سیگنال و سیستم
(تجزیه و تحلیل سیستم‌ها)
۱۳-۱۱-۱۸۰

بخش سوم

سیستم‌های LTI

LSI

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

پاییز ۱۳۹۴

احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

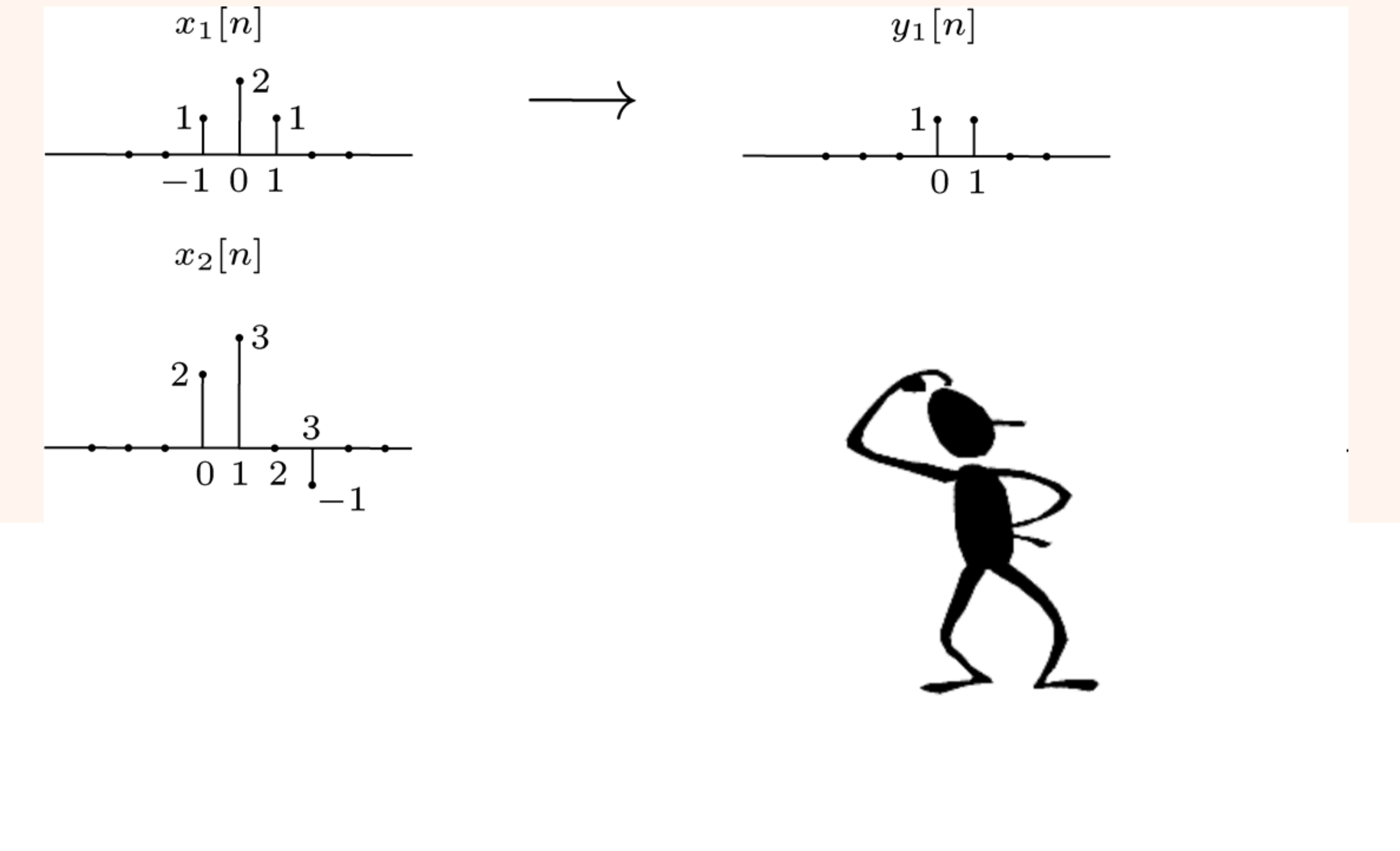
- سیستم‌های LTI
- کانولوشن
- خواص سیستم‌های LTI

پیش‌گفتار

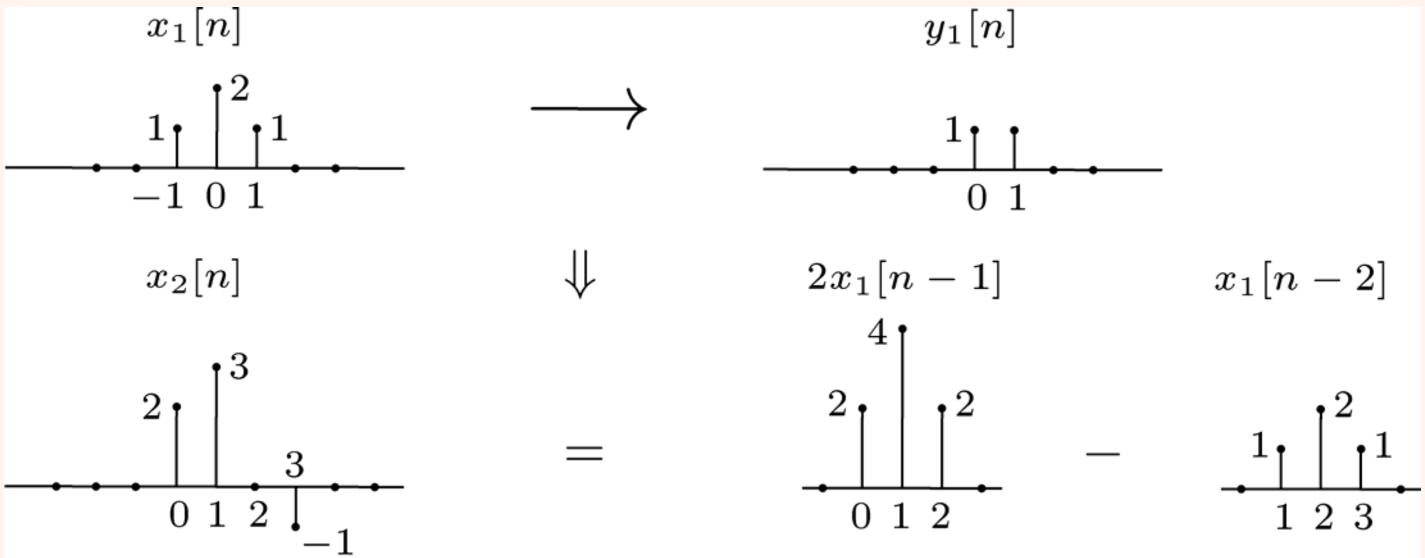
- در ادامه بر روی سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI) متمرکز خواهیم شد.
- بسیاری از سیستم‌های فیزیکی بدین صورت مدل می‌شوند.
- چنین سیستمی را می‌توان به راحتی و با دقت تحلیل کرد.

DT LTI System

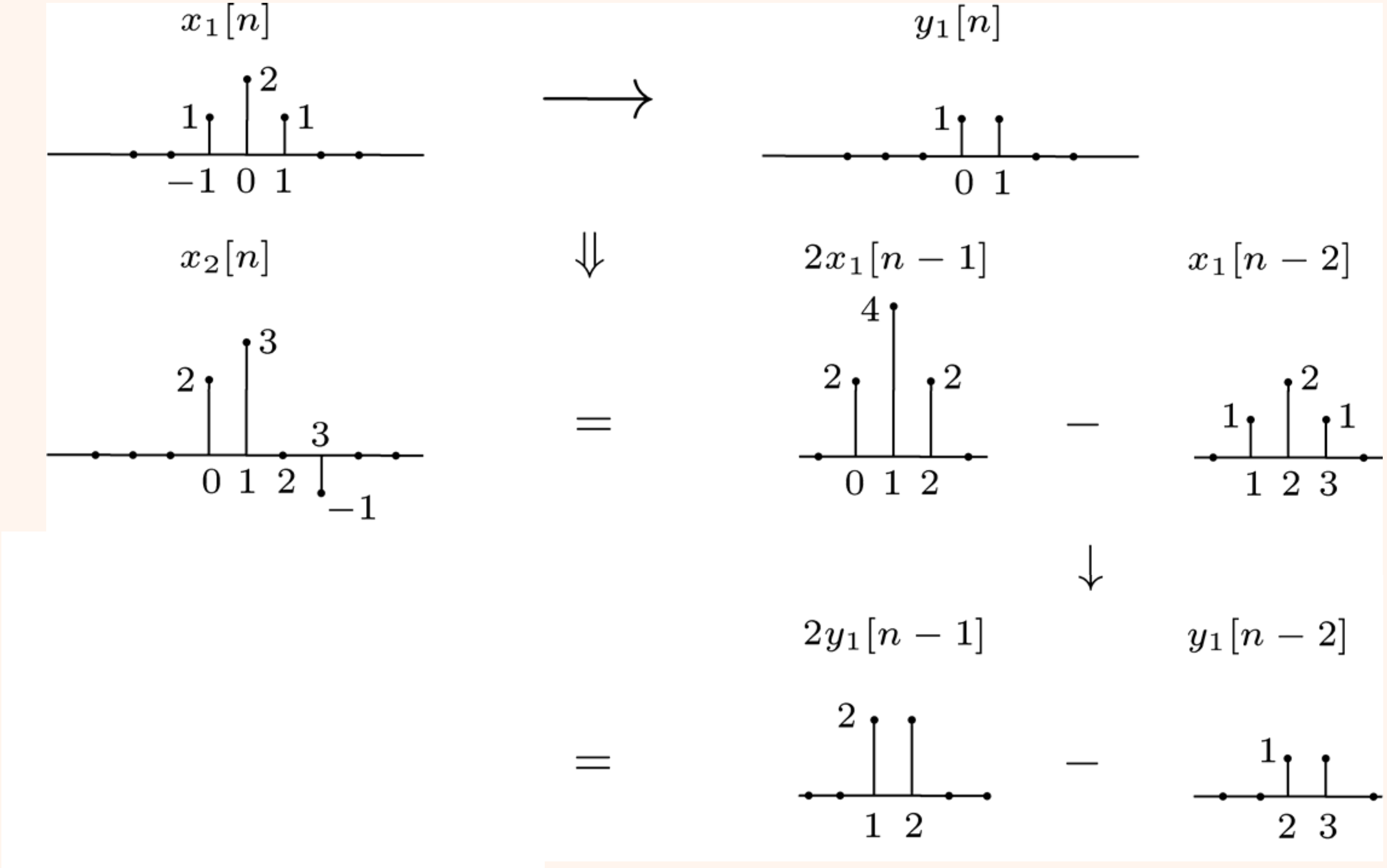
مثال



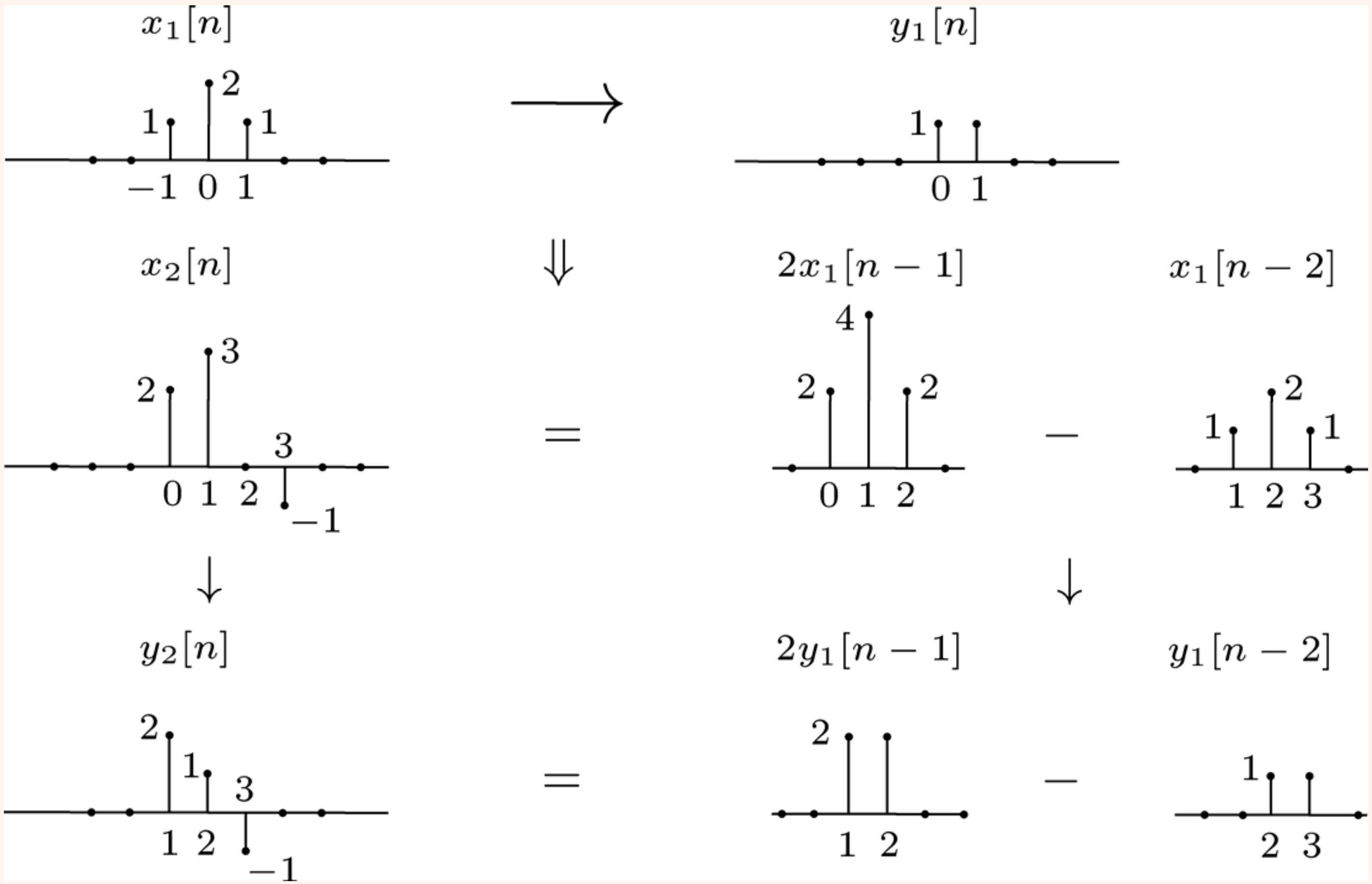
پاسخ



مثال



مثال



خواص سیستم‌های خطی

$$x_k[n] \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y_k[n]$$

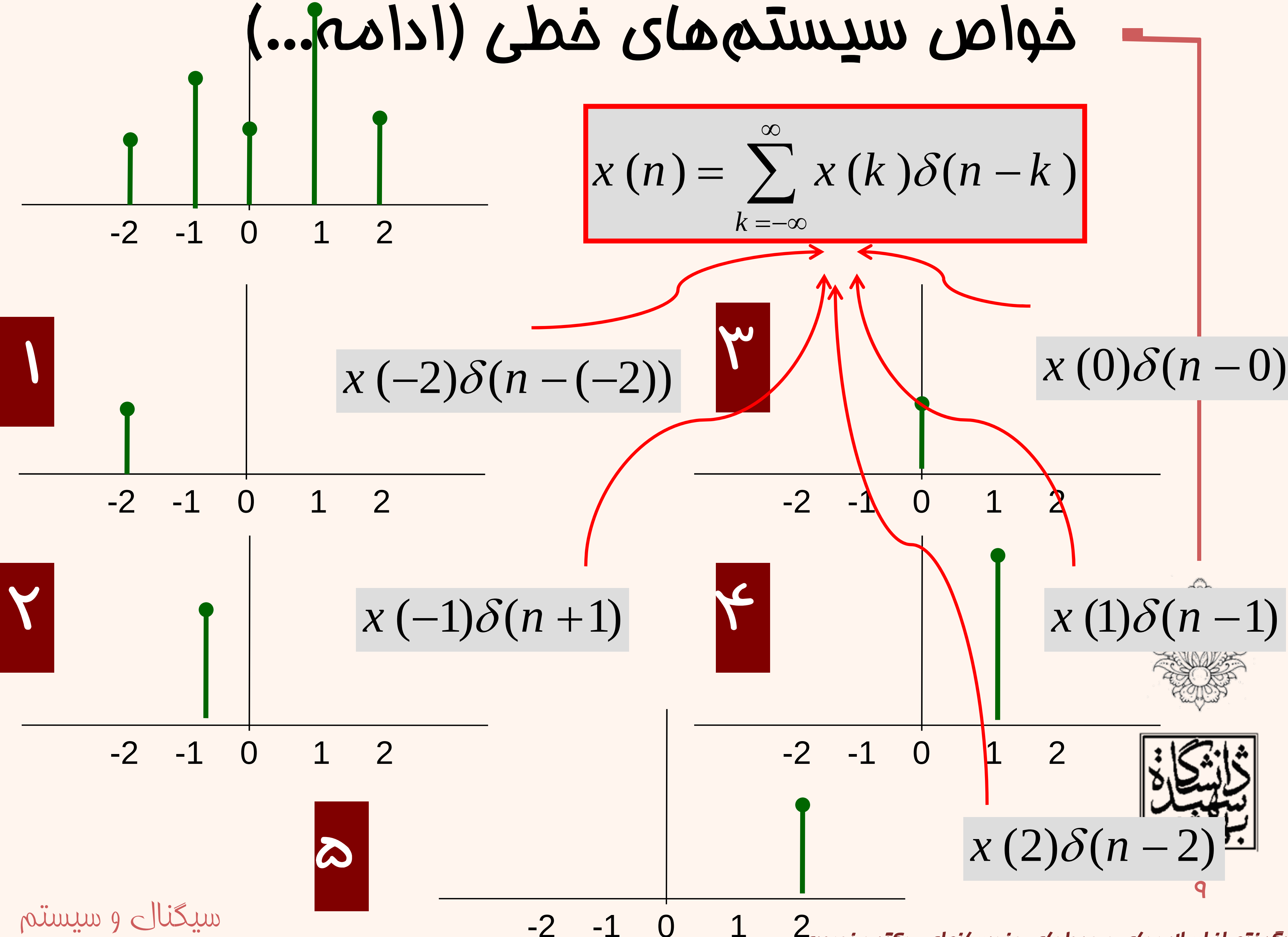
$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + \cdots$$

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + a_3 y_3[n] + \cdots$$

- در صورتی که بتوانیم یک سیگنال را بر اساس یک سری سیگنال‌های پایه بنویسیم، برای به دست آوردن پاسخ سیستم، کافیست پاسخ سیستم به سیگنال‌های پایه را محاسبه کنیم.
- برای سیگنال پایه پیشنهادی ندارید؟

خواص سیستم‌های خطی (ادامه...)

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$



خواص سیستم‌های خطی (ادامه...)

$$x[-1]\delta[n+1]=\begin{cases} x[-1] & n=-1 \\ 0 & n\neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n]=\begin{cases} x[0] & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1]=\begin{cases} x[1] & n=1 \\ 0 & n\neq 1 \end{cases}$$

درنتیجه می‌توان هر سیگنال را به صورت مجموعه‌ای از ضربه‌ها در نظر گرفت:

$$x[n]=\cdots+x[-2]\delta[n+2]+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+\cdots$$

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\boxed{x[k]}\,\boxed{\delta[n-k]}$$

سیگنال پایه

ضریب

خواص سیستم‌های خطی (ادامه...)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y[n]$$

$$\delta[n-k] \rightarrow h_k[n]$$

با توجه به خطی بودن سیستم:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h_k[n]$$

خواص سیستم‌های LTI

با فرض این که سیستم تغییرناپذیر با زمان هم هست

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{System}} \longrightarrow y[n]$$

از تغییرناپذیر بودن با زمان

$$\delta[n] \to h[n] \quad \Rightarrow \quad \delta[n-k] \to h[n-k]$$

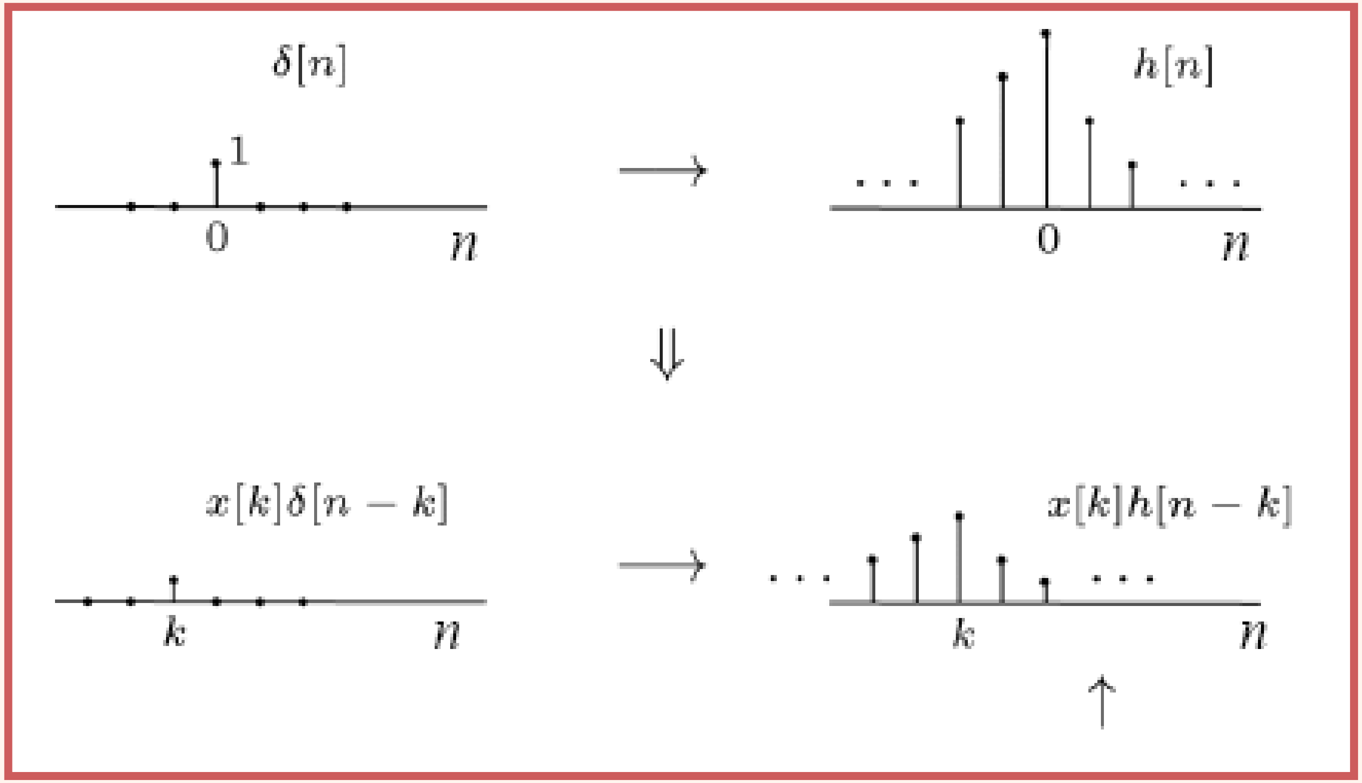
از خطی بودن

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] \quad \Rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$

Convolution Sum

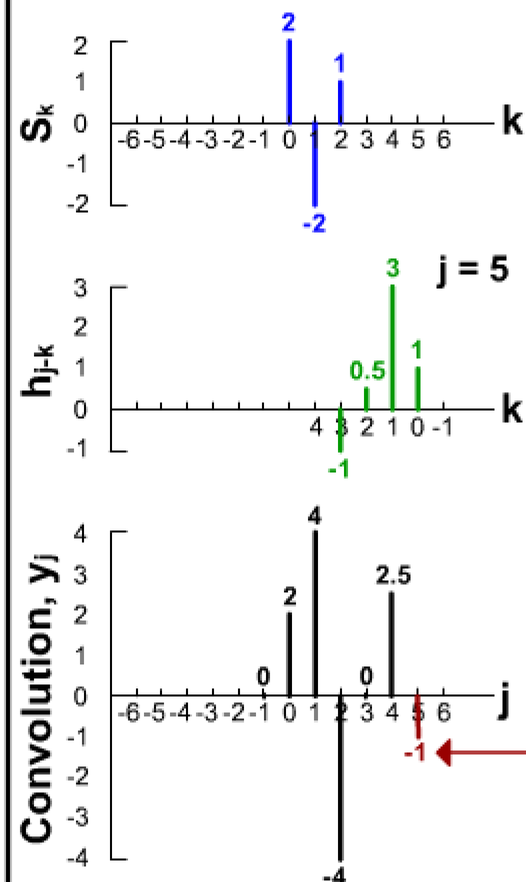
جمع کانولوشن در سیستم‌های LTI

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,h[n-k]$$



مثال

Convolution Animation (discrete)



$$y_5 = \sum_k S_k h_{5-k}$$

= 0 2 -2 1 0 0 0 0 *

-1 0.5 3 1 =

(0 x -1) + (0 x 0.5) + (0 x 3) + (0 x 1) = 0

(0 x -1) + (0 x 0.5) + (0 x 3) + (2 x 1) = 2

(0 x -1) + (0 x 0.5) + (2 x 3) + (-2 x 1) = 4

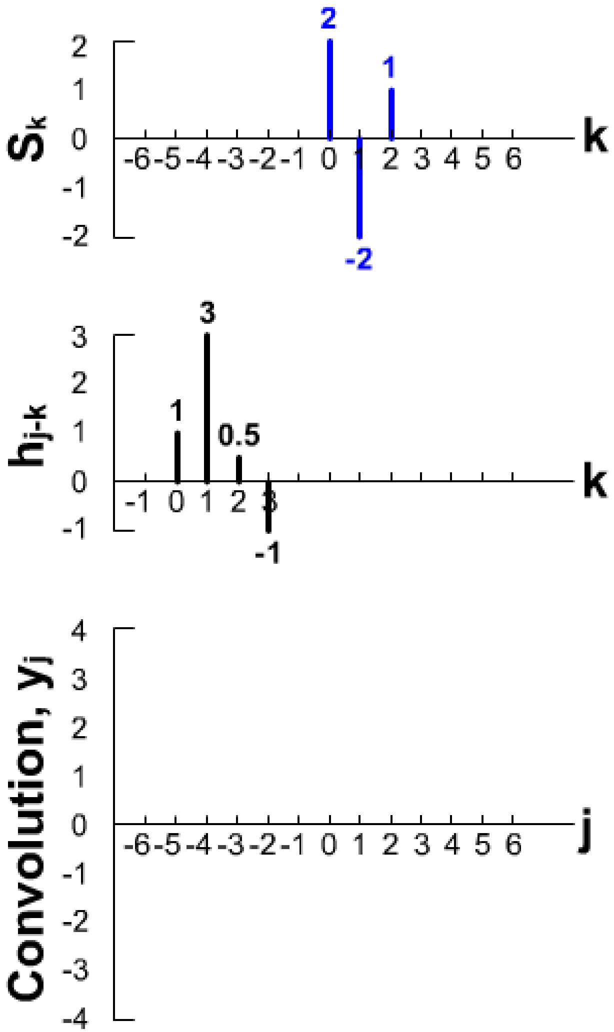
(0 x -1) + (2 x 0.5) + (-2 x 3) + (1 x 1) = -4

(2 x -1) + (-2 x 0.5) + (1 x 3) + (0 x 1) = 0

(-2 x -1) + (1 x 0.5) + (0 x 3) + (0 x 1) = 2.5

(1 x -1) + (0 x 0.5) + (0 x 3) + (0 x 1) = -1

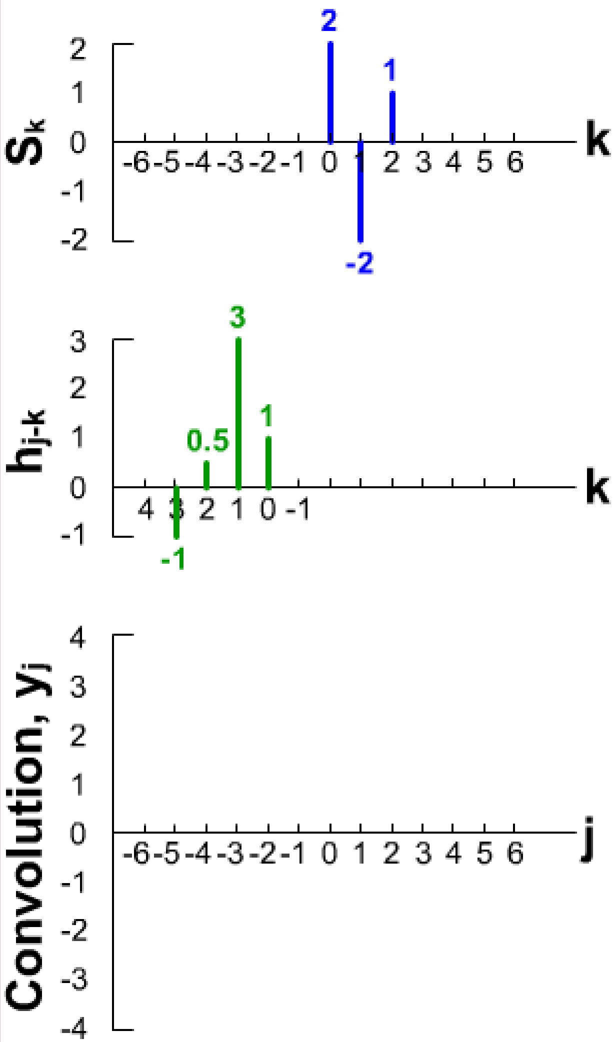
مثال



$$y_j = \sum_k S_k h_{j-k}$$

$= 0 \;\; 2 \;\; -2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; *$

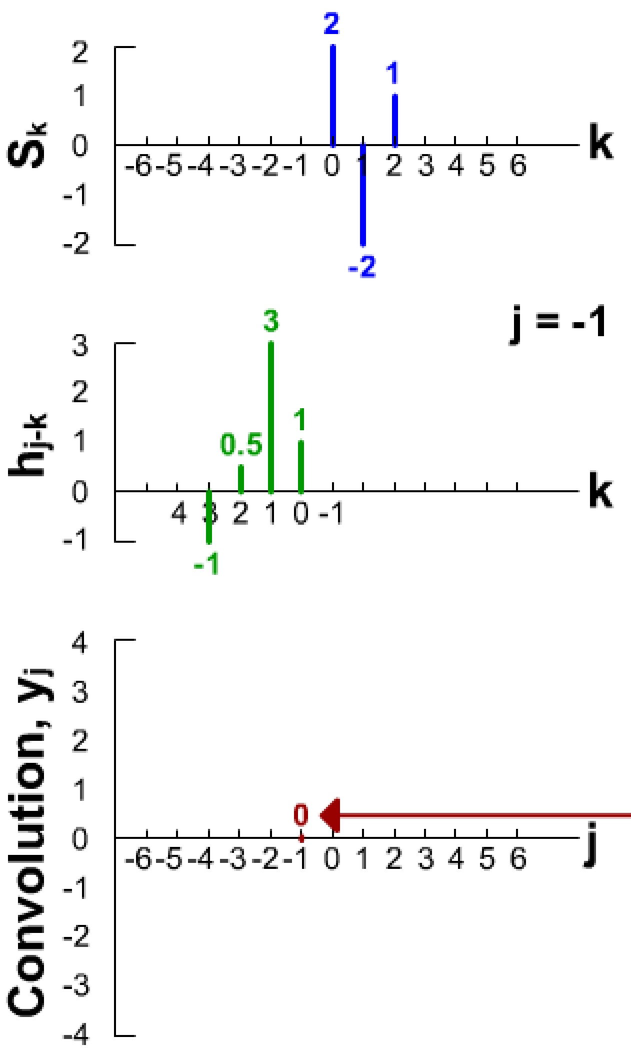
$1 \;\; 3 \;\; 0.5 \;\; -1$



$$y_j = \sum_k S_k h_{j-k}$$

$$= 0 \;\; 2 \;\; -2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; *$$

$$-1 \;\; 0.5 \;\; 3 \;\; 1$$

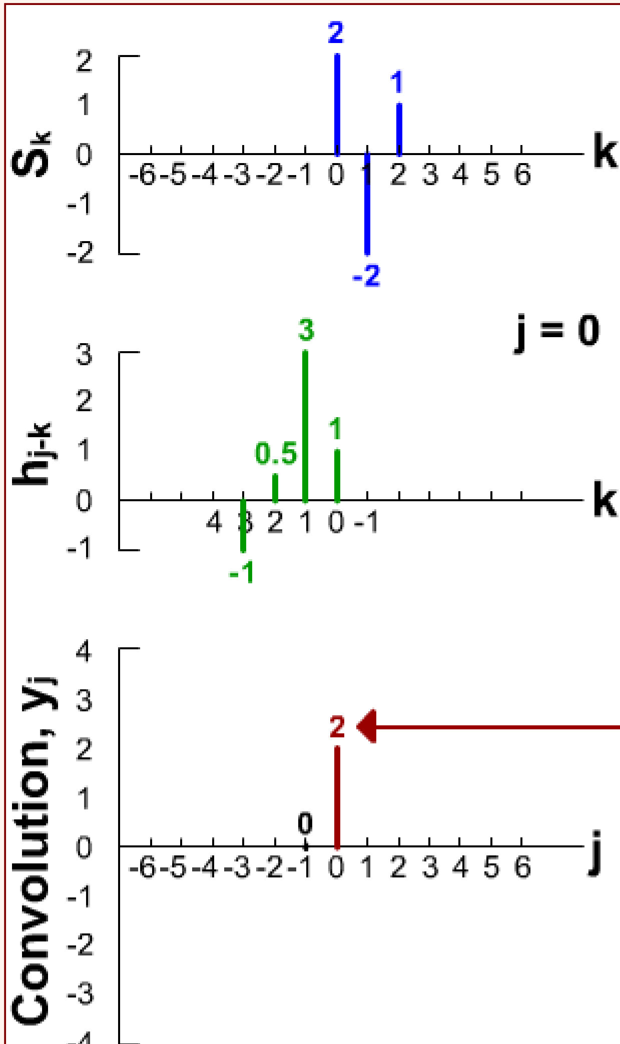


$$y_{-1} = \sum_k S_k h_{-1-k}$$

$$= 0 \;\; 2 \;\; -2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; *$$

$$-1 \;\; 0.5 \;\; 3 \;\; 1 =$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$



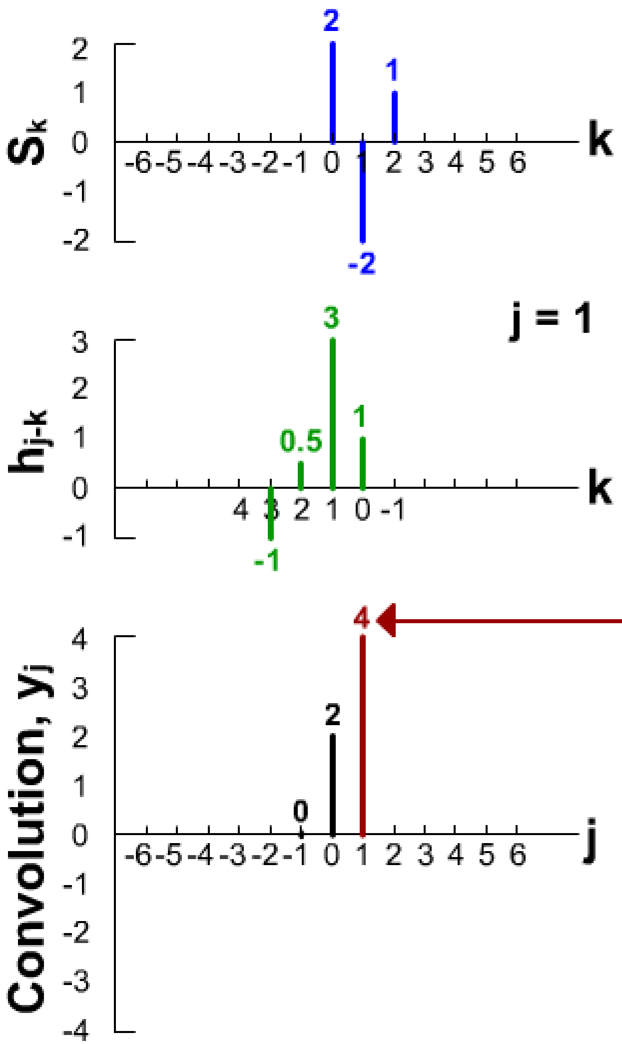
$$y_0 = \sum_k S_k h_{0-k}$$

$$= 0\quad 2\quad -2\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad *$$

$$-1\quad 0.5\quad 3\quad 1\quad =$$

(0 x -1) + (0 x 0.5) + (0 x 3) + (0 x 1) = 0

(0 x -1) + (0 x 0.5) + (0 x 3) + (2 x 1) = 2



$$y_1 = \sum_k S_k h_{1-k}$$

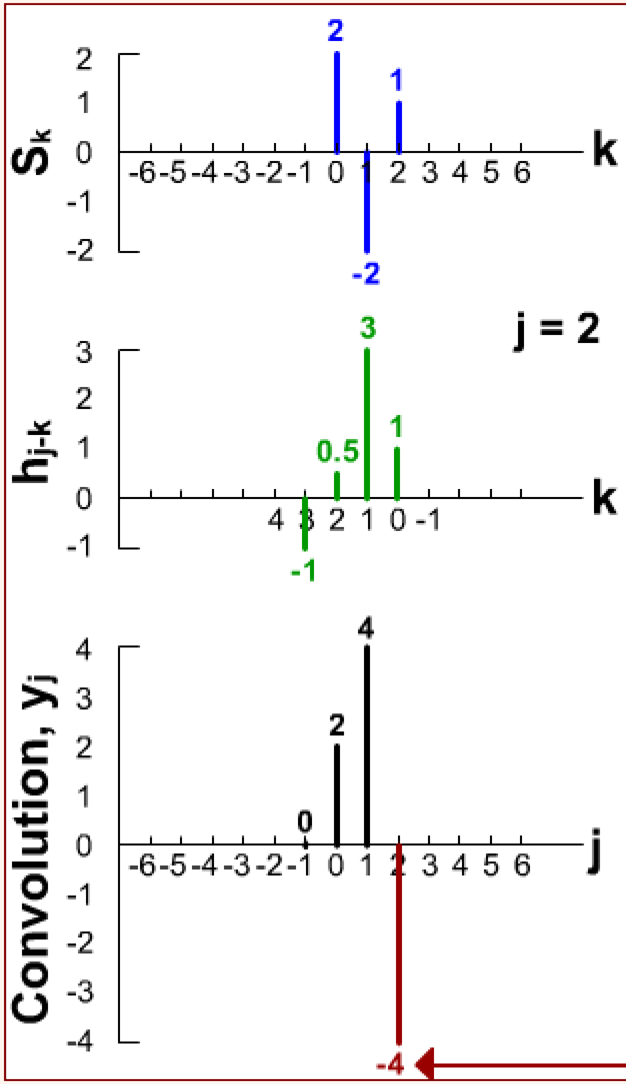
$$= 0 \;\; 2 \;\; -2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; *$$

$$-1 \;\; 0.5 \;\; 3 \;\; 1 =$$

$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$

$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 2$

$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (2 \times 3) + (-2 \times 1) = 4$



$$y_2 = \sum_k S_k h_{2-k}$$

$$= 0 \;\; 2 \;\; -2 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; *$$

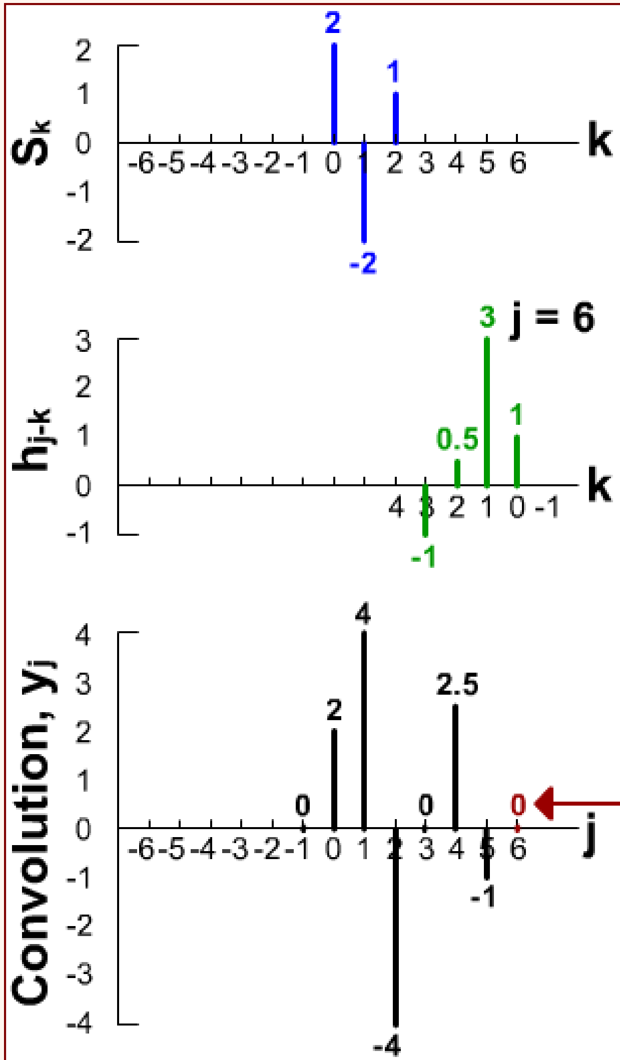
$$-1 \;\; 0.5 \;\; 3 \;\; 1 \; =$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (0 \times 1) = 0$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (0 \times 3) + (2 \times 1) = 2$$

$$(0 \times -1) + (0 \times 0.5) + (2 \times 3) + (-2 \times 1) = 4$$

$$(0 \times -1) + (2 \times 0.5) + (-2 \times 3) + (1 \times 1) = -4$$



$$y_6 = \sum_k S_k h_{6-k}$$

$$= 0\ \ 2\ \ -2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ *$$
$$-1\ \ 0.5\ \ 3\ \ 1\ \ =$$

(0 x -1) + (0 x 0.5) + (0 x 3) + (0 x 1) = 0

(0 x -1) + (0 x 0.5) + (0 x 3) + (2 x 1) = 2

(0 x -1) + (0 x 0.5) + (2 x 3) + (-2 x 1) = 4

(0 x -1) + (2 x 0.5) + (-2 x 3) + (1 x 1) = -4

(2 x -1) + (-2 x 0.5) + (1 x 3) + (0 x 1) = 0

(-2 x -1) + (1 x 0.5) + (0 x 3) + (0 x 1) = 2.5

(1 x -1) + (0 x 0.5) + (0 x 3) + (0 x 1) = -1

(0 x -1) + (0 x 0.5) + (0 x 3) + (0 x 1) = 0

خواص کانولوشن گسسته

- یک سیستم DT LTI به طور کامل با پاسخ ضربه‌ی آن شناخته می‌شود.
- مثال:

$$x[n]*\delta[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\,\delta[n-k]=x[n]$$

  - مثال:

$$h[n]=\delta[n-n_0]$$

  - تنها یک سیستم با این پاسخ ضربه وجود دارد.

$$y[n]=\delta[n-n_0]*x[n]$$

$$y[n]=x[n-n_0]$$

مثال

- پاسخ ضربه‌ی سیستم زیر را به دست آورید:

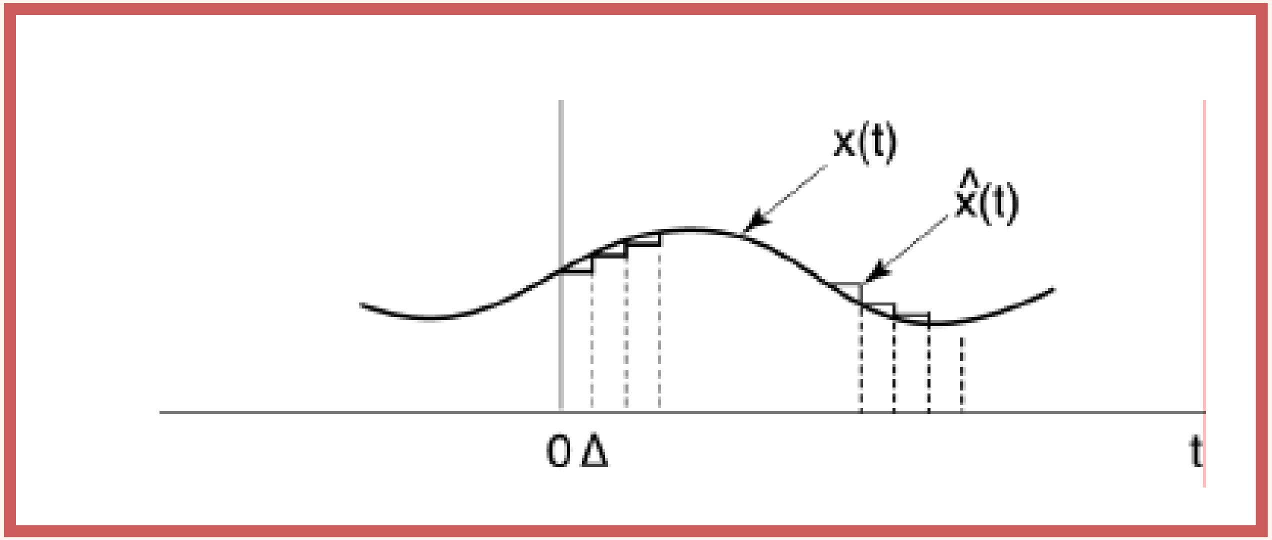
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]=u[n]$$

$$x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

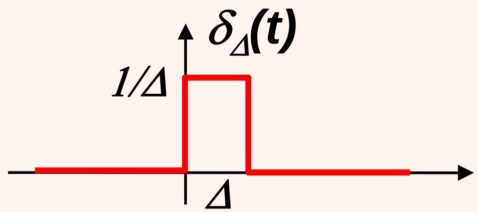
نمایش سیگنال‌های پیوسته

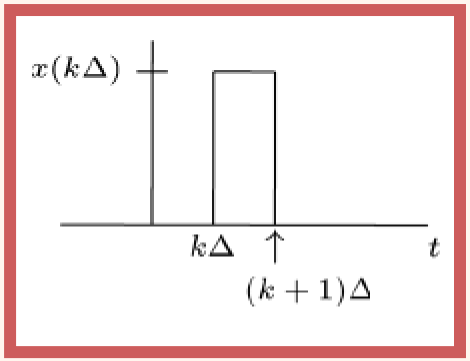
- می‌توان هر سیگنال پیوسته را به صورت مجموع وزن‌دهی شده یک سری پالس در نظر گرفت.



$$\hat{x}(t) = x(k\Delta), \quad k\Delta < t < (k+1)\Delta$$

نمایش سیگنال‌های پیوسته



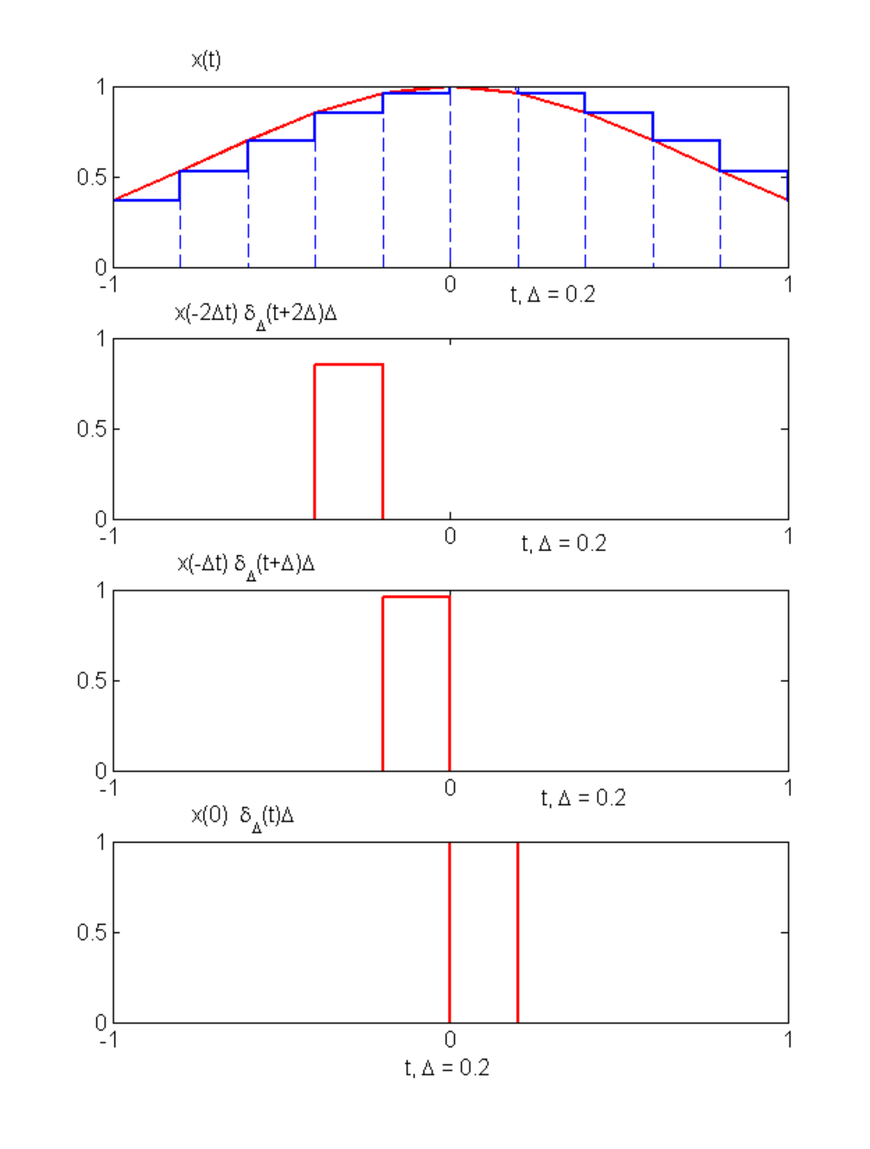


$$= x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta$$

$$\hat{x}(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_{\Delta}(t-k\Delta)\Delta$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\hat{x}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

نمایش سیگنال‌های پیوسته



پاسخ یک سیستم CT LTI

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{CT LTI}} \longrightarrow y(t)$$

$$\delta_\Delta(t) \longrightarrow h_\Delta(t)$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \quad \Rightarrow \quad \hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$$

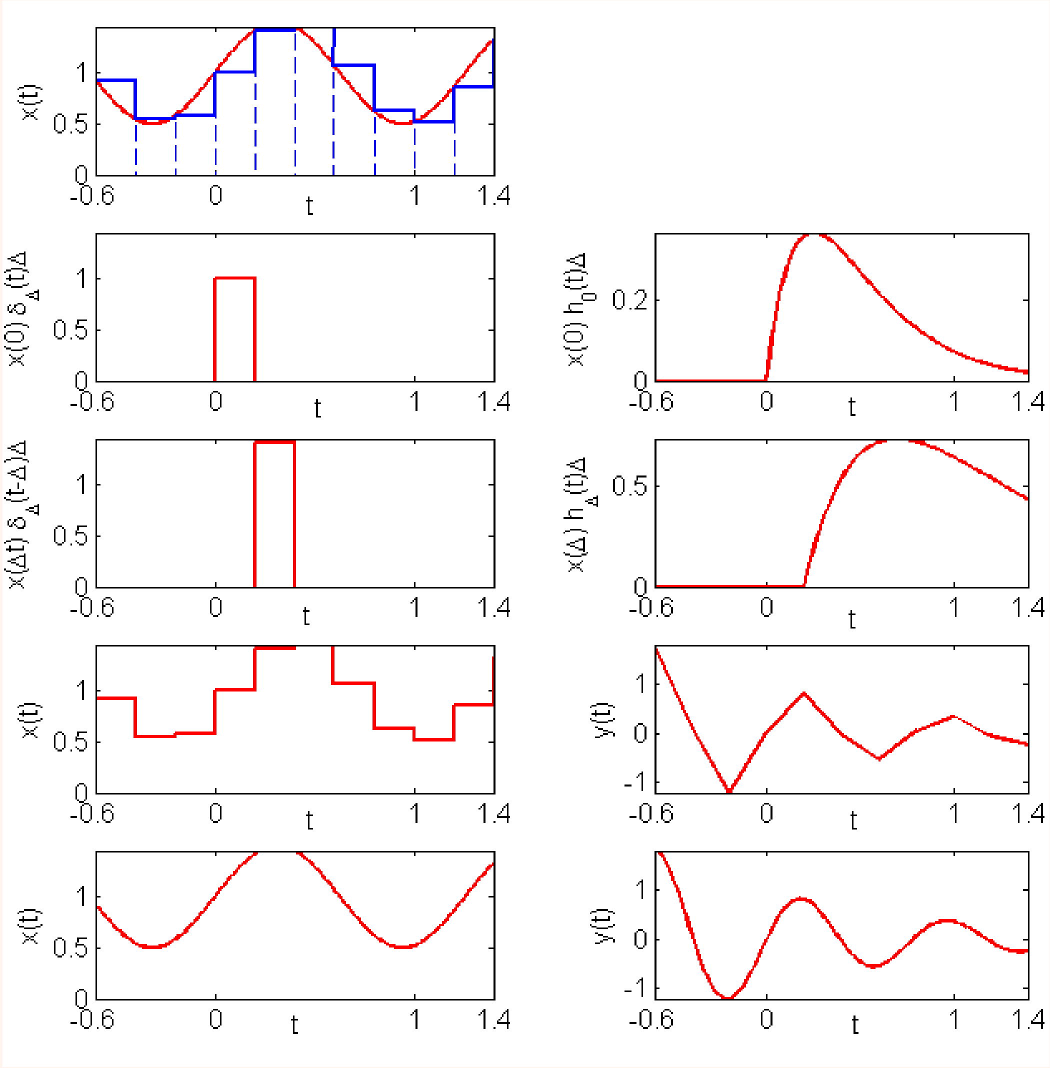
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\delta(t) \longrightarrow h(t)}$$

$$y(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

پاسخ سیستم به سیگنال زمان‌پیوسته



پاسخ یک سیستم CT LTI

$$\delta_\Delta(t) \longrightarrow h_\Delta(t)$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \quad \Rightarrow \quad \hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_{k\Delta}(t)\Delta$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\delta(t) \longrightarrow h(t)}$$

$$y(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta$$

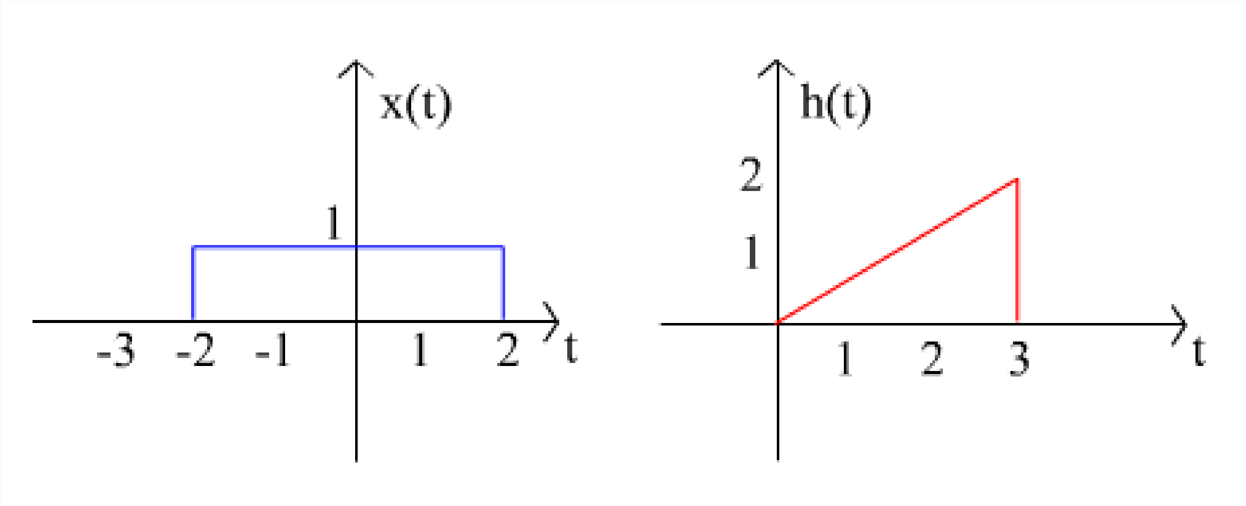
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

کانولوشن زمان‌پیوسته

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

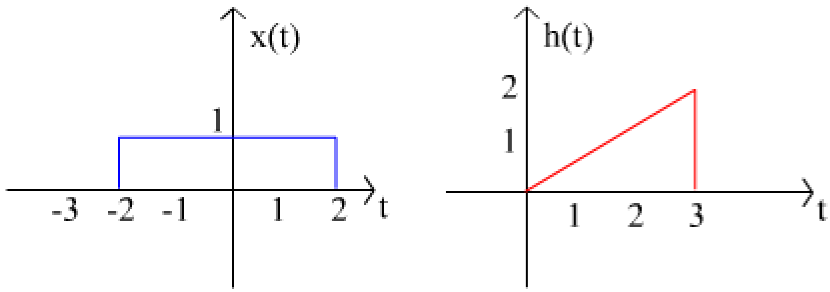
Convolution integral

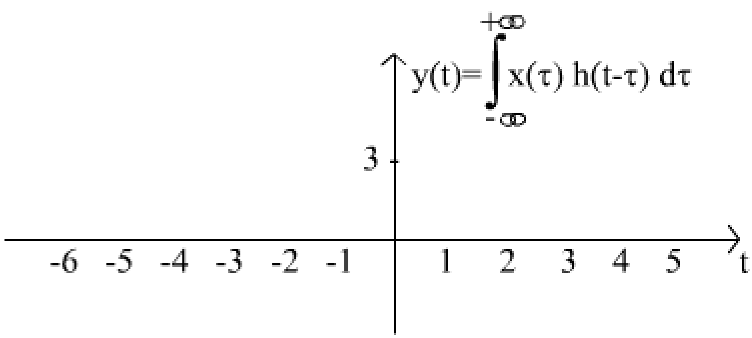
مثال: پاسخ سیستم به ورودی x(t) را حساب کنید:



مثال

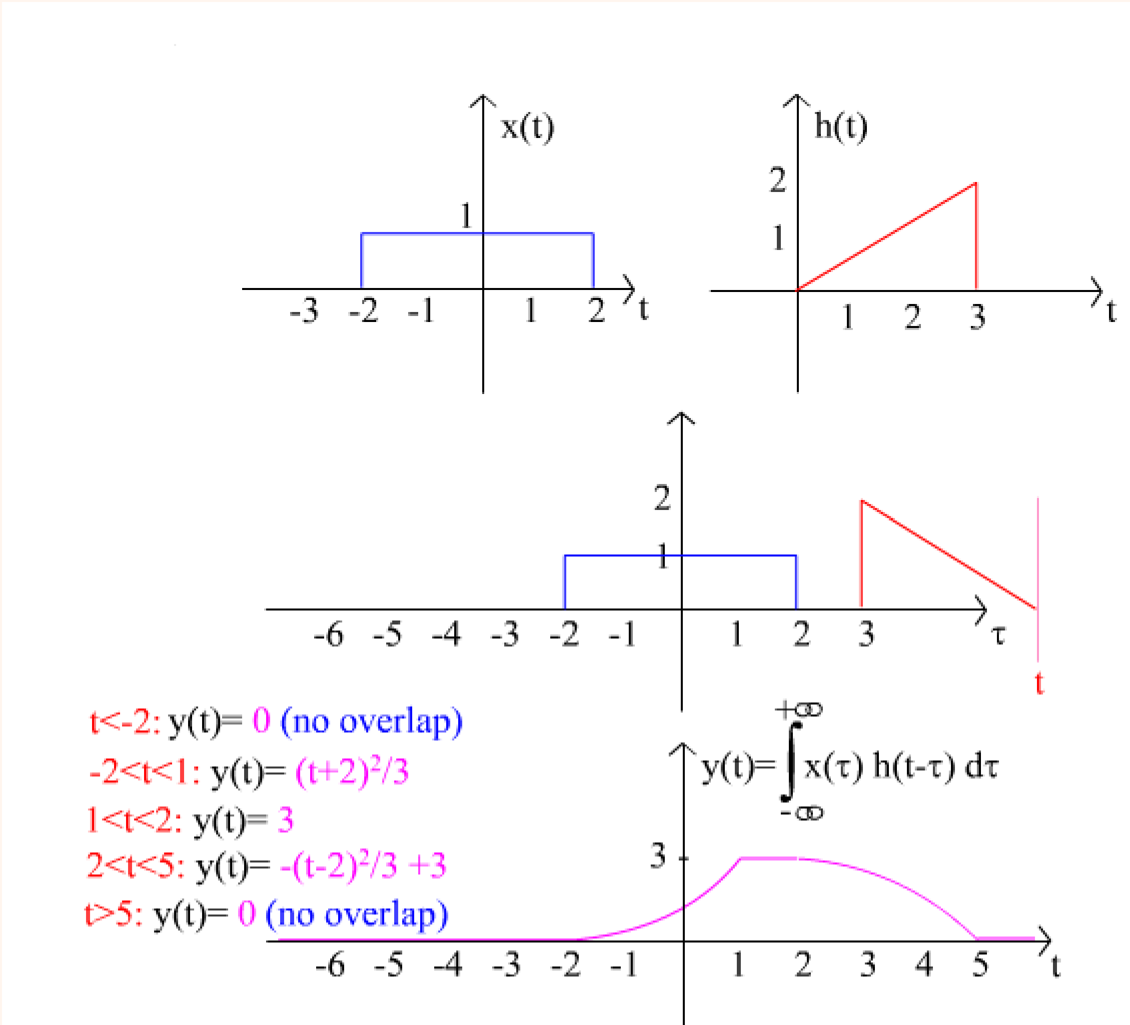
1) Draw $h(-\tau)$





http://www-rohan.sdsu.edu/~jiracek/DAGSAW/

پاسخ



x(t)
h(t)
t<-2: y(t)= 0 (no overlap)
-2<t<1: y(t)= (t+2)²/3
1<t<2: y(t)= 3
2<t<5: y(t)= -(t-2)²/3 +3
t>5: y(t)= 0 (no overlap)
y(t)= ∫ x(τ) h(t-τ) dτ

مثال

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad a > 0$$

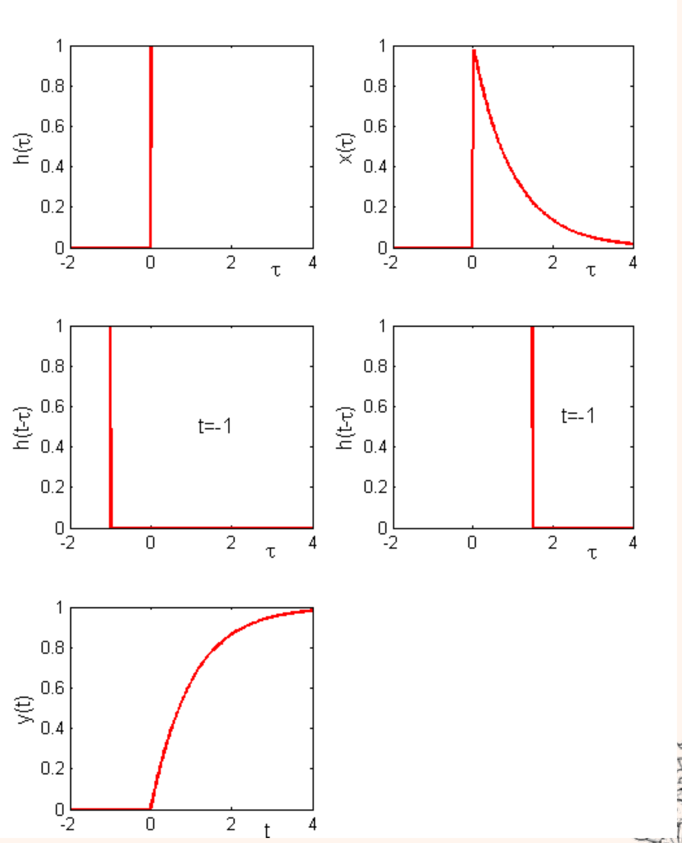
$$h(t) = u(t)$$

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau} & 0 < \tau < t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\tfrac{1}{a} e^{-a\tau}\Big|_0^t$$

$$= \tfrac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$$

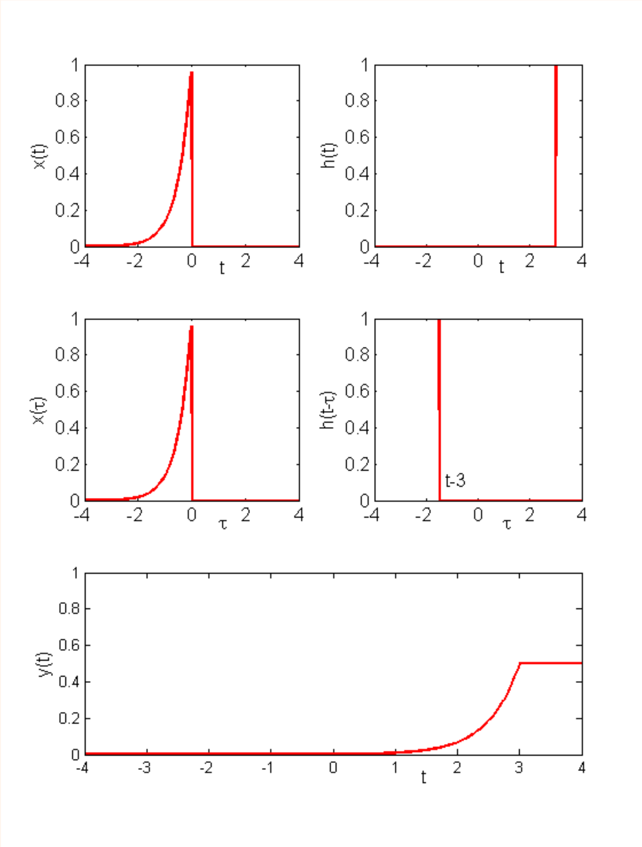
$$y(t) = \tfrac{1}{a}\left(1 - e^{-at}\right)u(t)$$



مثال

$$x(t) = e^{2t}u(-t)$$

$$h(t) = u(t-3)$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \tfrac{1}{2} e^{2(t-3)}, \quad t < 3$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau} d\tau = \tfrac{1}{2}, \quad t \geq 3$$

خصوصیات سیستم

- با توجه به این که در سیستم‌های LTI پاسخ ضربه مشخص کننده‌ی سیستم می‌باشد، با در اختیار داشتن پاسخ ضربه همه‌ی مشخصات سیستم قابل استخراج خواهد بود.
- به عنوان مثال برای پاسخ ضربه‌ی زیر

$$h[n]=\begin{cases}1 & n=0,1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- تنها یک سیستم LTI وجود دارد:

$$y[n]=x[n]+x[n-1]$$

برای چنین پاسخی چند سیستم غیرخطی وجود دارد؟

خاصیت جابه‌جایی

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- مثال: پاسخ پله یک سیستم DT LTI (s[n])

$$s[n]=u[n]*h[n]=h[n]*u[n]$$

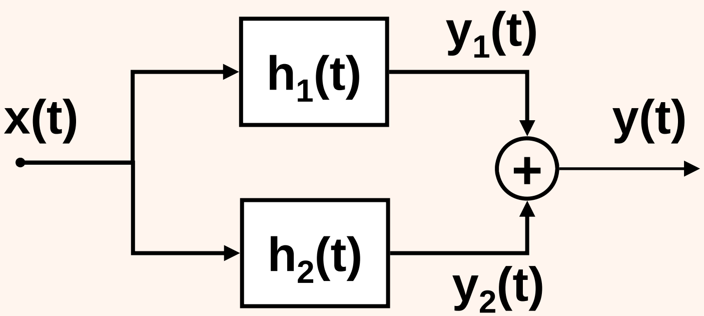
$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}h[k]$$

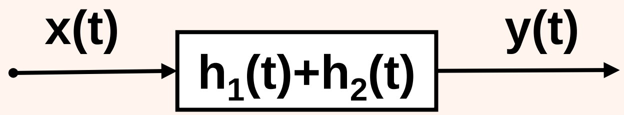
The Distributive Property

توزیع‌پذیری

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n]) = x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n] = y_1[n]+y_2[n]$$

$$x(t)*(h_1(t)+h_2(t)) = x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t) = y_1(t)+y_2(t)$$





مثال

$$x[n]=0.5^n u[n]+2^n u[-n]$$

$$h[n]=u[n]$$

$$x_1[n]=0.5^n u[n]$$

$$x_2[n]=2^n u[-n]$$

$$y[n]=(x_1[n]+x_2[n])*h[n]$$

$$y_1[n]=\left(\frac{1-0.5^{n+1}}{1-0.5}\right)u[n]$$

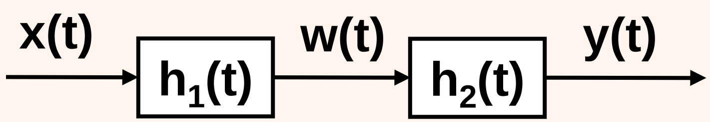
$$y_2[n]=\begin{cases}2^{n+1} & n\leq 0\\ 2 & n\geq 1\end{cases}$$

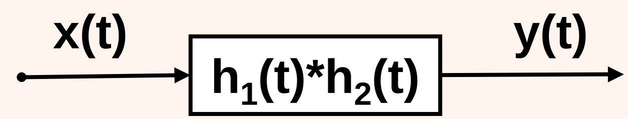
The Associative Property

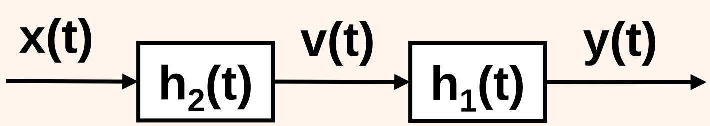
خاصیت شرکت‌پذیری

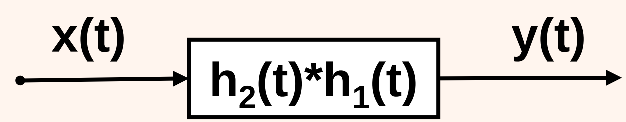
$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n]) = (x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$

$$x(t)*(h_1(t)*h_2(t)) = (x(t)*h_1(t))*h_2(t)$$

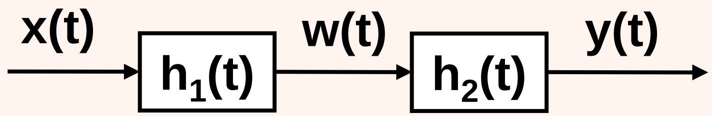








مثال



$$h_1[n] = \sin(8n) \qquad h_2[n] = a^n u[n]$$

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1] \qquad y[n] = ?$$

$$y[n] = \sin(8n)$$

خصوصیات سیستم‌های LTI

- با توجه به این که پاسخ ضربه مشخص کننده‌ی سیستم است، مشخصات سیستم از روی پاسخ ضربه قابل تشخیص خواهد بود:
- علیت:

$$h[n]=0 \qquad \text{for } n<0$$

$$h(t)=0 \qquad \text{for } t<0$$

- پایداری:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|h[k]\right|<\infty \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\left|h(\tau)\right|d\tau<\infty$$

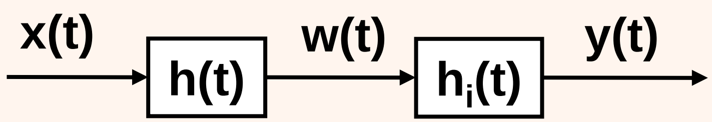
خصوصیات سیستم‌های LTI (ادامه...)

- با حافظه بودن:

$$h[n] = k\delta[n]$$

$$y(t) = kx(t)$$

- معکوس‌پذیری: در صورتی که h_i وجود داشته باشد:



$$h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

$$h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

مثال

- کدام یک از سیستم‌های زیر پایدار هستند؟

$$h[n]=\delta[n-n_0]$$

$$h(t)=\delta(t-t_0)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|\delta[k-n_0]|=1<\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}|\delta(\tau-t_0)|d\tau=1<\infty$$

$$h[n]=u[n-n_0]$$

$$h(t)=u(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(\tau)|d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}|u(\tau-t_0)|d\tau=\int_{t_0}^{\infty}|u(\tau)|d\tau=\infty$$

پاسخ پله در سیستم‌های LTI

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad h[n]=s[n]-s[n-1]$$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)\,d\tau \qquad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=s'(t)$$

معادلات دیفرانسیل و تفاضلی

- یکی از مهمترین دسته از سیستم‌های LTI هستند.
- در سیستم‌های زمان پیوسته:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

- در سیستم‌های زمان گسسته:

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

معادلات دیفرانسیل خطی

- فرم کلی چنین سیستم‌هایی به صورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- آیا چنین سیستمی باحافظه است؟

- آیا چنین سیستمی پایدار است؟
  - مثال:

$$\frac{dy(t)}{dt} - a_1 y(t) = 0 \qquad y(t) = Ae^{a_1 t}$$

بسته به مقدار a ممکن است پایدار باشد یا پایدار نباشد

معادلات دیفرانسیل خطی(ادامه)

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$$y_h(t) = Ae^{-2t}$$

$$x(t) = K\cos(\omega_0 t)u(t) \rightarrow y_p(t) = \frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\cos(\omega_0 - \theta)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_0}{2}\right)$$

Auxiliary condition

$$y(0) = y_0$$

$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \boxed{\frac{K}{\sqrt{4+\omega_0^2}}\left[\cos(\omega_0 - \theta) - e^{-2t}\cos(\theta)\right]u(t)}$$

پاسخ به شرایط اولیه

پاسخ به ورودی

معادلات دیفرانسیل خطی(ادامه)

- سیستم در صورتی خطی خواهد بود که y(0)=0
- در صورتی که پاسخ به شرایط اولیه صفر نباشد، در مورد خطی بودن سیستم چه می‌توان گفت؟
- آیا سیستم علی است؟

$$x_0(t)=0$$

$$y_1(t)=0$$

$$x_2(t)=u(t+1)$$

$$y_2(t)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2}\right)e^{-2(t+1)}$$

Initial rest

- آیا چنین سیستمی تغییرپذیر با زمان است؟

معادلات تفاضلی خطی

- فرم کلی چنین سیستم‌هایی به صورت زیر است:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- اگر معادله به صورت زیر باشد:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

- پاسخ ضربه‌ی چنین سیستمی به شکل خواهد بود؟
  - به چنین سیستمی که طول پاسخ ضربه‌ای آن محدود باشد، FIR (استمرار محدود) می‌گویند.

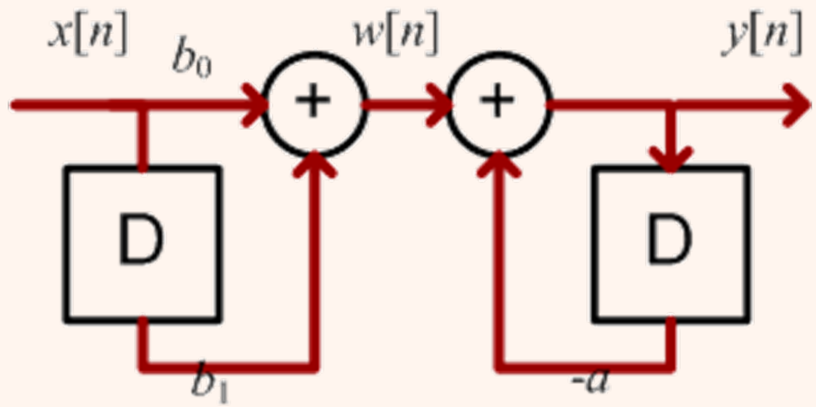
finite impulse response

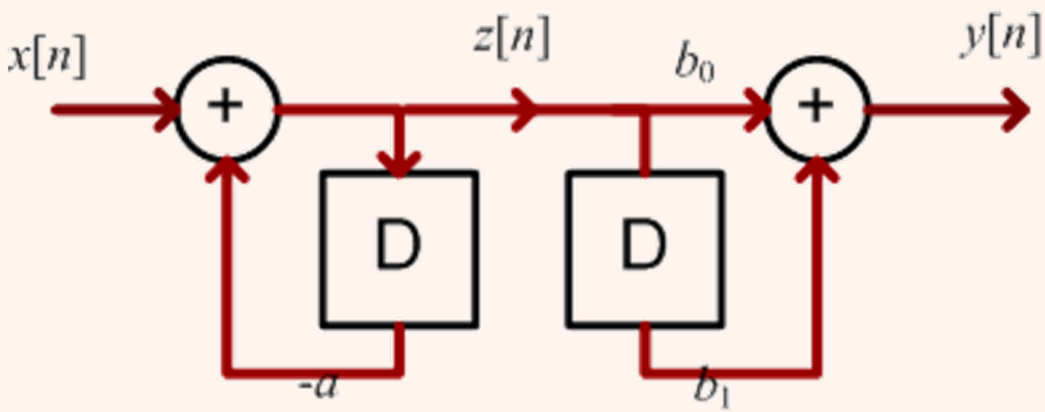
  - وگرنه سیستم، IIR (استمرار نامحدود) خواهد بود.

infinite impulse response

دیاگرام بلوکی معادلات تفاضلی(مثال)

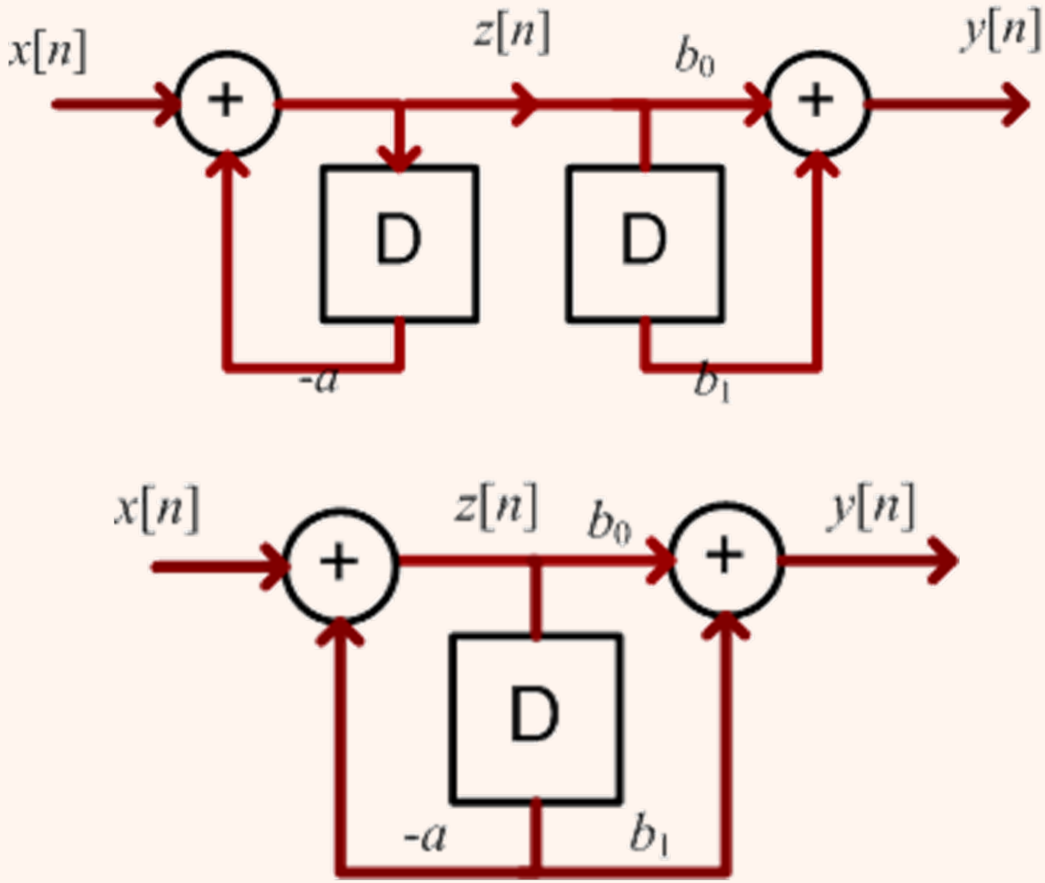
$$y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 [n-1]$$





دیاگرام بلوکی معادلات تفاضلی(مثال)

$$y[n] = -a_1 y[n-1] + b_0 x[n] + b_1 [n-1]$$

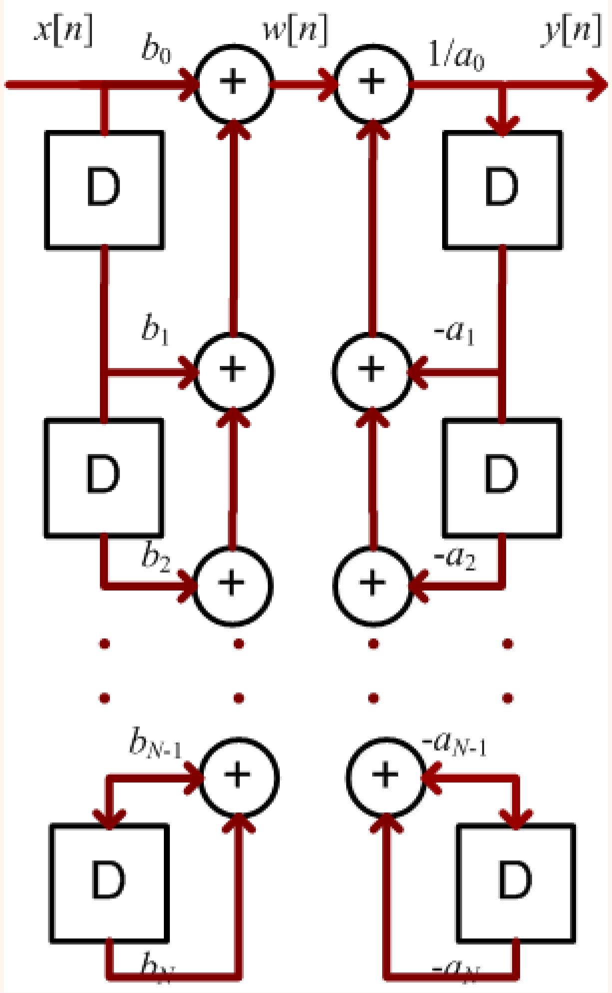


دیاگرام بلوکی معادلات تفاضلی (ادامه...)

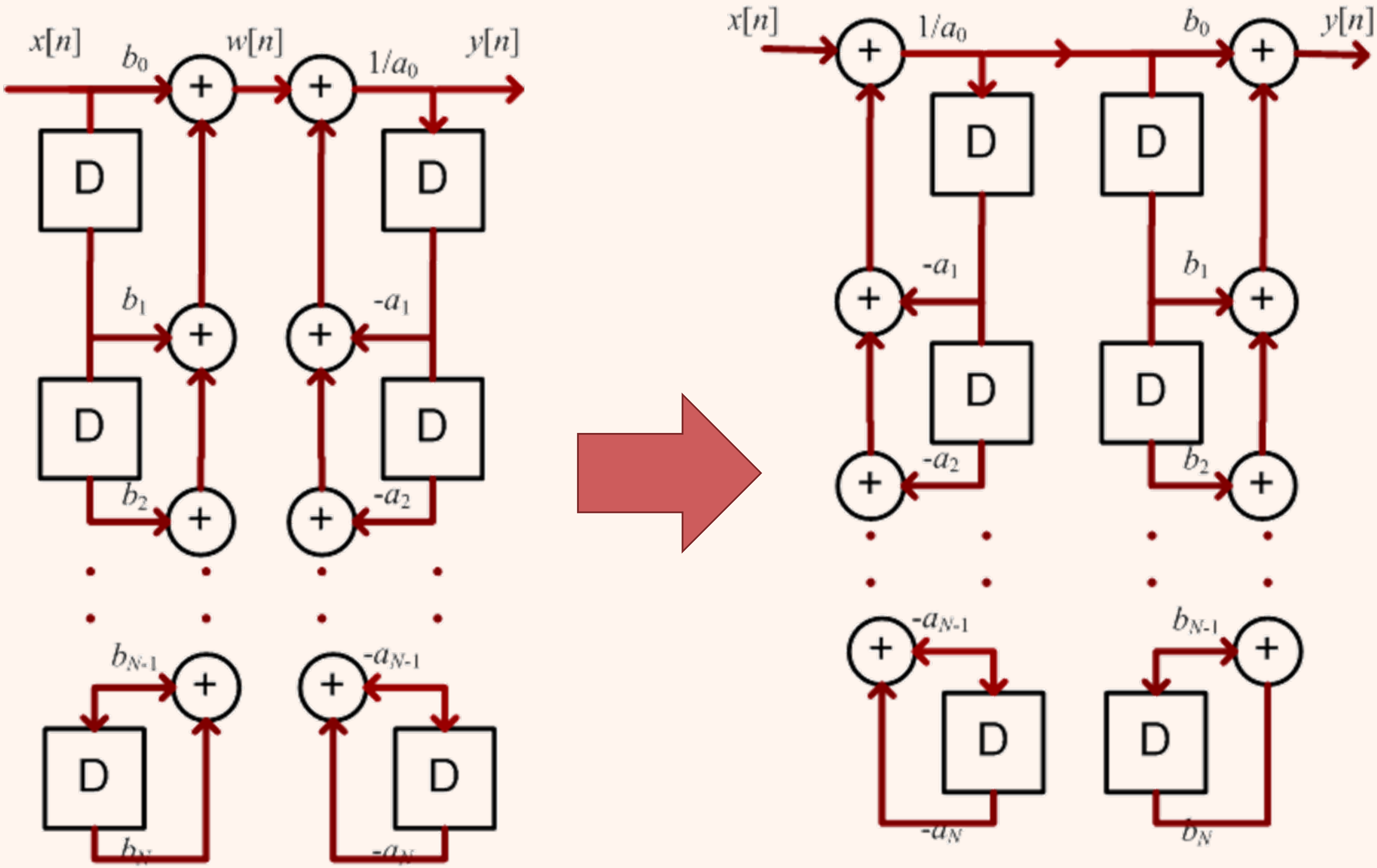
$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\}$$

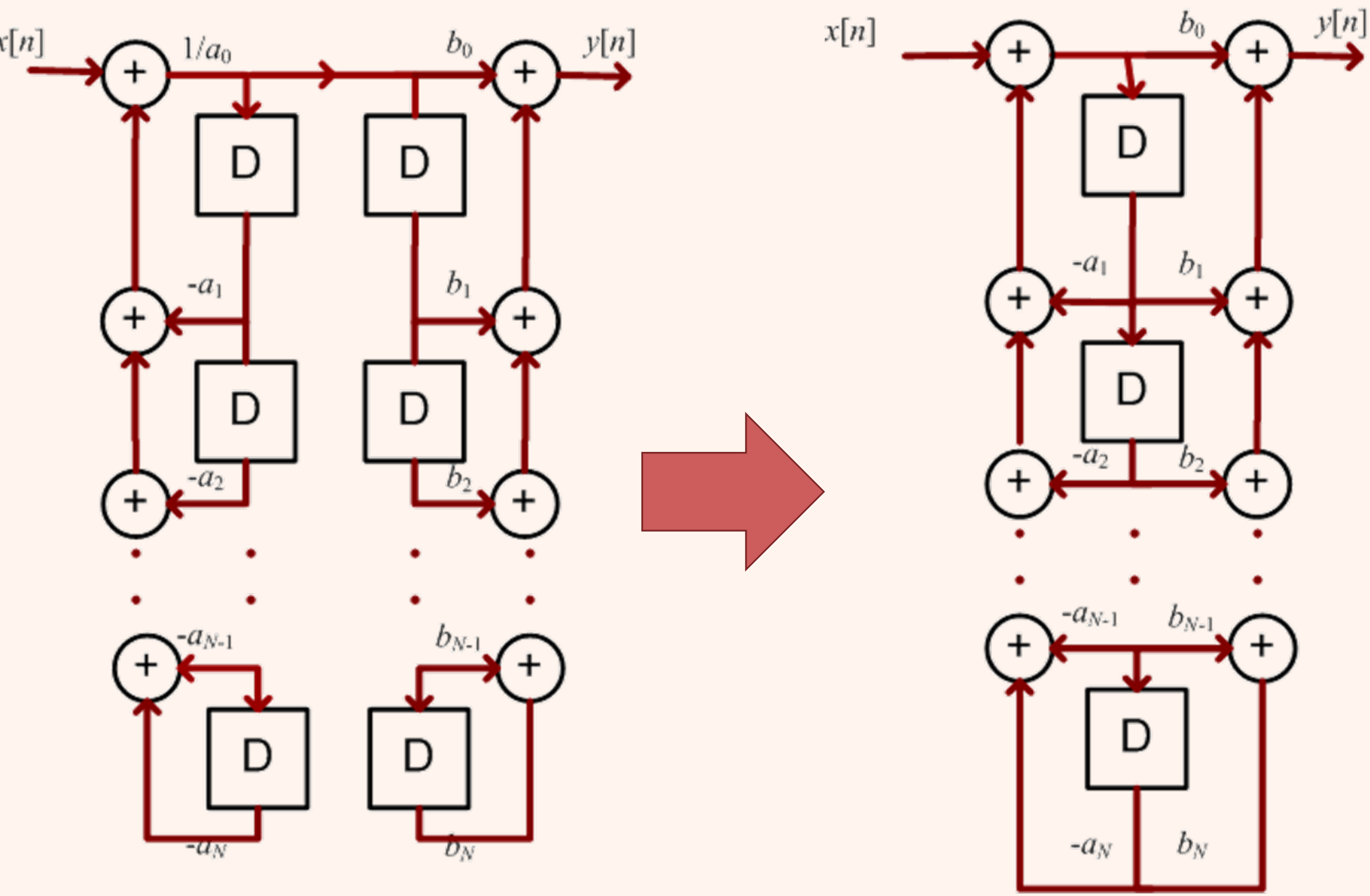
Direct Form I Structure



دیاگرام بلوکی معادلات تفاضلی (ادامه...)



دیاگرام بلوکی معادلات تفاضلی (ادامه...)



Direct Form II Structure

توابع ویژه

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\left[x(t)*\delta(t)\right]}{dt}$$

$$= \frac{d\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta'(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{d\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\delta(\tau)d\tau\right]}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t-\tau)\delta(\tau)d\tau$$

$$x'(t) = x(t)*\delta'(t)$$

$$x(t)*h'(t) = x'(t)*h(t)$$

توابع ویژه (ادامه...)

$$x(t)*\delta'(t)=?$$

$$x(t)*\delta'(t)=\frac{dx(t)}{dt}$$

$$x(t)*\delta(t)=?$$

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$x(t)*u(t)=?$$

$$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

$$x(t)*u(t)*u(t)=?$$

$$x(t)*tu(t)$$

توابع ویژه (ادامه...)

$$\delta'(t)=u_1(t)$$

$$\delta(t)=u_0(t)$$

$$u(t)=u_{-1}(t)$$

$$tu(t)=u_{-2}(t)$$

$$u_{-k}(t)=\underbrace{u(t)*\ldots*u(t)}_{k \text{ بار}}$$

$$u_{-k}(t)=\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t)$$

مثال

$$u(t)*u_1(t)=\delta(t)$$

$$u_k(t)*u_r(t)=u_{k+r}(t)$$