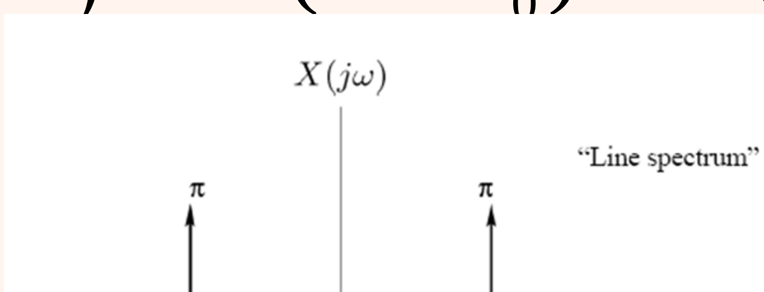
- و در نتیجه برای محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی یک سیگنال پریودیک ابتدا ضرایب سری فوریه‌آن محاسبه می‌شود:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega-\omega_0)$$

- مثال:

$$x(t)=\cos(\omega_0 t)=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}$$

$$X(j\omega)=\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

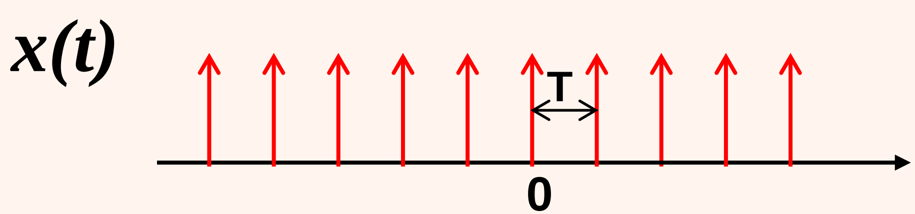


مثال

- تبدیل فوریه‌ی سیگنال زیر را حساب کنید:

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) \qquad a_k=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\delta(t)e^{-jk\omega_s t}dt=\frac{1}{T}, \qquad \forall k$$

$$X(j\omega)=\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\frac{2\pi}{T})$$



تناوب در حوزه‌ی فرکانس و حوزه‌ی زمان معکوس یکدیگر هستند

خواص تبدیل فوریه(ادامه...)

Conjugation and Conjugate Symmetry

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$x(-t) \xleftrightarrow{FT} X(-j\omega)$$

$$x^*(t) \xleftrightarrow{FT} X^*(-j\omega)$$

اگر x(t) حقیقی باشد

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}^*(\mathbf{t}) \Rightarrow \mathbf{X}(\mathbf{j}\omega) = \mathbf{X}^*(-\mathbf{j}\omega)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}^*(\mathbf{t}) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{Re}\{\mathbf{X}(-\mathbf{j}\omega)\} = \mathbf{Re}\{\mathbf{X}(\mathbf{j}\omega)\} \\ \mathbf{Im}\{\mathbf{X}(-\mathbf{j}\omega)\} = -\mathbf{Im}\{\mathbf{X}(\mathbf{j}\omega)\} \end{cases}$$

زوج

فرد

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}) = \mathbf{x}^*(\mathbf{t}) \Rightarrow \begin{cases} |\mathbf{X}(-\mathbf{j}\omega)| = |\mathbf{X}(\mathbf{j}\omega)| \\ \angle\mathbf{X}(-\mathbf{j}\omega) = -\angle\mathbf{X}(\mathbf{j}\omega) \end{cases}$$

زوج

فرد

خواص تبدیل فوریه(ادامه...)

$x(t)$ حقیقی و زوج $\Rightarrow$ $X(j\omega)$ حقیقی و زوج

$x(t)$ حقیقی و فرد $\Rightarrow$ $X(j\omega)$ موهومی و فرد

$$\mathbf{Ev}\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathbf{F}} \mathbf{Re}\{X(j\omega)\} \qquad \mathbf{Od}\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathbf{F}} j\,\mathbf{Im}\{X(j\omega)\}$$

مثال

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega + a}$$

$$e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$ حقیقی و زوج

$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{FT} 2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{j\omega + a}\right\} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

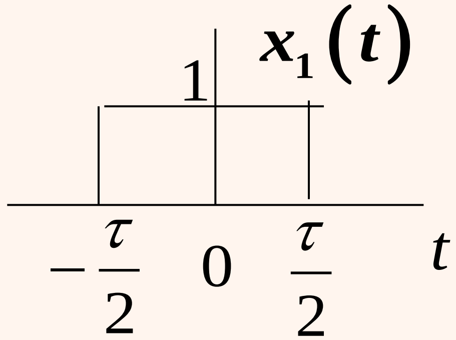
$$= 2\left(\frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2}\right) = 2Ev\{e^{-at}u(t)\}$$

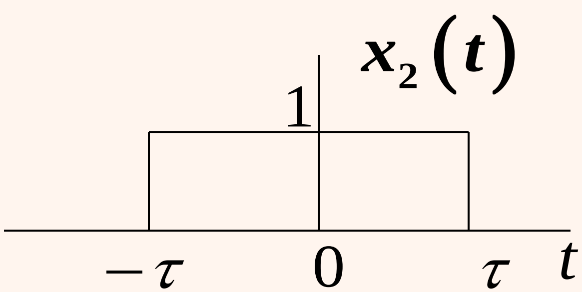
خواص تبدیل فوریه(ادامه...)

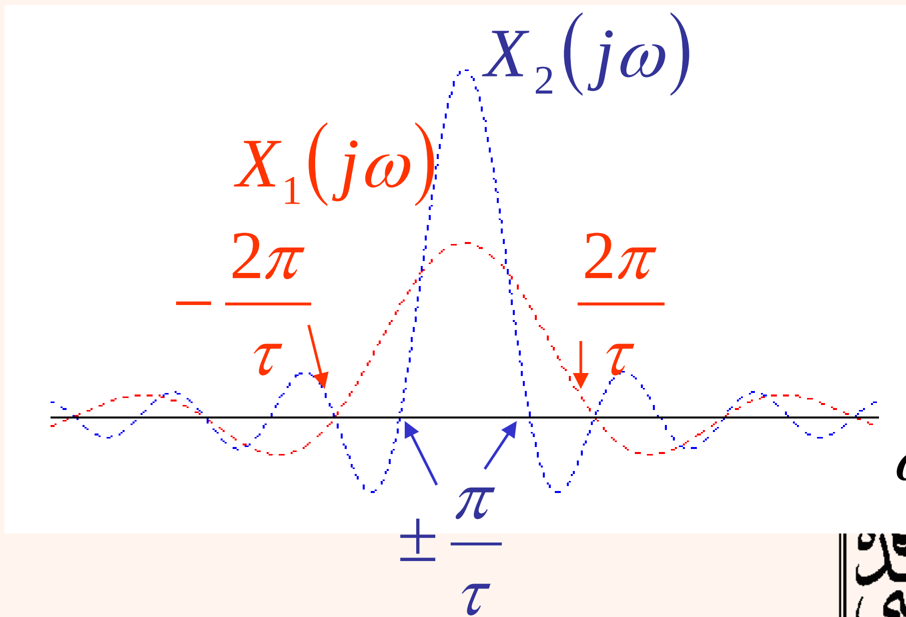
Time and frequency scaling

$$x(at) \xleftrightarrow{\mathrm{F}} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

$$x(at) \xleftrightarrow{FS} a_k$$







خواص تبدیل فوریه(ادامه...)

مشتق و انتگرال در حوزه‌ی زمان

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

$$x^{(n)}(t) \xleftrightarrow{FS} (jk\omega_0)^n a_k$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xleftrightarrow{F} (j\omega)^n X(j\omega)$$

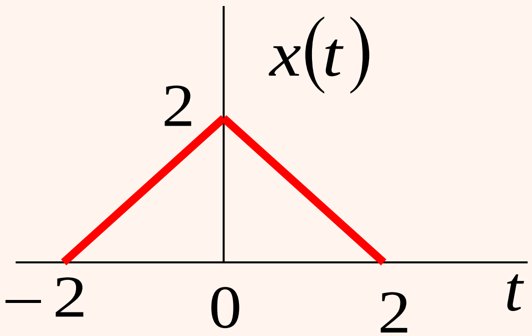
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

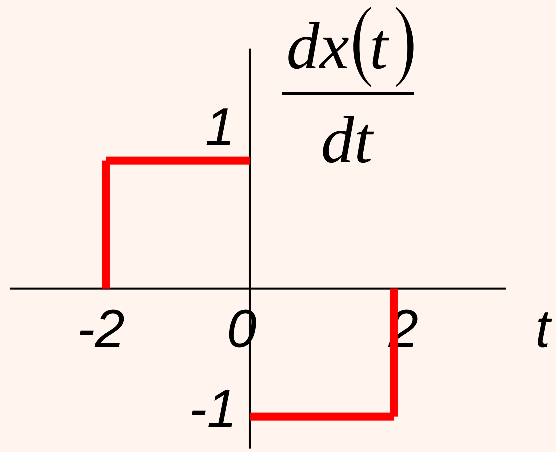
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{jk\omega_0} a_k \quad (for\ x(t),\ a_0 = 0)$$

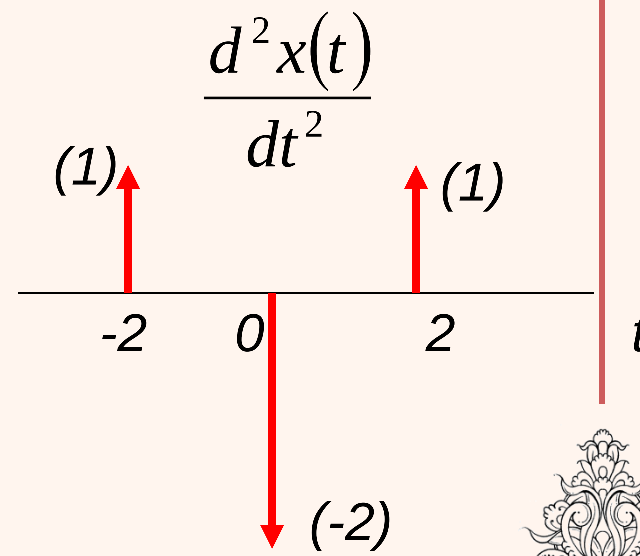
مثال

$$\delta(t) \xleftrightarrow{F} 1$$

$$u(t) \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$







$$X(j\omega) = \frac{4\sin^2\omega}{\omega^2}$$

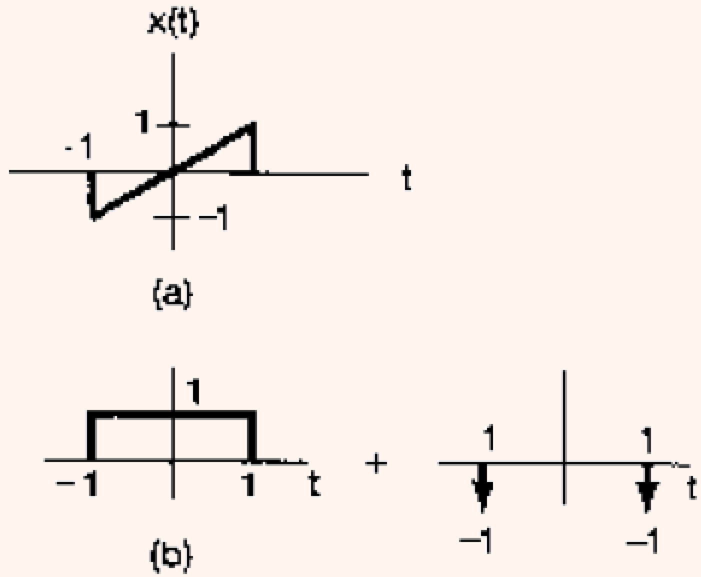
$$Y(j\omega) = \pi Z(0)\delta(\omega) + \frac{Z(j\omega)}{j\omega}$$

$$= \frac{-4\sin^2\omega}{j\omega}$$

$$Z(j\omega) = -2 + 2\cos(2\omega)$$

$$= -4\sin^2\omega$$

مثال



$$G(jw) = \frac{2\sin\omega}{\omega} - \left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right)$$

$$X(j\omega) = \frac{G(jw)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

$$X(j\omega) == \frac{2\sin\omega}{j\omega^2} - \frac{2\cos\omega}{j\omega}$$

خواص تبدیل فوریه(ادامه...)

کانولوشن

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \qquad h(t) \xleftrightarrow{F} H(j\omega)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \qquad Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right)e^{-j\omega t}dt$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right)d\tau$$

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}H(j\omega)d\tau$$

$$= H(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

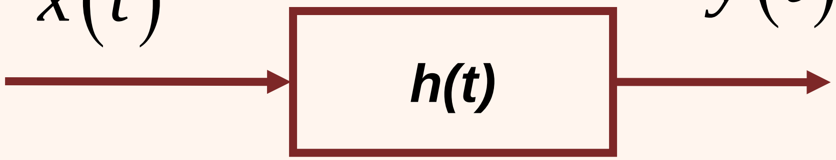
$$= H(j\omega)X(j\omega)$$

خواص تبدیل فوریه(ادامه...)

مثال

$$x(t)$$

$$y(t)=x(t)*h(t)$$



$$Y(j\omega)=X(j\omega)H(j\omega)$$

$$x(t)=e^{j\omega_0 t} \qquad e^{j\omega_0 t}\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$$

$$Y(j\omega)=H(j\omega)2\pi\delta(\omega-\omega_0)=2\pi H(j\omega_0)\delta(\omega-\omega_0)$$

$$y(t)=H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

رابطه‌ی پارسوال

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(j\omega) \right|^2 d\omega$$

Energy-density spectrum

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right] d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) X(j\omega) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| X(j\omega) \right|^2 d\omega$$

خواص تبدیل فوریه(ادامه...)

ضرب

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega) \qquad h(t) \xleftrightarrow{F} H(j\omega)$$

$$y(t) = x(t) \times h(t) \qquad Y(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * H(j\omega)\right]$$

شیفت در حوزه‌ی فرکانس

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$x(t)e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} X(j(\omega - \omega_0))$$

خواص تبدیل فوریه(ادامه...)

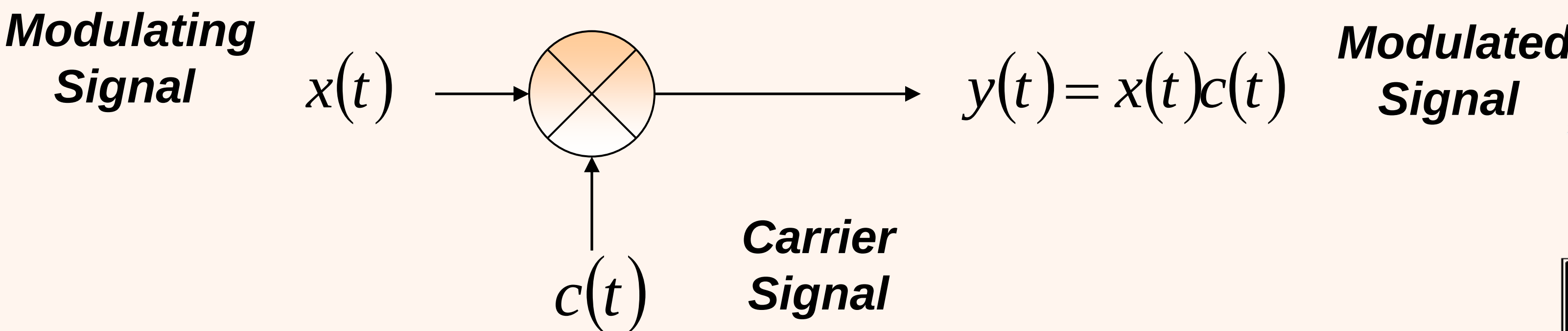
مثال

$$y(t)=x(t)\,p(t)\xleftrightarrow{FT}\frac{1}{2\pi}\left[X(j\omega)*P(j\omega)\right]$$

$$p(t)=\cos\omega_0 t\xleftrightarrow{FT}\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

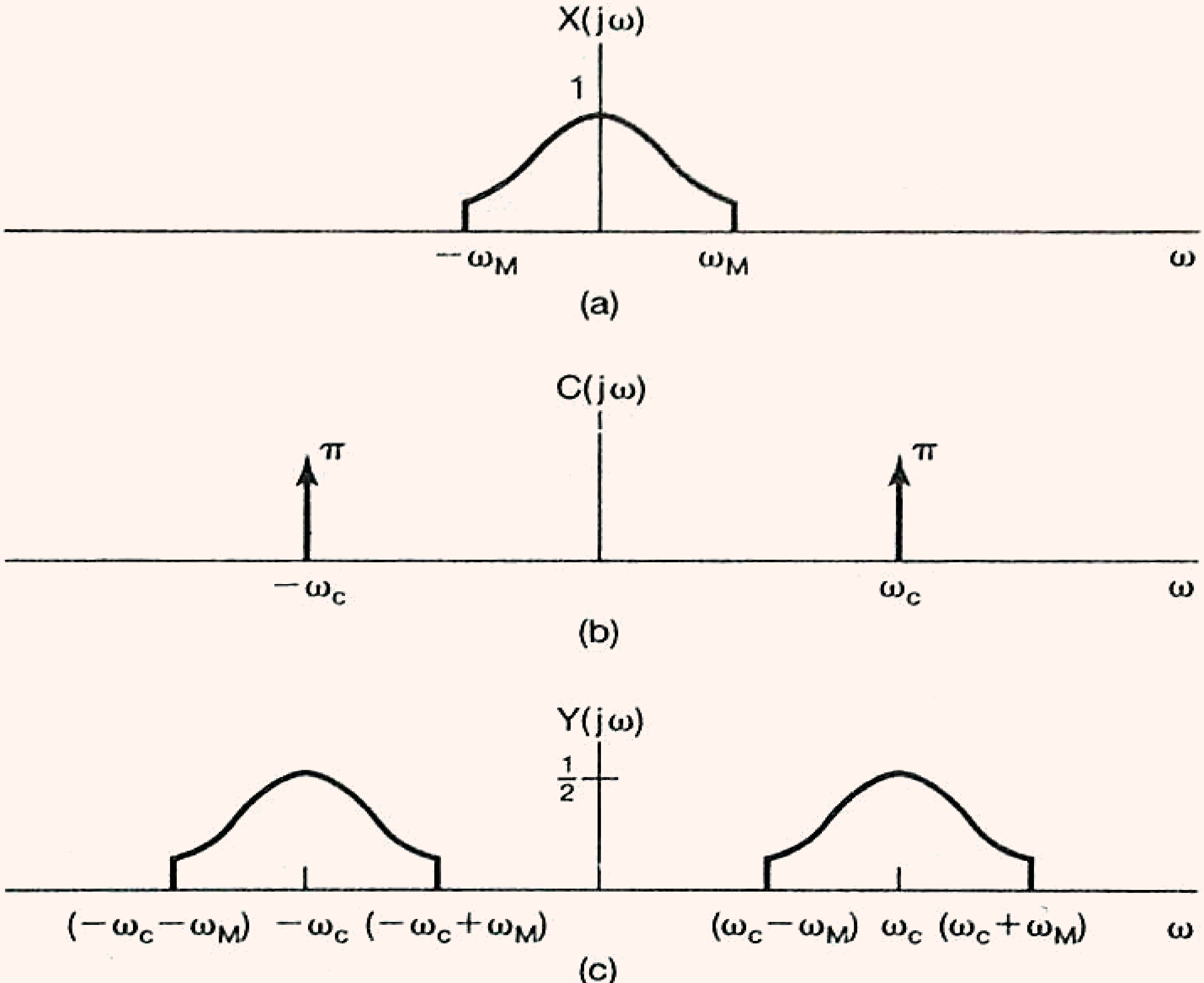
$$Y(j\omega)=\frac{1}{2}\left[X\left(j(\omega-\omega_0)\right)+X\left(j(\omega-\omega_0)\right)\right]$$

Amplitude Modulation

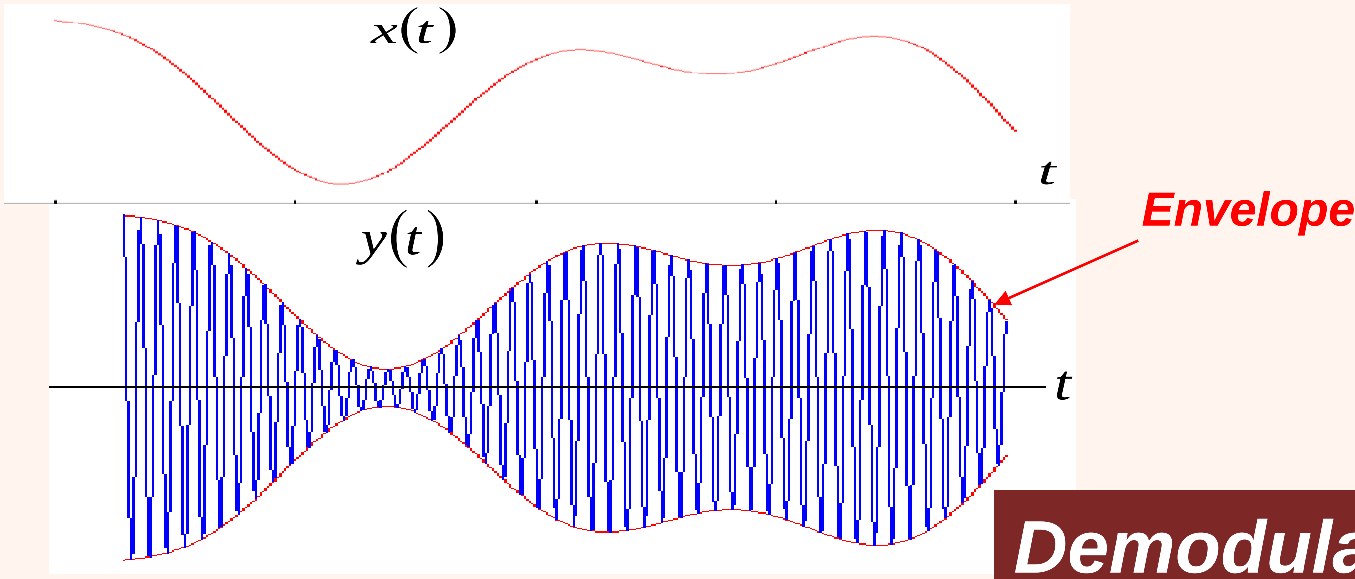


Amplitude Modulation

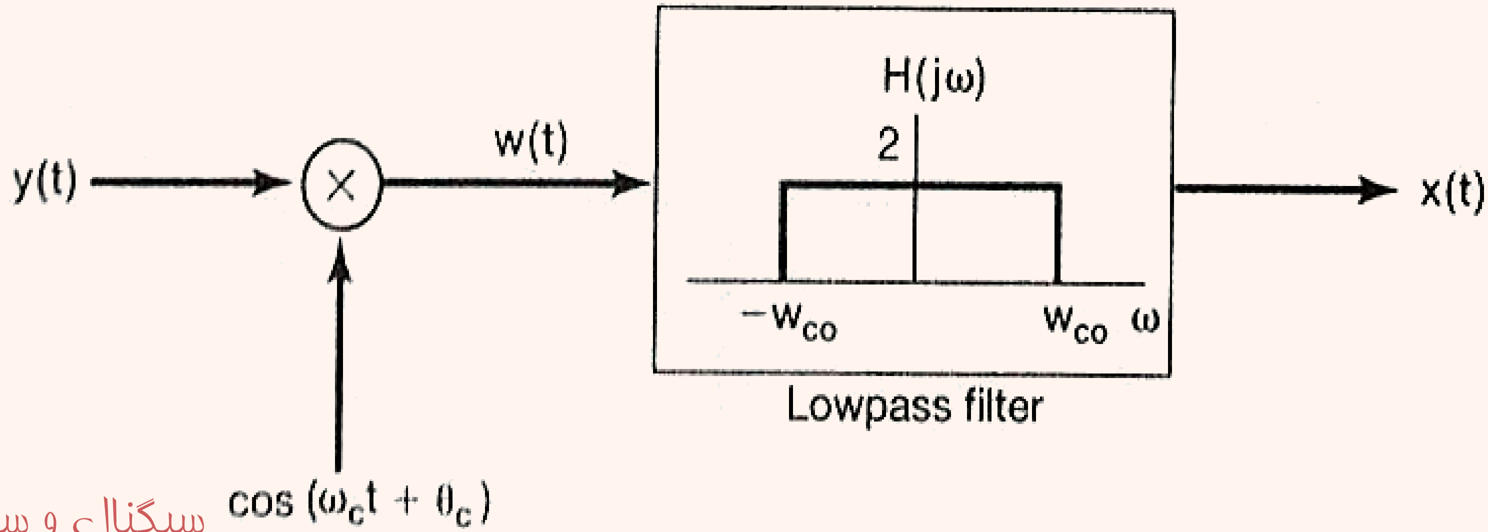
مدولاسیون



مدولاسیون (ادامه...)



Demodulation

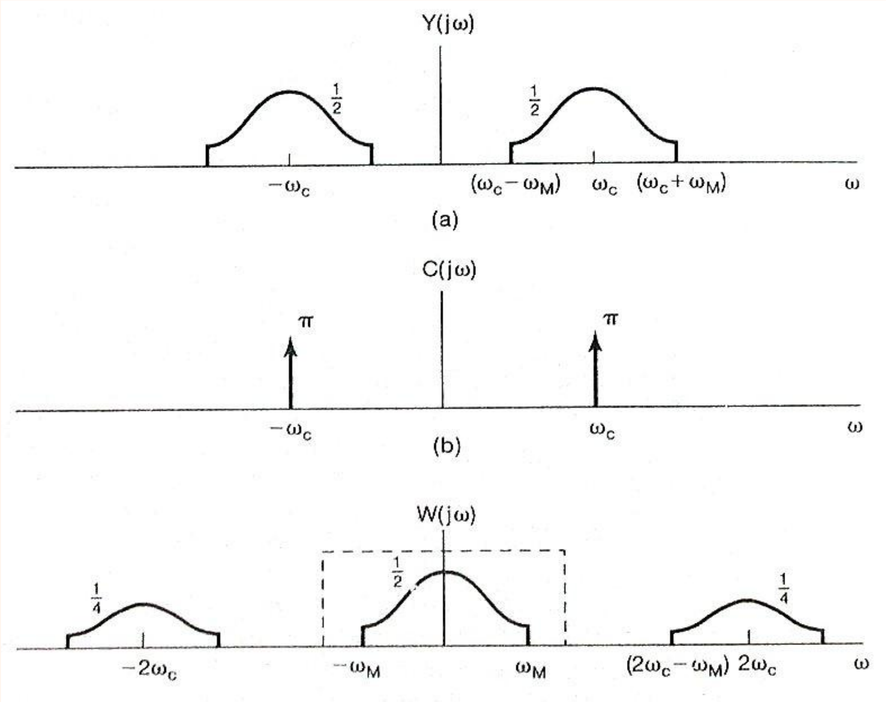


مدولاسیون (ادامه...)

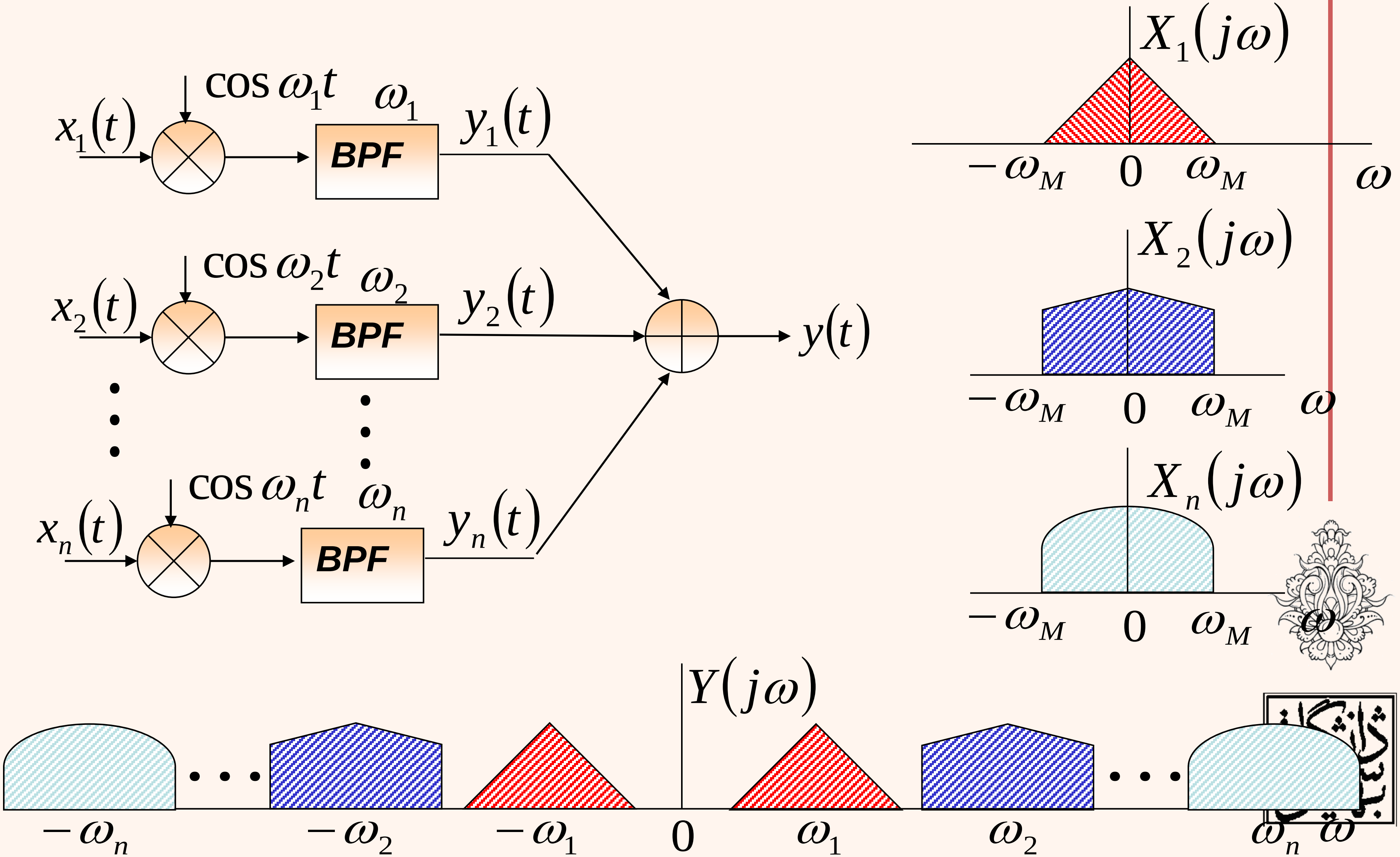
$$w(t) = y(t)c(t)$$
$$= x(t)\cos^2 \omega_c t$$
$$= \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos 2\omega_c t$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{2}X(j\omega) + \frac{1}{4}X(j\omega - j2\omega_c) + \frac{1}{4}X(j\omega + 2j\omega_c)$$

$x(t)$ or $W(j\omega)$



Frequency-Division Multiplexing



خاصیت دوگانی

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

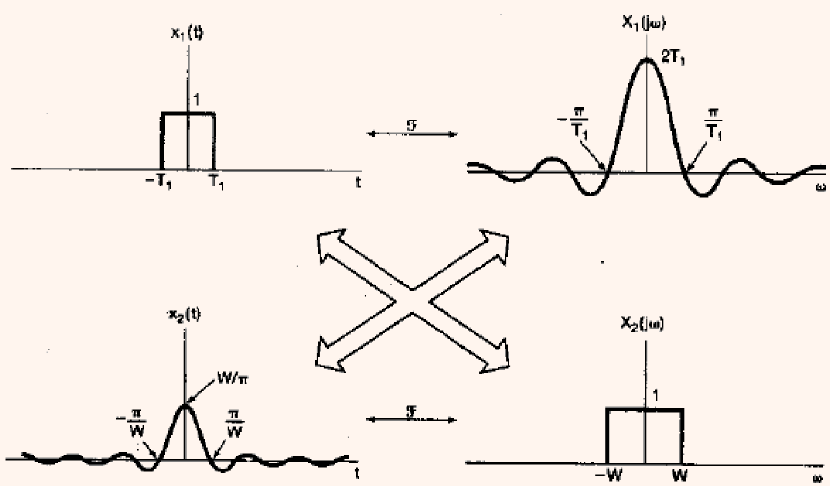
- شباهت این دو رابطه منجر به خاصیت دوگانی می‌شود:

$$\boxed{x(t)\xleftrightarrow{F}X(j\omega)}$$

$$\boxed{X(jt)\xleftrightarrow{F}2\pi x(-j\omega)}$$

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|\le T_1\\ 0 & |t|>T_1\end{cases}\quad\xleftrightarrow{F}\quad 2T_1\,\mathrm{sinc}(\omega T_1)$$

$$x(t)=\frac{\sin Wt}{\pi t}\quad\xleftrightarrow{F}\quad X(j\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\le W\\ 0 & |\omega|>W\end{cases}$$



مثال

$$e^{-a|t|} \xleftrightarrow{FT} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

می‌دانیم

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2} \qquad x(t) = e^{-|t|}$$

$$G(j\omega) = 2\pi e^{-|\omega|} \qquad X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

خواص تبدیل فوریه(ادامه...)

مشتق در حوزه‌ی فرکانس

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$-jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$$

$$\frac{-1}{jt}x(t)+\pi x(0)\delta(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta)d\eta$$

مثال

$$x(t)=t^n \qquad t^n \xleftrightarrow{F} 2j^n\pi\delta^{(n)}(\omega)$$

مثال

$$x(t) = te^{-2t}u(t)$$

$$h(t) = e^{-4t}u(t)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = ?$$

$$e^{at}u(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} = \frac{1}{j\omega - a}$$

$$te^{at}u(t) \overset{FT}{\longleftrightarrow} = \frac{1}{(j\omega - a)^2}$$

می‌دانیم

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+2)^2} \times \frac{1}{j\omega+4}$$

Partial-Fraction Expansion

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+2)^2} \times \frac{1}{j\omega+4} = \frac{A}{(j\omega+2)} + \frac{B}{(j\omega+2)^2} \times \frac{C}{j\omega+4}$$

$$y(t) = -\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-4t}$$

سیستم LTI با معادلات دیفرانسیل

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}$$

مثال

- پاسخ سیستم به ورودی زیر را بنویسید.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+4\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)$$

$$x(t)=e^{-t}u(t)$$

$$h(t)=\frac{1}{2}e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

$$\boldsymbol{y(t)=\frac{1}{2}te^{-t}u(t)+\frac{1}{4}e^{-t}u(t)-\frac{1}{4}e^{-3t}u(t)}$$