سیگنال و سیستم
(تجزیه و تحلیل سیستم‌ها)
۱۳-۱۱-۱۸۰

بخش سوم

سری فوریه

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

پاییز ۱۳۹۴

احمد محمودی ازناوه

http://faculties.sbu.ac.ir/~a_mahmoudi/

فهرست مطالب

- سیستم‌های LTI و توابع ویژه
- سری فوریه‌ی زمان‌پیوسته
  - خواص
- سری فوریه‌ی زمان‌گسسته
  - خواص

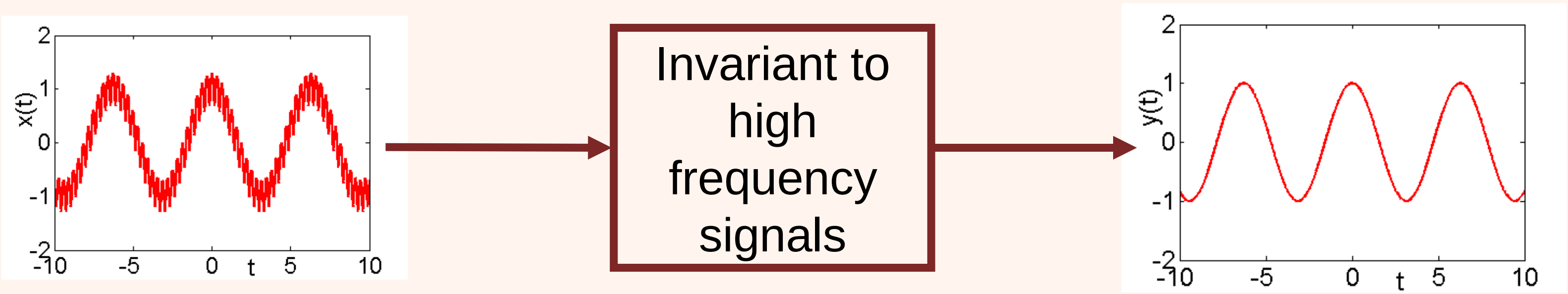
پیش‌گفتار

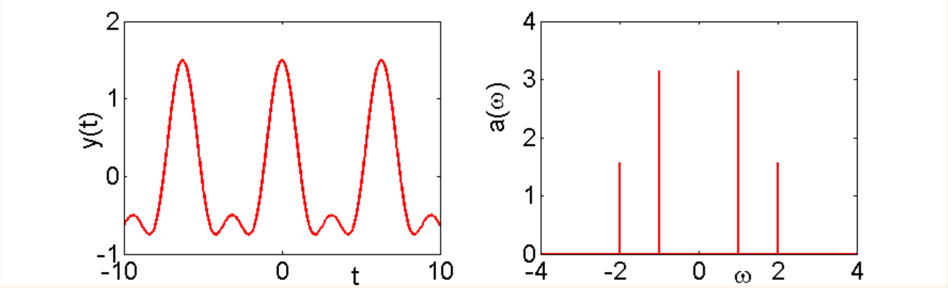
The profound study of nature is the most fertile source of mathematical discoveries.

Joseph Fourier

چرا آنالیز فوریه اهمیت دارد؟

- در بسیاری از کاربردها به تجزیه تحلیل در دامنه‌ی فرکانس نیاز داریم.
- با استفاده از این تئوری یک سیگنال از دامنه‌ی زمان(مکان) به دامنه‌ی فرکانس منتقل می‌شود.



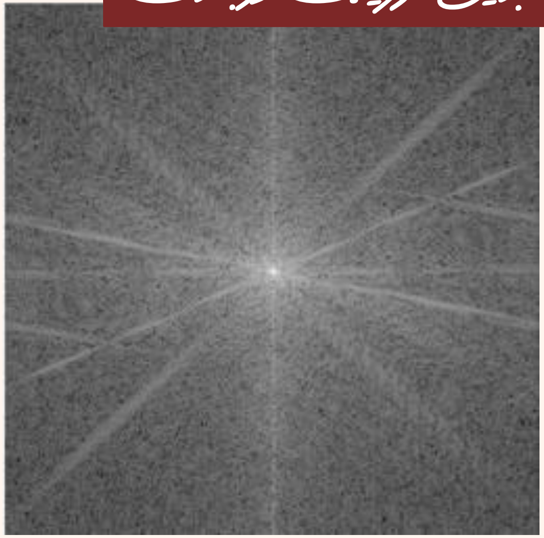


مثال

```
clear all;
clc;
Img=imread('cameraman.tif');
imshow(Img);
FImg=fft2(Img);
FImg=fftshift(FImg);
imshow(log(FImg),[]);
```

تصویر اصلی

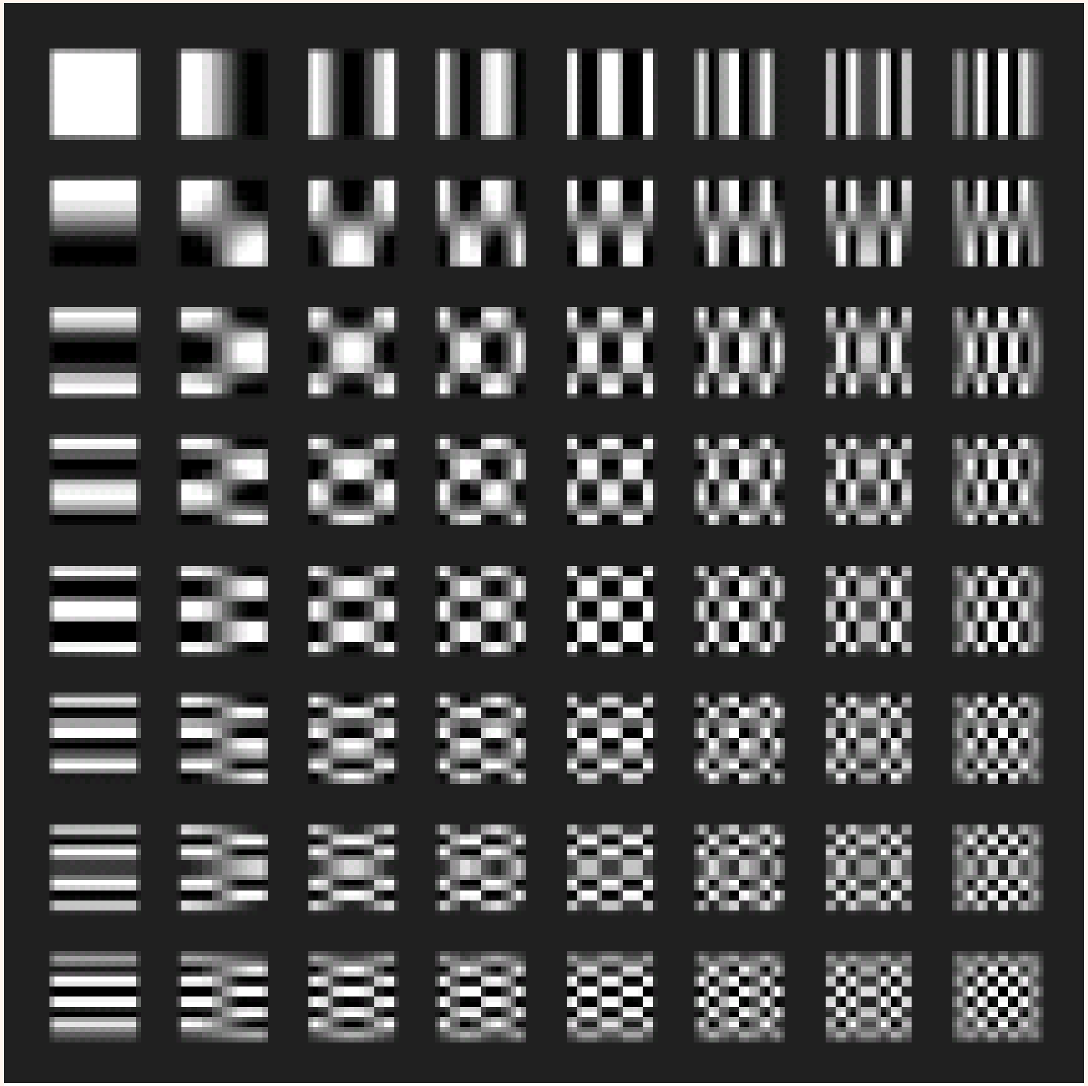
پس از اعمال تبدیل فوریه‌ی دوبعدی



سیگنال‌های پایه

- با استفاده از سیگنال‌های پایه‌ی مناسب می‌توان دسته‌ی بزرگی از سیگنال‌ها را نمایش داد.
- تحلیل پاسخ ورودی‌های مختلف بر این اساس بسیار ساده‌تر خواهد بود.
- در عمل توابع پایه‌ی متنوعی مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- در این بخش به یکی از مهمترین دسته از توابع پایه پرداخته خواهد شد.

تصاویر پایه تبدیل کسینوسی



توابع ویژه و خواص آن

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \rightarrow \boxed{\text{System}} \rightarrow ?$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 (t-\tau)} h(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \boxed{e^{j\omega_0 t}} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 \tau} h(\tau) d\tau}$$

تابع ویژه

مقدار ویژه

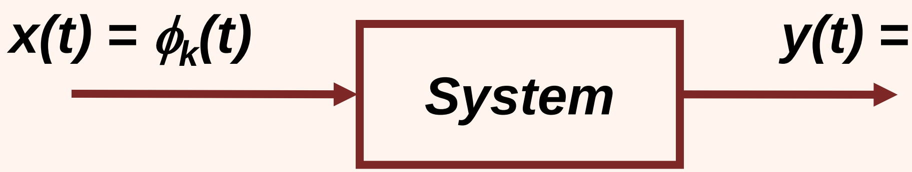
eigenfunction

eigenvalue

$$x(t) = \phi_k(t) \rightarrow \boxed{\text{System}} \rightarrow y(t) = \lambda_k \phi_k(t)$$

توابع ویژه و خواص آن

- در صورتی که بتوان یک تابع را به صورت مجموع توابع ویژه نوشت:
- $x(t) = \Sigma_k \, a_k \phi_k(t)$



$$\boldsymbol{x(t) = \Sigma_k \, a_k \phi_k(t)}$$

$$\boldsymbol{y(t) = \Sigma_k \, a_k \lambda_k \phi_k(t)}$$

توابع نمایی مختلط زمان پیوسته

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} h(\tau)\, d\tau \right] e^{st}$$

$$y(t) = \boxed{H(s)}\ \boxed{e^{st}}$$

مقدار ویژه   تابع ویژه

در سیستم های LTI توابع به شکل $\phi(t) = e^{st}$ (که s عدد مختلط است) توابع ویژه هستند.

توابع نمایی مختلط زمان گسسته

$$x[n]=z^n$$

h[n]

$$y[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]z^{n-m}$$

$$y[n]=\left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]z^{-m}\right]z^n$$

$$y(t)=\boxed{H[z]}\,\boxed{z^n}$$

مقدار ویژه

تابع ویژه

در سیستم‌های LSI توابع به شکل $\phi[n] = z^n$ (که z عدد مختلط است) توابع ویژه هستند.

سیگنال‌های متناوب و سری فوریه

- x(t) = x(t+T) for all t
  - به کوچک‌ترین T، fundamental period گفته می‌شود.
  - $\omega_0 = 2\pi/T$، fundamental frequency گفته می‌شود.
- هر سیگنال متناوب را می‌توان با کمک سری فوریه نمایش داد.
- توابع پایه‌ی زیر برای نمایش سیگنال متناوب با دوره‌ی تناوب T به کار می‌رود.

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

سیگنال‌های متناوب و سری فوریه (ادامه...)

- سیگنال متناوب x(t) با استفاده از توابع پایه‌ی سری فوریه به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

- ضرایب a_k ضرایب سری فوریه نامیده می‌شوند.
- a_0 مؤلفه‌ی DC
- $a_{\pm 1}$ مؤلفه‌ی اساسی(هارمونیک اول)
- $a_{\pm \mathrm{n}}$ هارمونیک nام

محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه-مثال

- ضرایب سری فوریه‌ی تابع زیر را محاسبه کنید.

$$x(t) = \cos(4\pi t) + 2\sin(8\pi t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}\right] + \frac{1}{j}\left[e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t}\right]$$

$$\omega_0 = 4\pi \qquad T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{j} \qquad a_{-2} = \frac{-1}{j}$$

سری فوریه

- برای نمایش توابع حقیقی با استفاده از سری فوریه می‌توان به شیوه‌ی زیر نیز عمل کرد:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\alpha_k \cos k\omega_0 t + \beta_k \sin k\omega_0 t\right]$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\gamma_k \cos\left(k\omega_0 t + \theta_k\right)\right]$$

- با توجه به خواص توابع ویژه، از شیوه‌ی پیش استفاده می‌کنیم.

محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

- طرفین را در $e^{-jn\omega_0 t}$ ضرب می‌کنیم.

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}$$

- از طرفین انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt=\int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T\,\delta(n-k)$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt=\begin{cases}T, & k=n\\ 0, & k\neq n\end{cases}$$

$$=K\delta(n-k)$$

تعامد

محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T\,\delta(n-k)$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

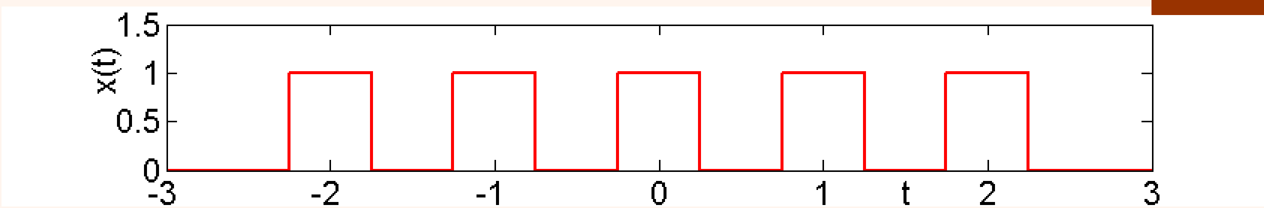
$$\boldsymbol{x(t)} \stackrel{\mathbb{FS}}{\longleftrightarrow} \boldsymbol{a_k}$$

مثال

- سری فوریه سیگنال زیر را محاسبه کنید:

$$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & T_1<|t|<T/2\end{cases}$$



$$a_0=\tfrac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}1dt=\frac{2T_1}{T}$$

مؤلفه‌ی DC مقدار میانگین سیگنال است

$$a_k=\tfrac{1}{T}\int_{-T_1}^{T_1}e^{-jk\omega_0 t}dt=-\frac{1}{jk\omega_0 T}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$

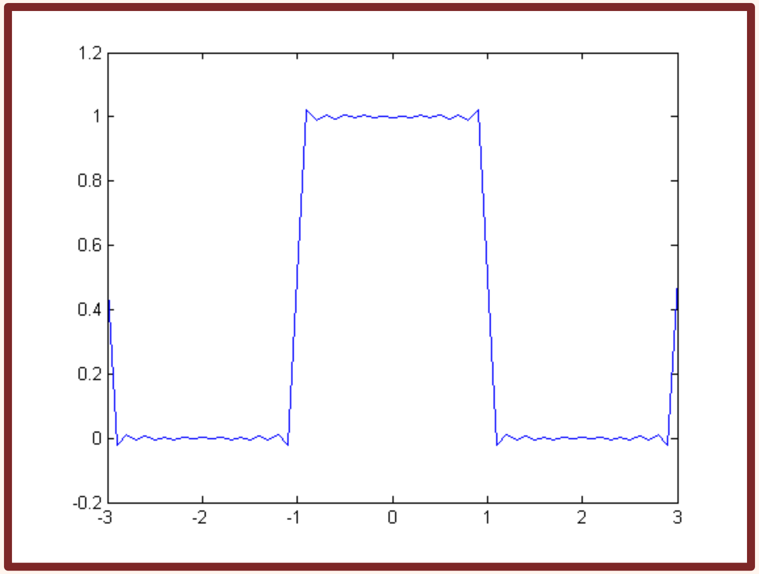
$$=\frac{2}{k\omega_0 T}\left(\frac{e^{jk\omega_0 T_1}-e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j}\right)$$

$$=2\sin(k\omega_0 T_1)/k\omega_0 T$$

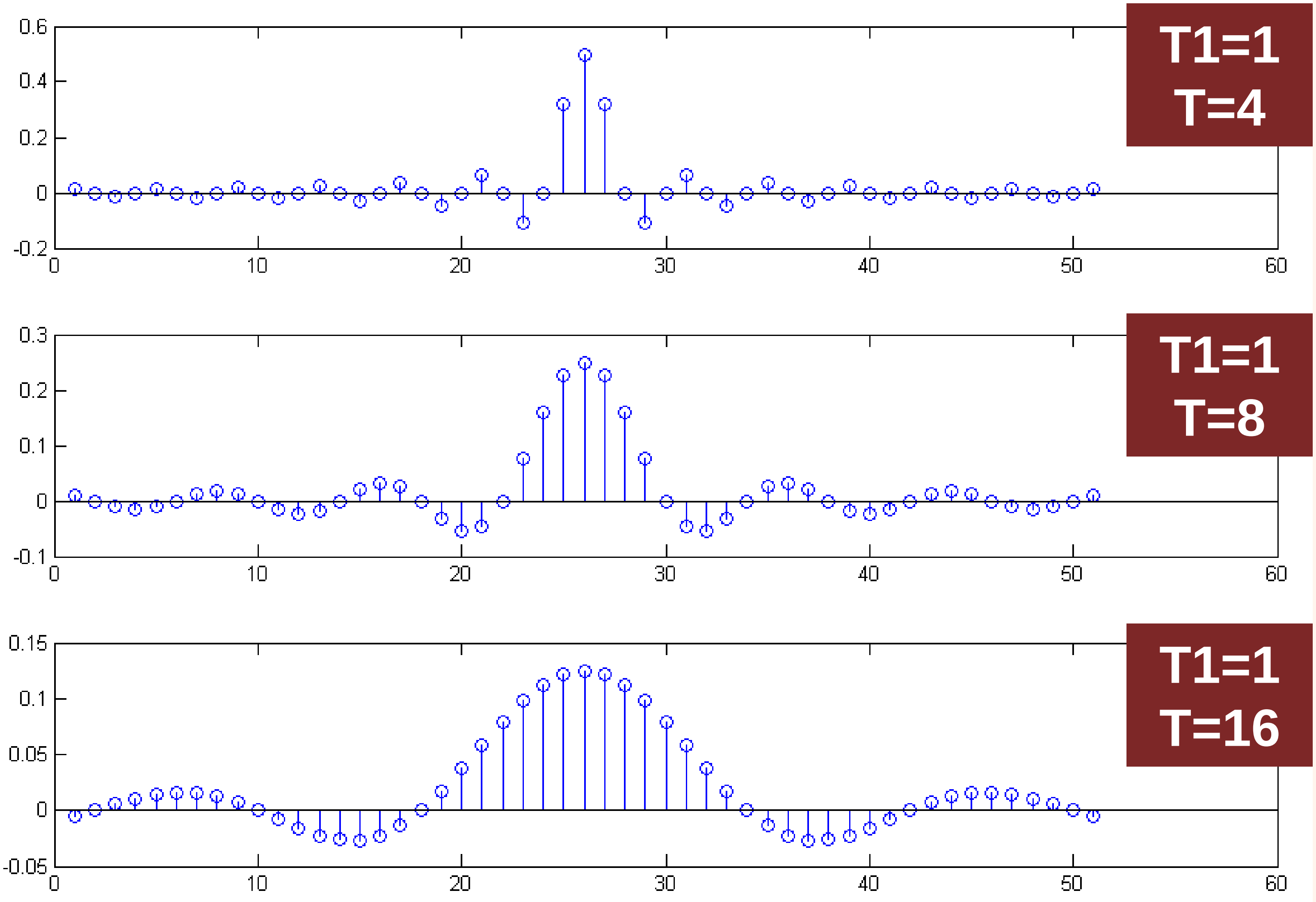
$$=\sin(k\omega_0 T_1)/k\pi$$

مثال

```
clear all;
clc;
T1=1;
T=4;
W=2*pi/T;
a0=2*T1/T;
x=[-3:0.1:3];
y=ones(size(x)).*a0;
plot(x,y);
for k=1:100
    a(k)=sin(k*W*T1)/(k*pi);
    y=y+(a(k).*(exp(j*k*W*x)+exp(-j*k*W*x)));
    plot(x,y);
    pause;
end
```



مثال (ادامه...)



همگرایی سری فوریه

$$\boxed{a_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt}$$

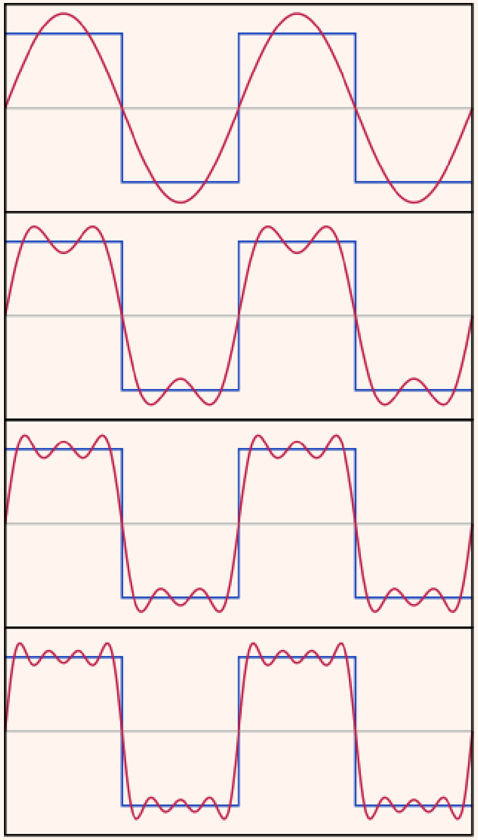
$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$E_N = \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \int_{T_0} e_N(t)e_N^*(t)dt$$

$$\int_0^T |x(t)|dt < \infty$$

$$|a_k| < \infty$$



شرایط Dirichlet

شرایط کافی برای موجود بودن ضرایب سری فوریه

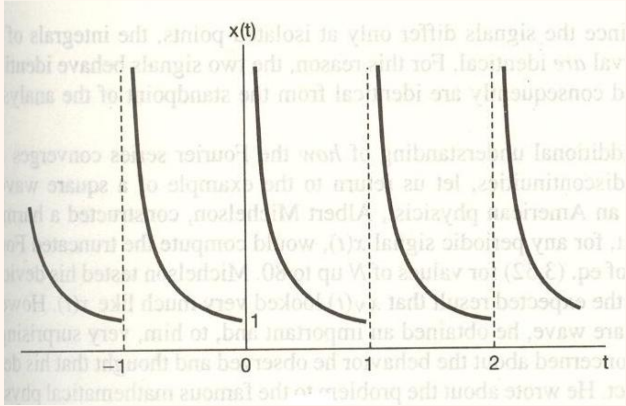
- x(t) به طور مطلق در یک دوره انتگرال‌پذیر باشد.

$$\left|a_k\right| \le \frac{1}{T_0}\int_0^T \left|x(t)e^{-jk\omega_0 t}\right|dt < \frac{1}{T_0}\int_0^T \left|x(t)\right|dt$$

$$\frac{1}{T_0}\int_0^T \left|x(t)\right|dt < \infty \qquad\qquad \left|a_k\right| < \infty$$

- مثال:

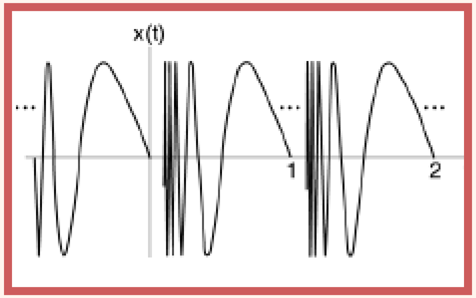
$$x(t) = \frac{1}{t}, \qquad 0<t \le 1$$



شرایط Dirichlet (ادامه...)

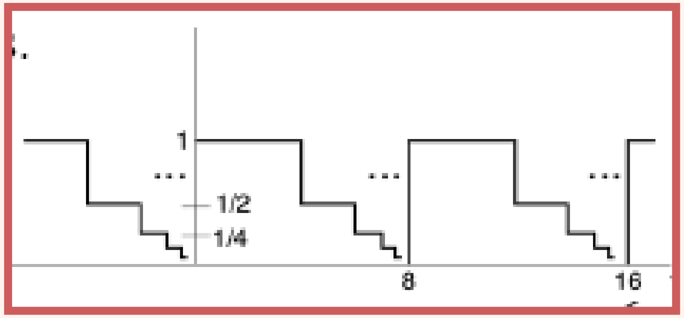
شرایط کافی برای موجود بودن ضرایب سری فوریه

- x(t) به طور مطلق در یک دوره، تعداد محدودی نقاط مینیمم و ماکزیمم داشته باشد.



$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t < 1$$

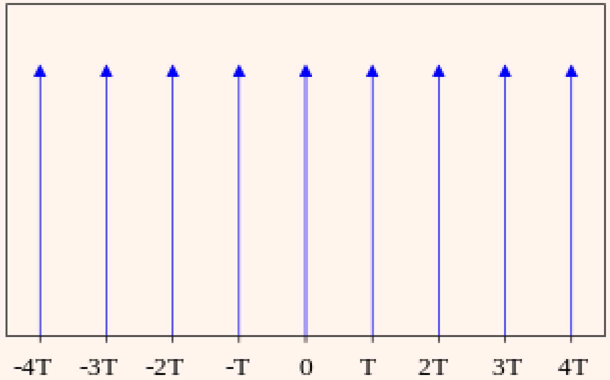
- در یک دوره‌ی تناوب تعداد نقاط گسستگی محدودی داشته باشد.



یک مثال مهم

از این تابع برای نمونه‌برداری استفاده می‌شود

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \qquad \text{for all k!}$$

$$x(t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-N}^{N} e^{jk\omega_0 t}$$

همه‌ی مؤلفه‌های دارای فاز و اندازه‌ی یکسانی هستند

برخی خواص سری فوریه‌ی پیوسته

- خطی بودن:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathbb{FS}} a_k \qquad y(t) \xleftrightarrow{\mathbb{FS}} b_k$$

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{\mathbb{FS}} c_k = Aa_k + Bb_k$$

- شیفت زمانی:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathbb{FS}} a_k$$

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathbb{FS}} a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$

برخی خواص سری فوریه‌ی پیوسته(ادامه...)

- قرینه کردن نسبت به محور زمان:

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathbb{FS}} a_k \qquad x(-t) \xleftrightarrow{\mathbb{FS}} a_{-k}$$

- اگر سیگنال زوج باشد:

$$x(t) = x(-t) \quad \Rightarrow a_k = a_{-k}$$

- اگر سیگنال فرد باشد:

$$x(t) = -x(-t) \quad \Rightarrow a_k = -a_{-k}$$

مثال

- شیفت به اندازه‌ی نیم‌پریود

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$x\left(t-\frac{T}{2}\right) \xleftrightarrow{FS} a_k e^{-jk\omega_0 \frac{T}{2}} = a_k e^{-jk\pi}$$

$$x\left(t-\frac{T}{2}\right) \xleftrightarrow{FS} (-1)^k a_k$$

برخی خواص سری فوریه‌ی پیوسته(ادامه...)

- ضرایب سری فوریه مزدوج:

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k \qquad x^*(t) \xleftrightarrow{FS} a^*_{-k}$$

- اگر سیگنال حقیقی باشد:

$$\boldsymbol{x(t) = x^*(t) \Rightarrow a^*_{-k} = a_k \quad \text{or} \quad a^*_k = a_{-k}}$$

$$a_k = \mathrm{Re}\{a_k\} + j\,\mathrm{Im}\{a_k\} = |a_k| e^{j\angle a_k}$$

$$\boldsymbol{x(t) = x^*(t) \Rightarrow |a_k| = |a_{-k}| \quad \measuredangle a_{-k} = -\measuredangle a_k}$$

زوج است

فرد است

برخی خواص سری فوریه‌ی پیوسته(ادامه...)

$x(t)$ حقیقی و زوج $\Rightarrow$ a_k حقیقی و زوج

$x(t)$ حقیقی و فرد $\Rightarrow$ a_k موهومی و فرد

$Ev\{x(t)\}$ **[x(t) real]** $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\{a_k\}$

$Od\{x(t)\}$ **[x(t) real]** $\Rightarrow$ $j\,\mathrm{Im}\{a_k\}$

برخی خواص سری فوریه‌ی پیوسته(ادامه...)

- مشتق:

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

$$x'(t) \xleftrightarrow{FS} (jk\omega_0)a_k$$

$$x^{(n)}(t) \xleftrightarrow{FS} (jk\omega_0)^n a_k$$

- تغییر مقیاس(Time Scaling):

$$x(t) \xleftrightarrow{FS} a_k$$

در این حالت ضرایب سری فوریه تفاوتی نمی‌کنند

ضرب

$$\boldsymbol{x(t)} \xleftrightarrow{FS} \boldsymbol{a_k} \qquad \boldsymbol{y(t)} \xleftrightarrow{FS} \boldsymbol{b_k}$$

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{FS} \boldsymbol{h_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}}$$

اثبات:

$$x(t)y(t) = \sum_l a_l e^{jl\omega_0 t} \sum_m b_m e^{jm\omega_0 t}$$

$$= \sum_l \sum_m a_k b_k e^{j(l+m)\omega_0 t}$$

$$\xrightarrow{l+m=k} \sum_k \left[\sum_l a_l b_{l-k} \right] e^{j(k)\omega_0 t}$$

اثبات رابطه‌ی ضرب

روش دوم

$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}\right]y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)e^{-j(k-n)\omega_0 t}dt\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n}$$

رابطه‌ی Parseval

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

انرژی متوسط سیگنال

انرژی هارمونیک kام

انرژی چه در دامنه‌ی فرکانس اندازه گیری شود و چه در دامنه‌ی زمان تفاوتی نخواهد داشت

مثال

راه اول

- ضرایب سری فوریه را برای سیگنال زیر محاسبه کنید:

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ -1 & 1\le t<2\end{cases}$$

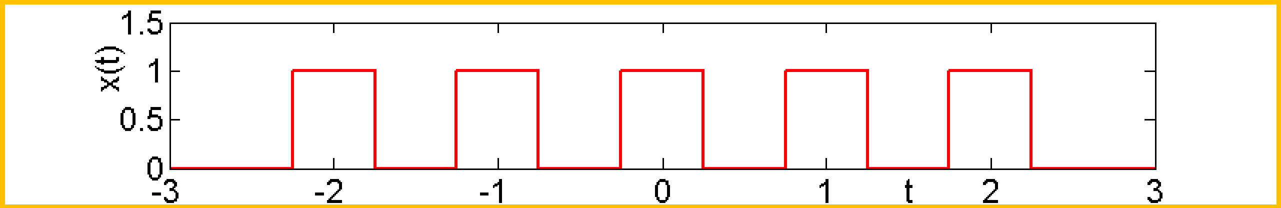
$$T_0=2$$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_0^2 x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 e^{-jk\pi t}dt-\int_1^2 e^{-jk\pi t}dt\right]$$

$$a_k=\frac{1-e^{-jk\pi}}{jk\pi}=\begin{cases}0 & k \text{ even}\\ \dfrac{2}{jk\pi} & k \text{ odd}\end{cases}$$

مثال

روش دوم



$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|<T_1\\ 0 & T_1<|t|<T/2\end{cases}\qquad a_k=\sin(k\omega_0T_1)/k\pi$$

$$x_1(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ 0 & 1\le t<2\end{cases}\qquad a_{1k}=\frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}e^{-jk\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{jk\pi},\ k\ \text{odd}$$

$$x(t)=x_1(t)-x_1(t-1)$$

$$a_k=a_{1k}\left[1-e^{-jk\pi}\right]=\begin{cases}0 & k\ \text{even}\\ 2a_{1k} & \text{k odd}\end{cases}$$

مثال

روش سوم

- ضرایب سری فوریه را برای سیگنال زیر محاسبه کنید:

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<1\\ -1 & 1\le t<2\end{cases}$$

$$T_0=2$$

$$x'(t)=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-2n\right)-2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(t-2n-1\right)$$

$$x'(t)\xleftrightarrow{\text{FS}}1-e^{jk\pi}=\begin{cases}0 & k\ \text{even}\\ 1 & k\ \text{odd}\end{cases}$$

$$x(t)\xleftrightarrow{\text{FS}}\begin{cases}0 & k\ \text{even}\\ \dfrac{1}{jk\pi} & k\ \text{odd}\end{cases}$$

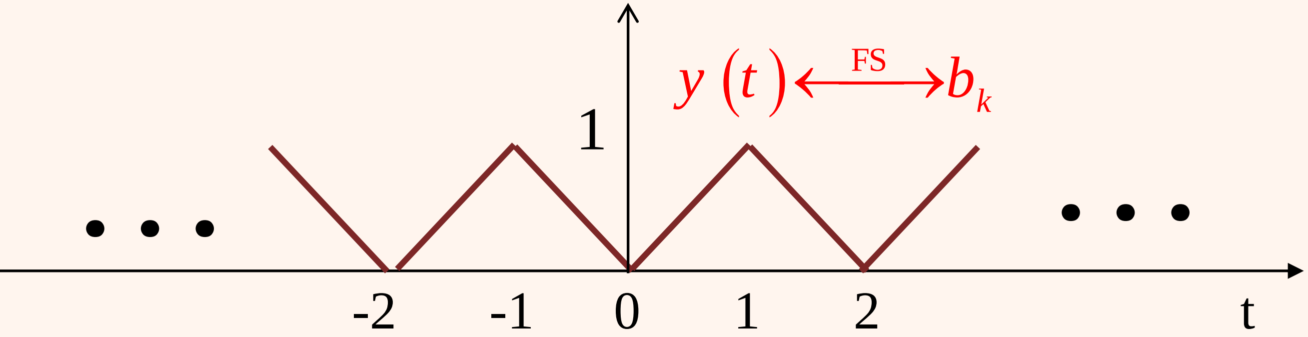
مثال

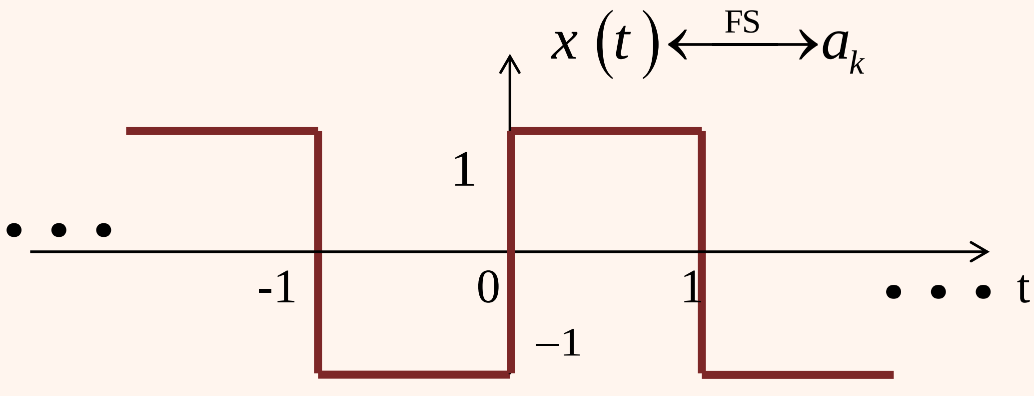
- از x(t) اطلاعات زیر در دست است:
  - حقیقی است.
  - متناوب است با T=4
  - ضرایب سری فوریه به ازای $|k|>1$ صفر است.
  - y(t) فرد است و ضرایب سری فوریه آن $b_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_{-k}$
  - داریم:

$$\frac{1}{4}\int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \pm\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

مثال



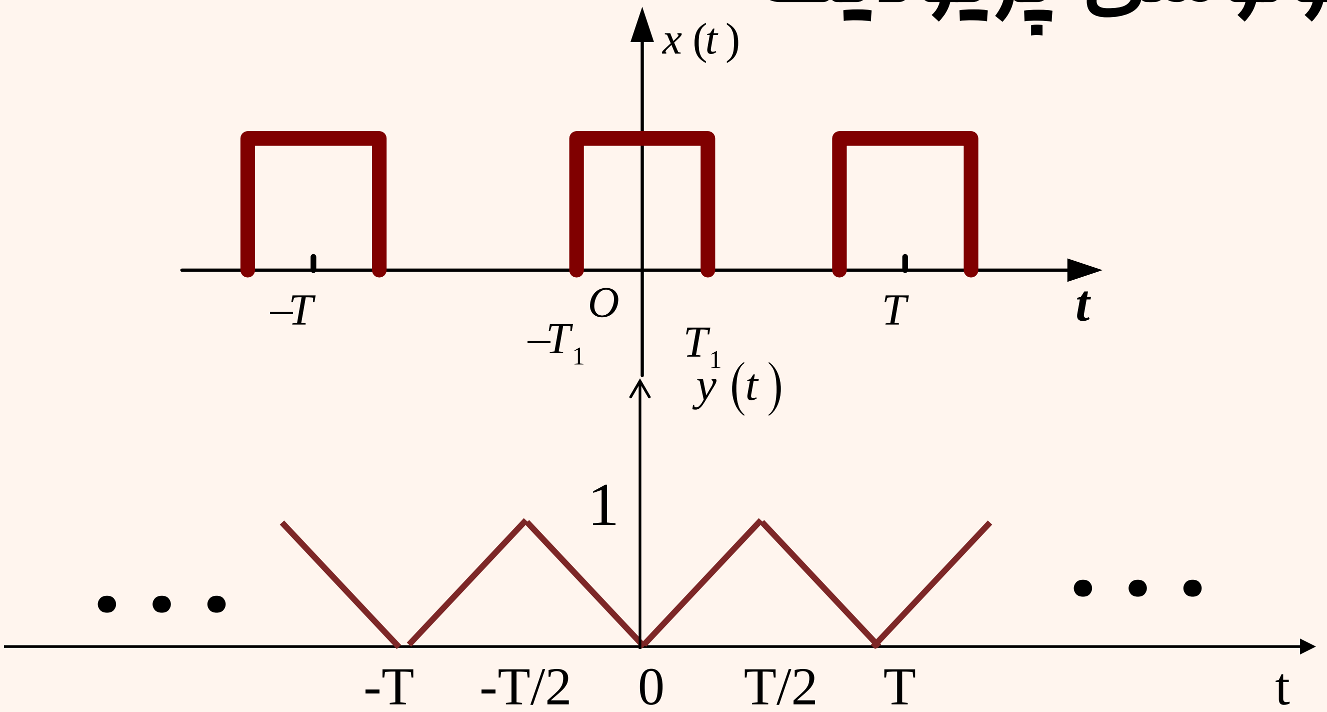


$$x(t) = \frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow a_k = jk\omega_0 b_k \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$b_k = -\frac{2a_k j}{k\pi}$$

$$b_k = \begin{cases} 0 & k \text{ even} \\ -\left(\dfrac{2}{k\pi}\right)^2 & k \text{ odd} \end{cases}$$

کانولوشن پریودیک



$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$$

اگر هر دو سیگنال مثبت باشند

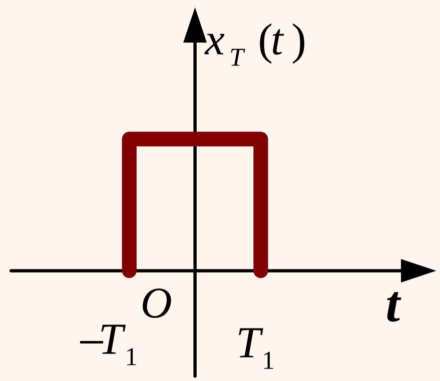
$$x(t) * y(t) = +\infty$$

کانولوشن پریودیک(ادامه...)

- در این حالت کانولوشن تنها در یک دوره از پریود گرفته می‌شود.

$$z(t)=\int_{-T/2}^{T/2}x(\tau)y(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x_T(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

$$x_T(t)=\begin{cases}x(t) & -T/2<t<T/2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$



کانولوشن پریودیک(ادامه...)

سیگنال حاصل پریودیک است

$$z(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau = x(t)\otimes y(t)$$

$$\boldsymbol{x(t) \xleftrightarrow{\mathbb{FS}} a_k} \qquad \boldsymbol{y(t) \xleftrightarrow{\mathbb{FS}} b_k} \qquad \boldsymbol{z(t) \xleftrightarrow{\mathbb{FS}} c_k}$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_T z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T\left(\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \int_T\left(\frac{1}{T}\int_T y(t-\tau)e^{-jk\omega_0(t-\tau)}dt\right)x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

$$= \int_T b_k x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

$$= Ta_k b_k$$

سری فوریه زمان‌گسسته

- $x[n]$ سیگنالی زمان گسسته‌ی متناوب است:

$$x[n+N]=x[n] \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{N}$$

- در سری فوریه تنها $e^{j\omega n}$ که دارای تناوب N هستند، ظاهر می‌شوند.

$$\omega N=k2\pi \leftrightarrow \omega=k\omega_0,\, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

- می‌دانیم که تنها N سیگنال این‌چنینی وجود دارد.

$$e^{j(k+N)\omega_0 n}=e^{jk\omega_0 n}e^{j\overbrace{N\omega_0 n}^{2\pi n}}=e^{jk\omega_0 n}$$

سری فوریه زمان‌گسسته (ادامه...)

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$x[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}\rightarrow \sum_{k=<N>} a_k H\left(e^{jk\omega_0}\right)e^{jk\omega_0 n}$$

به ازای چه سیگنال‌هایی وجود دارد؟

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$\Downarrow$$

$$x[0] = \sum_{k=<N>} a_k$$

$$x[1] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0}$$

$$x[2] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j2k\omega_0}$$

$$\vdots$$

$$x[N-1] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j(N-1)k\omega_0}$$

N معادله و N مجهول

محاسبه‌ی ضرایب

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & ,\alpha = 1 \\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & ,\alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\alpha = e^{jk\omega_0}$$

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{jk\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jk\omega_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jk2\pi/N}\right)^n$$

$$= \begin{cases} N & ,k = 0, \pm N, \pm 2N \\ \dfrac{1-e^{jk(2\pi/N)N}}{1-e^{jk\omega_0}} = 0 & ,otherwise \end{cases}$$

محاسبه‌ی ضرایب

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jm\omega_0 n} = \sum_{n=\langle N\rangle} \left(\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \right) e^{-jm\omega_0 n}$$

$$= \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \left(\sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(k-m)\omega_0 n} \right) = N a_k$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_{k+N} = a_k$$

مثال

- سری فوریه‌ی سیگنال زیر را محاسبه کنید:

$$x[n] = \cos(\pi n/8) + \cos(\pi n/4 + \pi/4)$$

$$N = 16 \longrightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{8}$$

$$x[n] = \frac{1}{2}\left[e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{j\pi/4}e^{j2\omega_0 n} + e^{-j\pi/4}e^{-j\omega_0 n}\right]$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{e^{j\pi/4}}{2}, \qquad a_{-2} = \frac{e^{-j\pi/4}}{2}$$

$$a_3 = a_{-3} = 0$$

مثال:

- سری فوریه‌ی سیگنال زیر را محاسبه کنید:

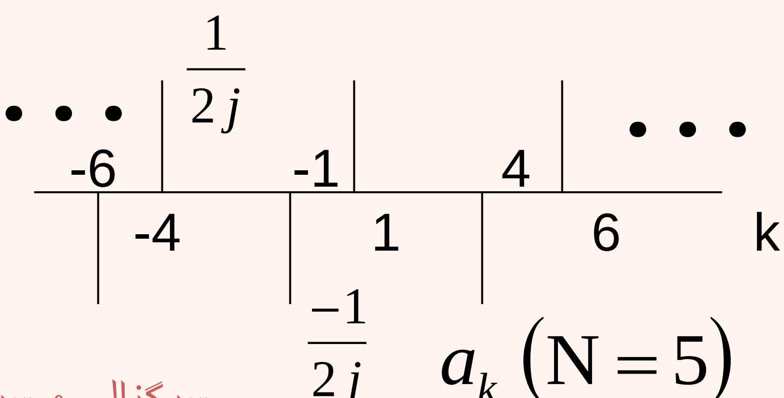
$$\boldsymbol{x[n] = \sin \omega_0 n}$$

$$\omega_0 / 2\pi = \frac{1}{N} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n}$$

$$a_1 = \frac{1}{2j}$$

$$a_{-1} = \frac{-1}{2j}$$



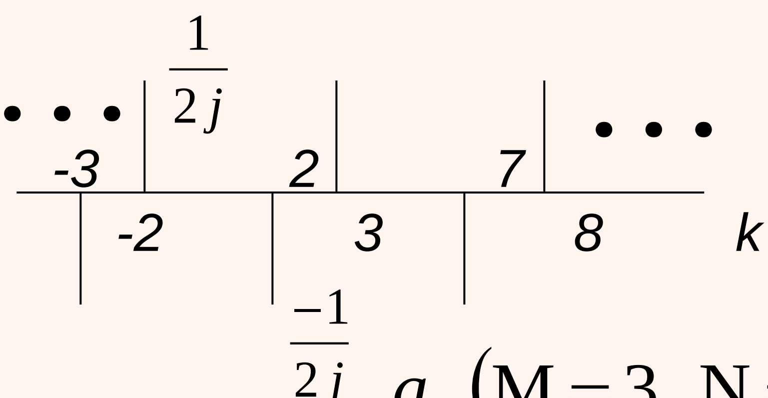
$a_k \, (\mathrm{N}=5)$

ادامه مثال:

$$\omega_0 / 2\pi = \frac{M}{N} \qquad \omega_0 = \frac{M}{N} 2\pi$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jM(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jM(2\pi/N)n}$$

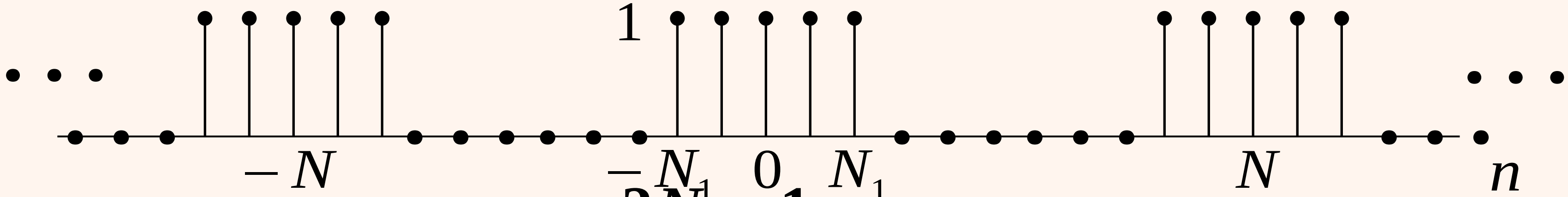
$$M = 3, \quad N = 5 \qquad a_3 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-3} = a_2 = \frac{-1}{2j}$$



$a_k \left(\mathrm{M} = 3, \mathrm{N} = 5\right)$

مثال

- سری فوریه‌ی سیگنال زیر را محاسبه کنید:

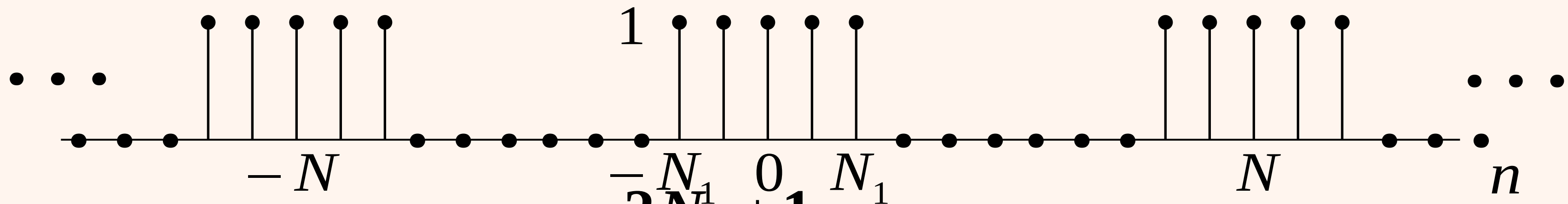


$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{+N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \begin{cases} \dfrac{2N_1+1}{N} & k = mN \\[2ex] \dfrac{1}{N}\,\dfrac{e^{-jk\frac{2\pi}{N}(-N_1)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} & k \neq mN \end{cases}$$

$$= \frac{1}{N}\,\frac{\cancel{e^{-jk\frac{\pi}{N}}}\left\{e^{jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1/2)} - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1/2)}\right\}}{\cancel{e^{-jk\frac{\pi}{N}}}\left(e^{jk\frac{\pi}{N}} - e^{-jk\frac{\pi}{N}}\right)}$$

مثال

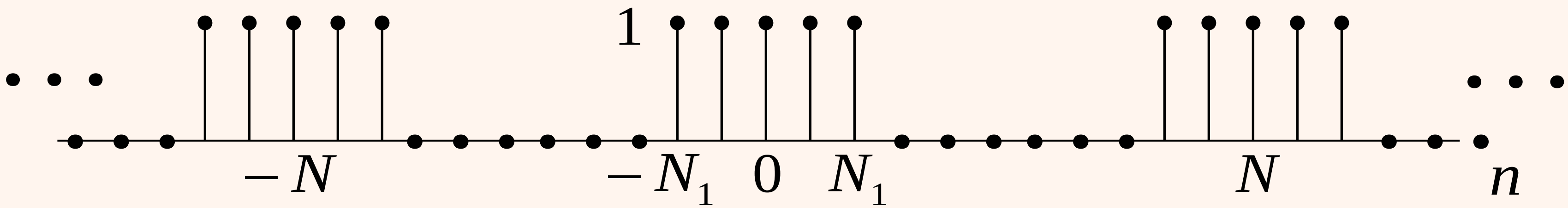
- سری فوریه‌ی سیگنال زیر را محاسبه کنید:



$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{+N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}=\begin{cases}\dfrac{2N_1+1}{N} & k=mN\\[2ex] \dfrac{1}{N}\,\dfrac{e^{-jk\frac{2\pi}{N}(-N_1)}-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1)}}{1-e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} & k\neq mN\end{cases}$$

$$=\frac{1}{N}\,\frac{\cancel{e^{-jk\frac{\pi}{N}}}\left\{e^{jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1/2)}-e^{-jk\frac{2\pi}{N}(N_1+1/2)}\right\}}{\cancel{e^{-jk\frac{\pi}{N}}}\left(e^{jk\frac{\pi}{N}}-e^{-jk\frac{\pi}{N}}\right)}$$

مثال-ادامه



$$a_k = \begin{cases} \dfrac{2N_1+1}{N} & k = mN \\[2ex] \dfrac{1}{N}\,\dfrac{\sin\left[2\pi k\left(N_1+1/2\right)/N\right]}{\sin\left(\pi k/N\right)} & k \neq mN \end{cases}$$

ویژگی‌های سری فوریه‌ی گسسته

- خواص سری فوریه‌ی گسسته دقیقا شبیه خصوصیات سری فوریه‌ی پیوسته است.

$$x(t) \leftrightarrow a_k ,\ y(t) \leftrightarrow b_k \ ; x[n] \leftrightarrow a_k ,\ y[n] \leftrightarrow b_k$$

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$$

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$$

خطی بودن

$$x(t-t_0) \leftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk2\pi t_0/T}$$

$$x[n-n_0] \leftrightarrow a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$$

شیفت در دامنه‌ی زمان

ویژگی‌های سری فوریه‌ی گسسته

شیفت در دامنه‌ی فرکانس

$$e^{jM\omega_0 t}x(t) \leftrightarrow a_{k-M} \qquad e^{jM\omega_0 t}x[n] \leftrightarrow a_{k-M}$$

قرینه کردن زمانی

$$x(-t) \text{ or } x[-n] \leftrightarrow a_{-k}$$

$$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau \leftrightarrow Ta_k b_k$$

$$\sum_{r=<N>} x[r]y[n-r] \leftrightarrow Na_k b_k$$

کانولوشن پریودیک

ویژگی‌های سری فوریه‌ی گسسته

$$x^*(t) \; or \; x^*[n] \leftrightarrow a^*_{-k}$$

$$x(t) \; or \; x[n] \; real \Rightarrow a_{-k} = a_k^*$$

$$\mathrm{Re}\{a_k\} \; is \; even, \; \mathrm{Im}\{a_k\} \; is \; odd$$

$$or \; |a_k| \; is \; even, \; \angle a_k \; is \; odd$$

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N_0-1} |a_k|^2$$

ویژگی‌های سری فوریه‌ی گسسته

Time Scaling

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & n \text{ is a multiple of } m \\ 0 & n \text{ is not a multiple of } m \end{cases}$$

$$x_{(m)}[n] \leftrightarrow \frac{1}{m} a_k$$

ویژگی‌های سری فوریه‌ی گسسته

$$x[n]-x[n-1]\leftrightarrow\left(1-e^{jk\omega_0}\right)a_k$$

تفاضل

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\leftrightarrow\left(\frac{1}{1-e^{jk\omega_0}}\right)a_k$$

مجموع

پاسخ فرکانسی

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0)a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k \rightarrow \underbrace{H(jk\omega_0)}_{\text{Gain}}a_k \qquad H(jk\omega_0)=|H(jk\omega_0)|e^{<H(jk\omega_0)}$$

شامل اندازه و فاز است

$$x[n]=\sum_{n=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \rightarrow \boxed{H[n]} \rightarrow y[n]=\sum_{n=\langle N\rangle} H(e^{jk\omega_0 n})a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k \rightarrow \underbrace{H(e^{jk\omega_0})}_{\text{Gain}}a_k \qquad H(e^{jk\omega_0})=|H(e^{jk\omega_0})|e^{<H(e^{jk\omega_0})}$$

شامل اندازه و فاز است

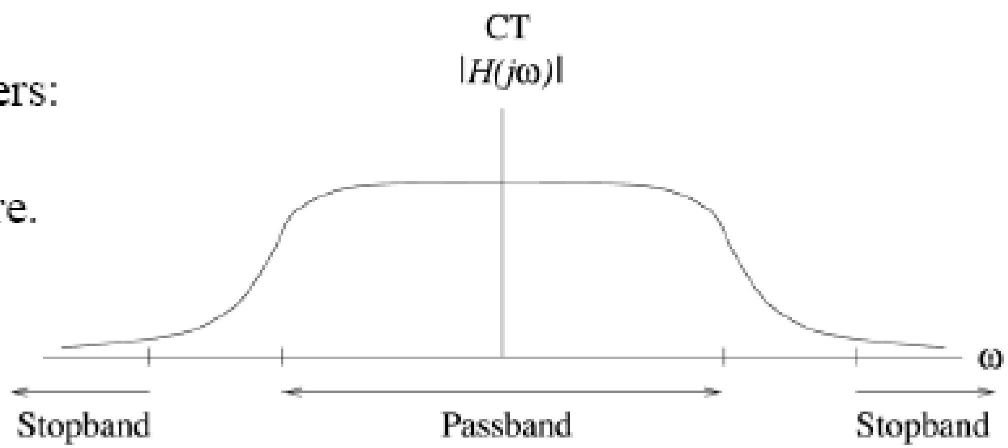
پاسخ فرکانسی (ادامه...)

- در بسیاری از کاربردها لازم است، برخی فرکانس‌ها را حذف کرده و یا اندازه‌ی آن را تغییر داد، به چنین فرآیندی «فیلتر کردن» می‌گویند.

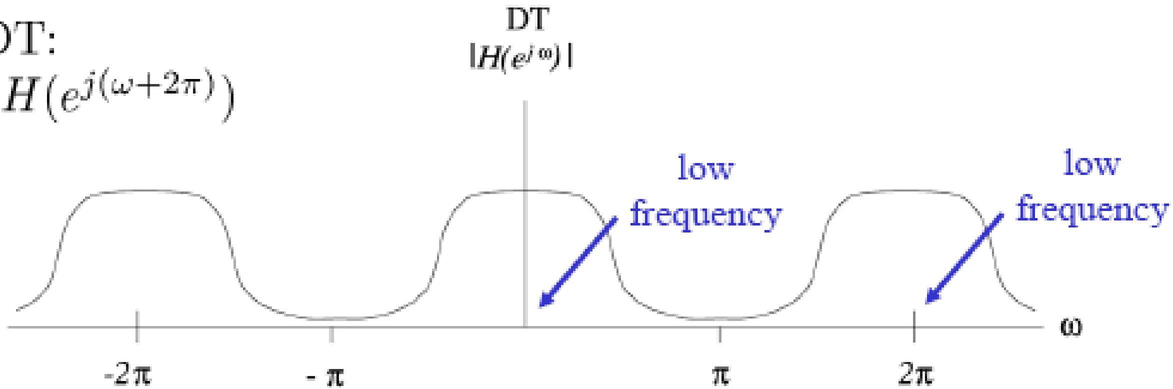
- Frequency Selective Filters
- Frequency Shaping Filters

فیلتر پایین‌گذر

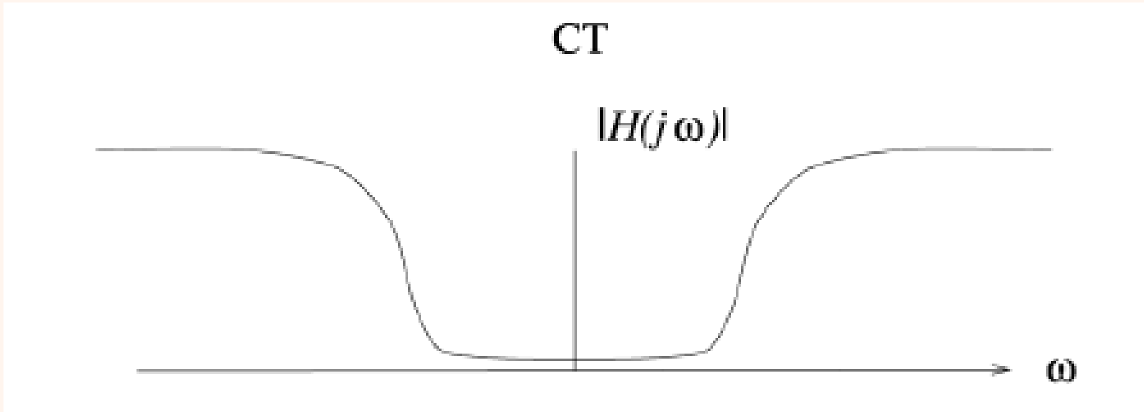
Lowpass Filters:
Only show amplitude here.

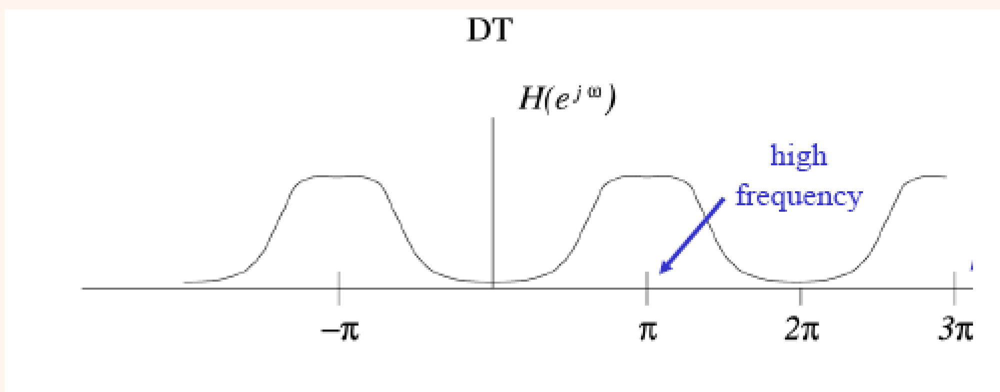


Note for DT:
$H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})$

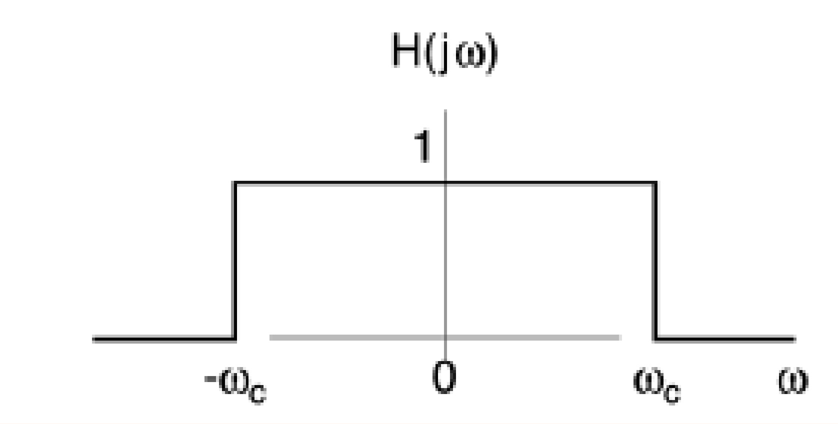


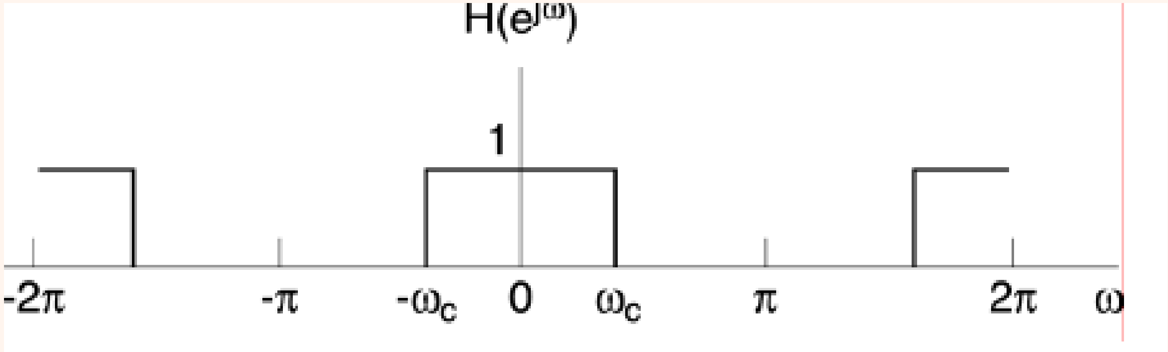
فیلتر بالاگذر





فیلتر ایده‌آل





مثال

- سیگنال x[n]، سیگنالی حقیقی و فرد است با دوره‌ی تناوب N=7

$$a_{15} = j$$

$$a_{16} = 2j$$

$$a_{17} = 3j$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = a_{15} = j \qquad a_{-1} = a_1^* = -j$$

$$a_2 = a_{16} = 2j \qquad a_{-2} = a_2^* = -2j$$

$$a_3 = a_{17} = 3j \qquad a_{-3} = a_3^* = -3j$$