سیگنال و سیستم

(تجزیه و تحلیل سیستم‌ها)

۱۳-۱۱-۱۸۰

بخش نهم

تبدیل لاپلاس

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

پاییز ۱۳۹۳

احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

- تبدیل لاپلاس
- تبدیل معکوس
- خواص تبدیل لاپلاس
- آنالیز سیستم‌های LTI
- معادلات دیفرانسیل

تبدیل لاپلاس

- تبدیل فوریه ابزار بسیار مفیدی برای تحلیل سیگنال‌ها است:
  - تحلیل پاسخ ضربه
  - نمونه‌برداری
  - مدولاسیون
- با این وجود توانایی تحلیل سیستم‌های ناپایدار را ندارد.
- در بسیاری از کاربردها با سیگنال‌های ناپایدار سروکار داریم.
- در برخی موارد، این ناپایداری در عمل مورد نظر است.
- تبدیل لاپلاس برای تحلیل دامنه‌ی وسیع‌تری از سیگنال‌ها به کار می‌رود.

تبدیل لاپلاس

Laplace Transform

$$e^{st} \xrightarrow{\textit{LTI}} H(s)e^{st}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt$$

$$\boxed{X(s) \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

$$\boldsymbol{X(s) = L\{\, x(t)\}}$$

$$\boldsymbol{X(s) = F\{\, x(t)e^{-\sigma t} \,\}}$$

Region of Convergence

همگرایی

Dirichlet Condition 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) e^{-\sigma t} \right| dt < \infty$$

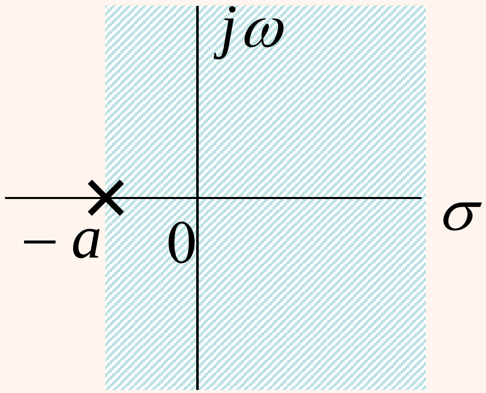
$$\boldsymbol{X(j\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega}}$$

$$\boldsymbol{\sigma = 0 \subseteq \mathrm{ROC}}$$

مثال

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

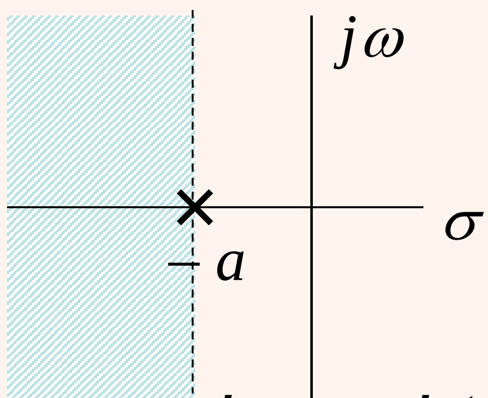
$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \mathbf{Re}\{s\} > -a$$



pole-zero plot

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \mathbf{Re}\{s\} < -a$$



pole-zero plot

$$\boxed{x(t) \longleftrightarrow X(s)\ ;\mathrm{ROC}}$$

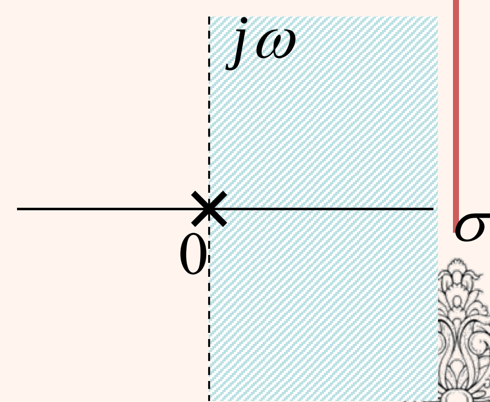
مثال

$$e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a} \quad \mathrm{Re}\{s\} < -a$$

$$\boxed{x(t) \longleftrightarrow X(s)\ ;\mathrm{ROC}}$$

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s} \quad \mathrm{Re}\{s\} > 0$$



به این ترتیب نمی‌توان تبدیل فوریه $u(t)$ را حساب کرد

$$u(t) \xleftrightarrow{F} \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

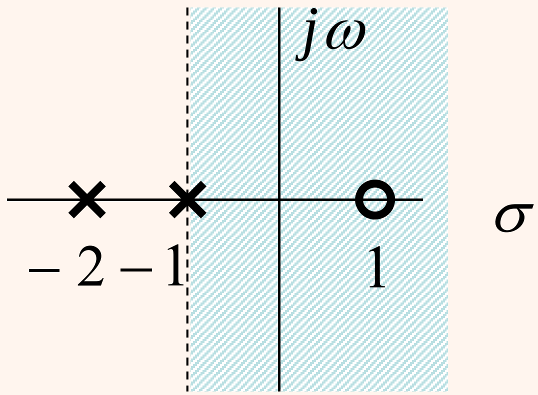
مثال

$$x(t)=3e^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)$$

$$3e^{-2t}u(t)\longleftrightarrow\frac{3}{s+2}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-2$$

$$2e^{-t}u(t)\longleftrightarrow\frac{2}{s+1}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$3e^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)\longleftrightarrow\frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$



$$\mathrm{Re}\{s\}>-1$$

مثال

$$x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-t}\cos(3t)u(t)$$

$$x(t)=e^{-2t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-t}e^{j3t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-t}e^{-j3t}u(t)$$

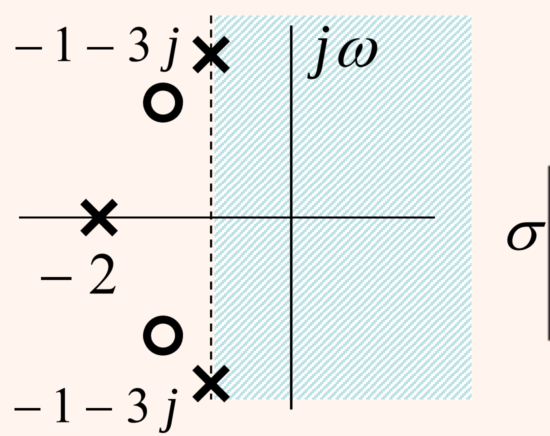
$$e^{-2t}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{s+2}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-2$$

$$\frac{1}{2}e^{-\underbrace{(1-j3)}_{a}t}u(t)\longleftrightarrow\frac{1/2}{s+1\text{-}3j}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\}=-1$$

$$\frac{1}{2}e^{-(1+j3)t}u(t)\longleftrightarrow\frac{1/2}{s+1+3j}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>\mathrm{Re}\{-a\}=-1$$

$$X(s)=\frac{2s^2+5s+12}{(s+2)(s^2+2s+10)}$$

$$\mathrm{Re}\{s\}>-1$$



مثال

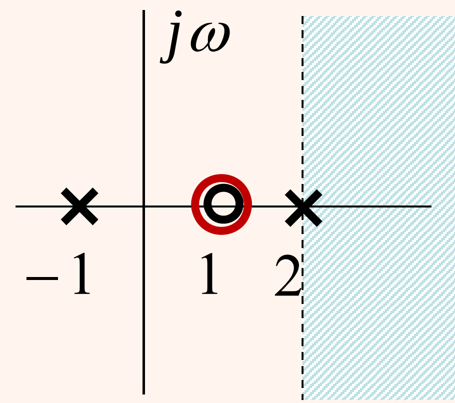
$$x(t)=\delta(t)-\frac{4}{3}e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

$$\delta(t)\longleftrightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)e^{-st}dt\ =1 \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-\infty$$

$$-\frac{4}{3}e^{-t}u(t)\longleftrightarrow\frac{-4/3}{s+1} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$\frac{1}{3}e^{2t}u(t)\longleftrightarrow\frac{1/3}{s-2} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>2$$

$$X(s)=\frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>2$$



pole-zero plot

$$\sigma=0\not\subset\{\mathrm{Re}\{s\}>2\}$$

$\mathrm{F}\{x(t)\}$ ***does not exist.***

مثال

- برخی سیگنال‌ها تبدیل لاپلاس ندارند، در هیچ ناحیه‌ای همگرا نیستند.

$$x(t) = Ce^{-t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| Ce^{-t} e^{-\sigma t} \right| dt = \infty$$

- در دامنه‌ی تبدیل لاپلاس ضربه مجاز نیست.

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \xrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| x(t) e^{-\sigma t} \right| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-\sigma t} \right| dt = \infty$$

تبدیل لاپلاس

$$X(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

صفرها $N(s)=0$

قطب‌ها $D(s)=0$

ویژگی ۱

ناحیه‌ی همگرایی شامل نوارهایی است که با محور موهومی موازی هستند

ویژگی ۲

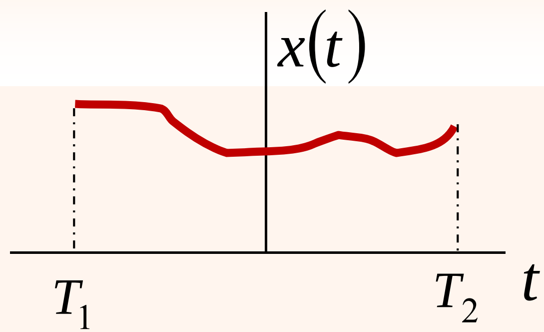
ناحیه‌ی همگرایی نمی‌تواند شامل هیچ قطبی باشد

ویژگی ۳

در صورتی که x یک سیگنال محدود باشد و حداقل به ازای یک مقدار s تبدیل لاپلاس آن همگرا شود، محدوده‌ی همگرایی آن کل صفحه را در بر خواهد گرفت.

$$\begin{cases} x(t)=0 \quad ; \quad t<T_1, t>T_2 \\ \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|dt<\infty \end{cases}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)e^{-\sigma t}|dt<\infty$$



$$x(t)=0\ ,\ t<T_1$$

ویژگی ۴

در صورتی که x یک سیگنال دست راستی باشد،

$$\exists\sigma_0\subseteq \mathrm{ROC} \longrightarrow \mathrm{Re}\{s\}>\sigma_0$$

$$\sigma_1>\sigma_0 \qquad e^{-\sigma_1 t}<e^{-\sigma_0 t}\ \ (t>0)$$

① $T_1\geq 0$

$$\int_{T_1}^{+\infty}\left|x(t)e^{-\sigma_1 t}\right|dt<\int_{T_1}^{+\infty}\left|x(t)e^{-\sigma_0 t}\right|<\infty$$

② $T_1<0$

$$\underbrace{\int_{T_1}^{0}\left|x(t)e^{-\sigma_1 t}\right|dt}_{\text{finite}}+\underbrace{\int_{0}^{+\infty}\left|x(t)e^{-\sigma_1 t}\right|dt}_{<\int_{0}^{+\infty}\left|x(t)e^{-\sigma_0 t}\right|dt<\infty}$$

تبدیل لاپلاس

ویژگی ۵

در صورتی که x یک سیگنال دست چپی باشد،

$$x(t)=0 \ , \ t>T_1$$

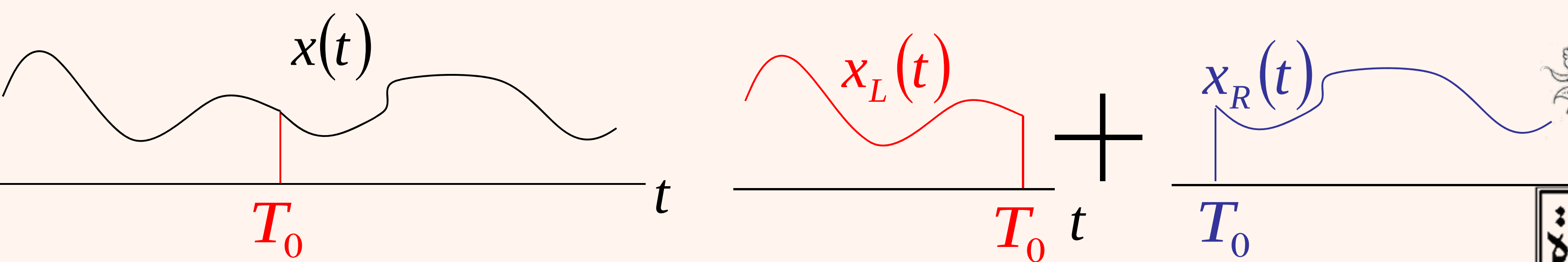
$$\exists \sigma_0 \subseteq \text{ROC} \Rightarrow \text{Re}\{s\}<\sigma_0 \subseteq \text{ROC}$$

ویژگی ۶

در صورتی که x یک سیگنال دو طرفه باشد

$$x(t), \ -\infty<t<+\infty$$

$$\exists \sigma_0 \subseteq \text{ROC} \Rightarrow \sigma_1<\text{Re}\{s\}<\sigma_2 \supseteq \sigma_0$$



$\text{Re}\{s\}<\sigma_2$ $\quad$ $\text{Re}\{s\}>\sigma_1$

مثال

$$x(t)=u(t)-u(t-T)$$

$$u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{s}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

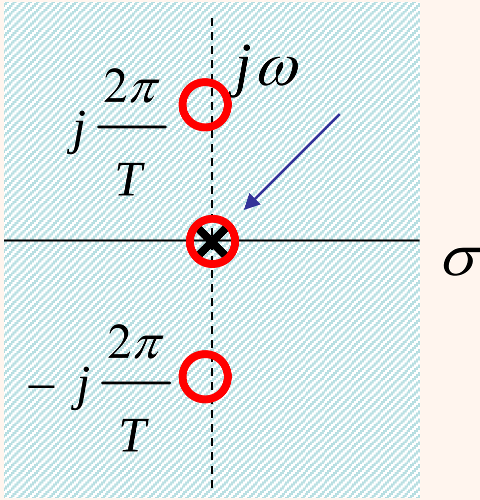
$$u(t-T)\longleftrightarrow\int_T^{+\infty} e^{-st}dt=\frac{-1}{s}e^{-st}\Big|_T^{+\infty}=\frac{e^{-sT}}{s}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$u(t)-u(t-T)\longleftrightarrow\frac{1-e^{-sT}}{s}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-\infty$$

pole: $s=0$

zero: $1-e^{-sT}=0 \qquad e^{-sT}=e^{j2k\pi}$

zeros: $s_k=-j\dfrac{2k\pi}{T},k=0,\pm1\cdots$



pole-zero plot

مثال

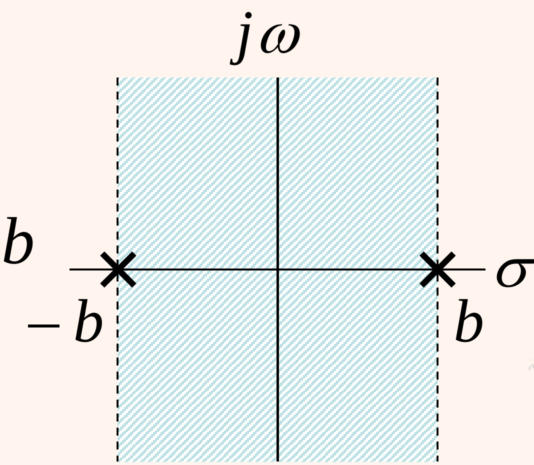
$$x(t)=e^{-b|t|}$$

$$x(t)=e^{-bt}u(t)+e^{bt}u(-t)$$

$$e^{-bt}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{s+b}\quad \mathrm{Re}\{s\}>-b$$

$$e^{bt}u(-t)\longleftrightarrow\frac{-1}{s-b}\quad \mathrm{Re}\{s\}<b$$

If b>0, $e^{-b|t|}\longleftrightarrow\dfrac{-2b}{s^2-b^2}\quad -b<\mathrm{Re}\{s\}<b$



If b≤0,

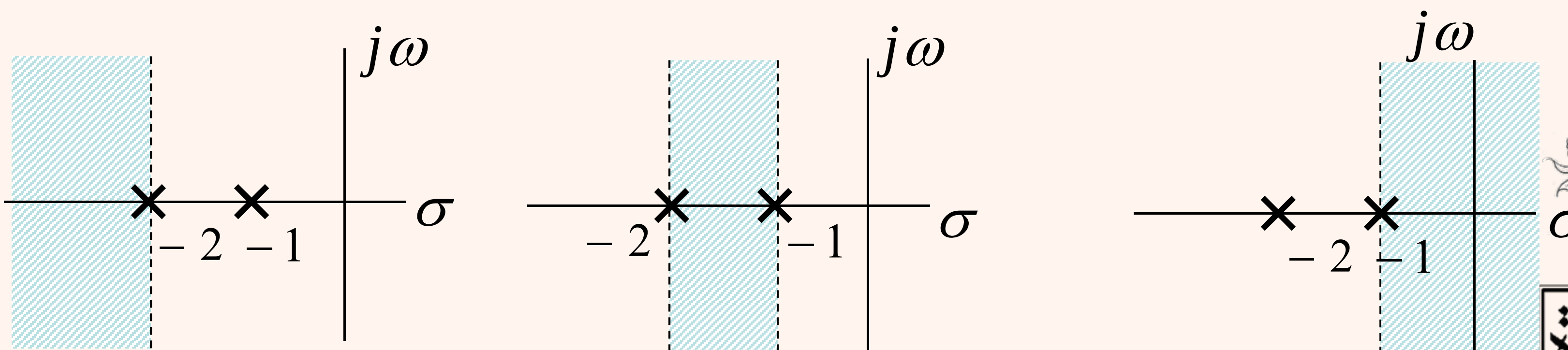
$x(t)$ تبدیل لاپلاس ندارد

تبدیل لاپلاس

ویژگی ۶

در صورتی که x یک سیگنال گویا باشد، ناحیه‌ی همگرایی محدود به ناحیه‌ی بین قطب‌ها و یا بین قطب‌ها و بی‌نهایت خواهد بود.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$



$\mathrm{Re}\{s\} < -2$ — **left sided**

$-2 < \mathrm{Re}\{s\} < -1$ — **two sided**

$\mathrm{Re}\{s\} > -1$ — **right sided**

تبدیل لاپلاس سیگنال‌های پایه

$x(t)$	$X(s)$	**Poles**	**ROC**
$\delta(t)$	1	*none*	$\mathrm{Re}\{s\} > -\infty$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$s=0$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$s=0$	$\mathrm{Re}\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$s=-a$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$s=-a$	$\mathrm{Re}\{s\} < -a$

تبدیل لاپلاس معکوس

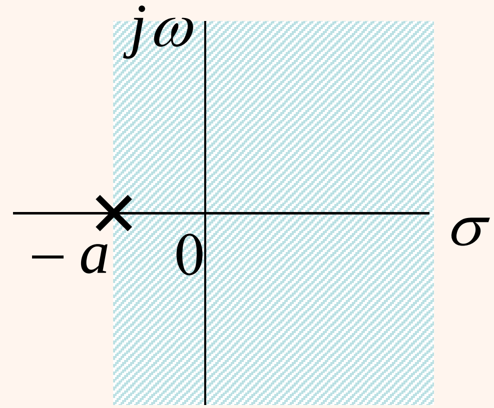
$$X(\sigma + j\omega) = F\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds$$

$$\sigma \subseteq ROC$$



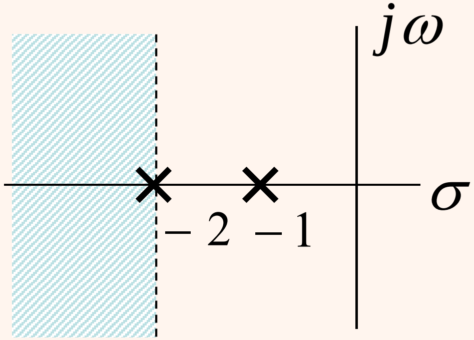
برای تبدیل لاپلاس‌های گویا (rational Laplace transforms) از تکنیک کسرها استفاده می‌کنیم.

$$X(s) = \sum_{i=1}^{M} \frac{A_i}{s + a_i}$$

$$L^{-1}\{A_i/(s + a_i)\} \to \begin{cases} A_i e^{-a_i t}u(t) & \mathrm{Re}\{s\} > -a_i \\ -A_i e^{-a_i t}u(-t) & \mathrm{Re}\{s\} < -a_i \end{cases}$$

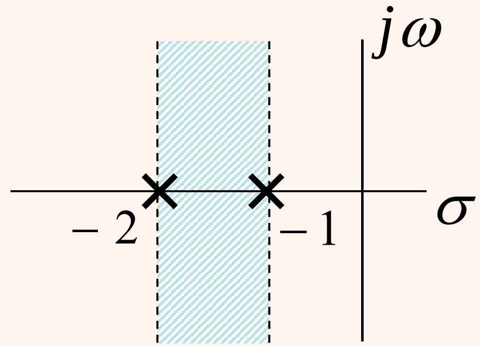
مثال

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}$$



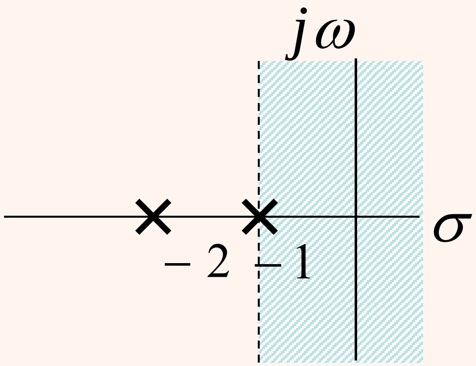
$\mathrm{Re}\{s\}<-2$

left sided



$-2<\mathrm{Re}\{s\}<-1$

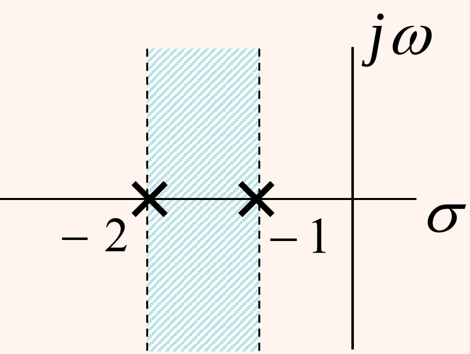
two sided



$\mathrm{Re}\{s\}>-1$

right sided

$$X(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{(s+1)}+\frac{B}{(s+2)}=\frac{1}{(s+1)}-\frac{1}{(s+2)}$$

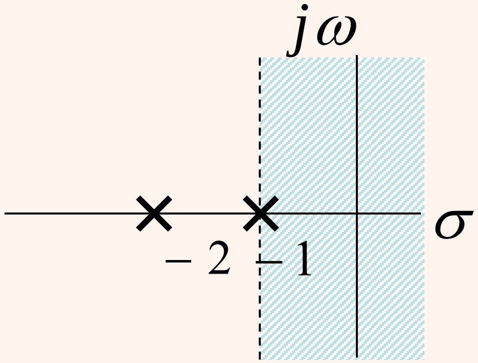


$$-e^{-t}u(-t)\overset{L}{\leftrightarrow}\frac{1}{s+1},\quad \mathrm{Re}\{s\}<-1$$

$$e^{-2t}u(t)\overset{L}{\leftrightarrow}\frac{1}{s+2},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-2$$

$$x(t)=-e^{-t}u(-t)-e^{-2t}u(t)\overset{L}{\leftrightarrow}\frac{1}{(s+1)(s+2)},\quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

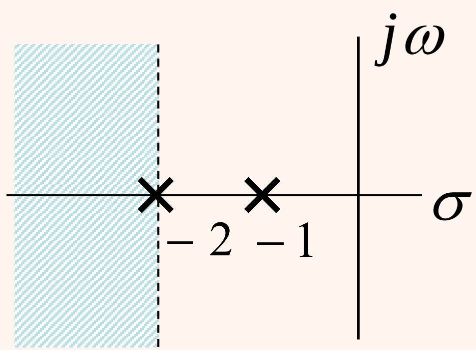
ادامه‌ی مثال



$$e^{-t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-2t}u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$



$$-e^{-t}u(-t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -1$$

$$-e^{-2t}u(-t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}\{s\} < -2$$

$$x(t) = (-e^{-t} + e^{-2t})u(-t) \overset{L}{\longleftrightarrow} \frac{1}{(s+1)(s+2)},$$

$$\mathrm{Re}\{s\} < -2$$

خواص تبدیل لاپلاس

خطی بودن

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s) \qquad Roc = R_1$$

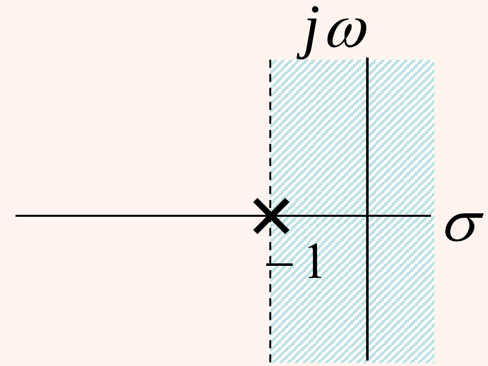
$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s) \qquad Roc = R_2$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{L} aX_1(s) + bX_2(s)$$

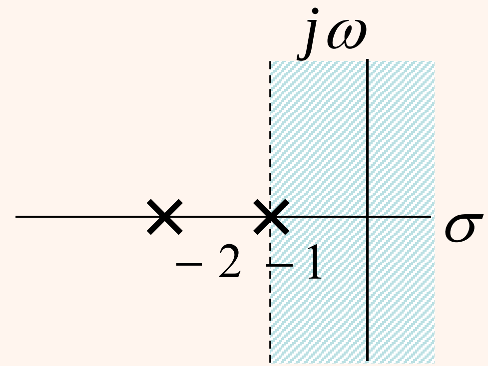
حداقل $Roc \supseteq R_1 \cap R_2$

مثال

$$X_1(s)=\frac{1}{s+1}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

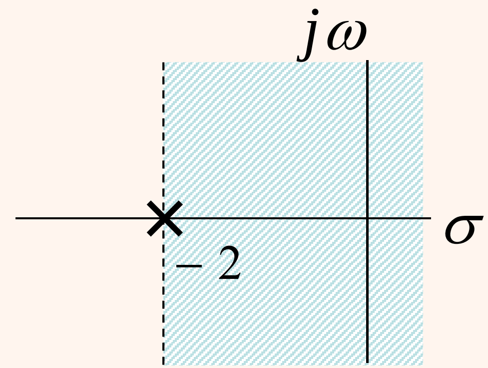


$$X_2(s)=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$



$$X(s)=X_1(s)-X_2(s)=\frac{1}{s+2}$$

$$\mathrm{Re}\{s\}>-2$$



$$\boldsymbol{x(t)=e^{-2t}u(t)}$$

خواص تبدیل لاپلاس

شیفت در حوزه‌ی زمان

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} X(s) \qquad Roc = R$$

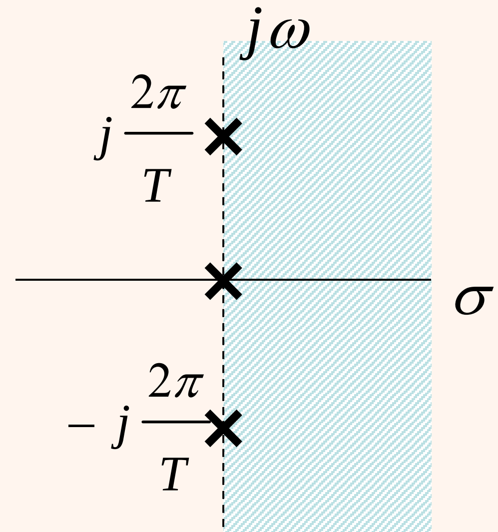
$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} X(s)e^{-st_0} \qquad Roc = R$$

مثال

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t-kT)$$

$$X(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

$$\mathrm{Re}\{s\} > 0$$



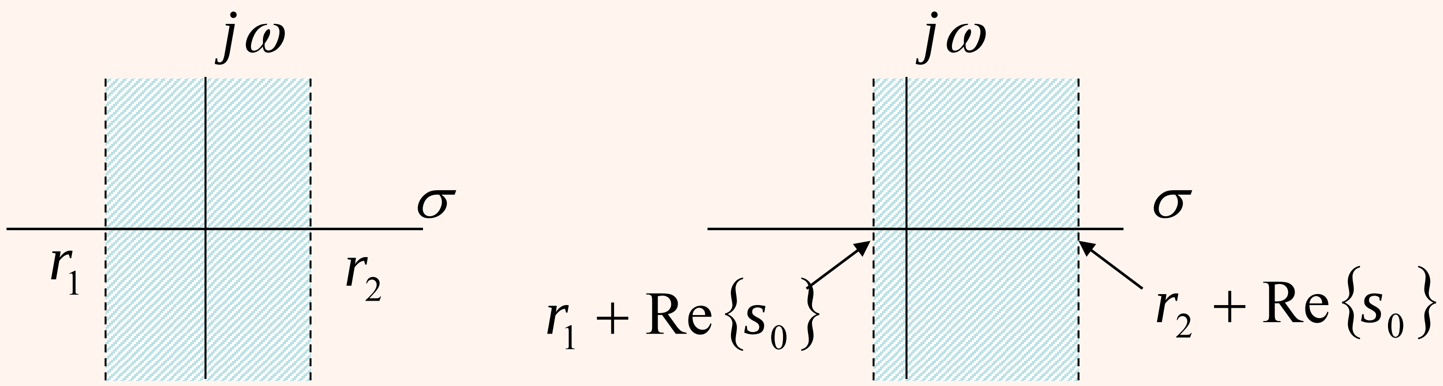
pole-zero plot

خواص تبدیل لاپلاس

شیفت در حوزه ی s

$$x(t) \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s) \qquad Roc = R$$

$$x(t)e^{s_0 t} \overset{L}{\longleftrightarrow} X(s-s_0) \qquad Roc = R + \mathrm{Re}\{s_0\}$$



$$r_1 < \mathrm{Re}\{s\} < r_2 \qquad r_1 + \mathrm{Re}\{s_0\} < \mathrm{Re}\{s\} < r_2 + \mathrm{Re}\{s_0\}$$

مثال

$$\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

$$\sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

خواص تبدیل لاپلاس

تغییر مقیاس

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \qquad Roc = R$$

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X(s/a) \qquad Roc = aR$$

$$a = -1$$

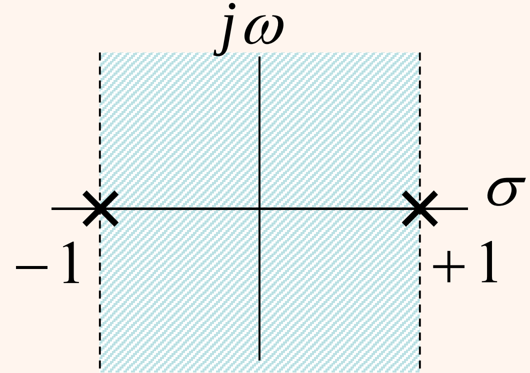
$$x(-t) \xleftrightarrow{L} X(-s)$$

$$Roc = -R$$

مثال

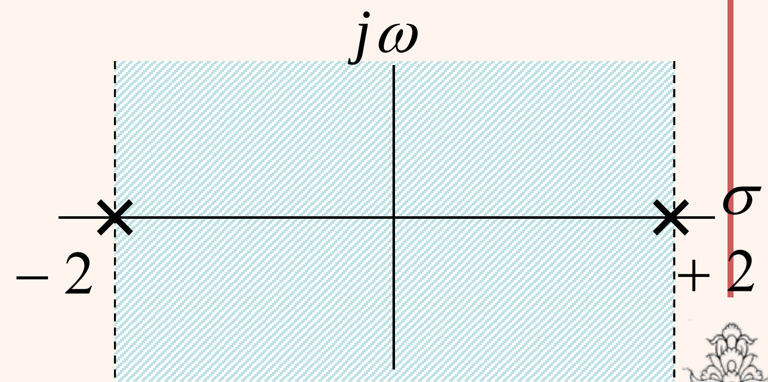
$$e^{-|t|} \longleftrightarrow \frac{-2}{s^2-1}$$

$$-1 < \mathrm{Re}\{s\} < 1$$



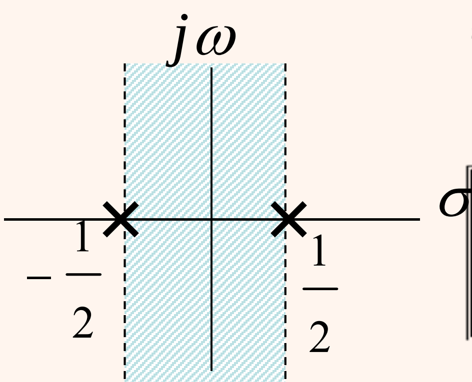
$$e^{-2|t|} \longleftrightarrow \frac{-4}{s^2-4}$$

$$-2 < \mathrm{Re}\{s\} < 2$$



$$e^{-\frac{1}{2}|t|} \longleftrightarrow \frac{-1}{s^2-1/4}$$

$$-\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\{s\} < \frac{1}{2}$$



خواص تبدیل لاپلاس

مزدوج کردن

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \qquad Roc = R$$

$$x^*(t) \xleftrightarrow{L} X^*(s^*) \qquad Roc = R$$

$$x^*(t) = x(t) \;\Rightarrow X(s) = X^*(s^*)$$

حداقل

$$x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s) \qquad Roc = R_1$$

$$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s) \qquad Roc = R_2$$

$$x_1(t) * x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)X_2(s) \qquad Roc \supseteq R_1 \cap R_2$$

مثال

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -2$$

$$X_2(s) = \frac{s+2}{s+1} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -1$$

$$X_1(s)X_2(s) = 1 \qquad \mathrm{Re}\{s\} > -\infty \;\Rightarrow x_1(t) * x_2(t) = \delta(t)$$

مثال

$$x_1(t)=e^{-2t}u(t)\quad x_2(t)=e^{3t}u(t)\Rightarrow x_1(t)*x_2(t)=?$$

$$x_1(t)*x_2(t)=?$$

$$X_1(s)X_2(s)=\frac{1}{s+2}\times\frac{1}{s-3}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s-3}$$

$$=-\frac{1}{5}\times\left[\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s-3}\right]$$

$$=-\frac{1}{5}e^{-2t}u(t)+\frac{1}{5}e^{3t}u(t)$$

$$x_1(t)*x_2(t)=-\frac{1}{5}e^{-2t}u(t)+\frac{1}{5}e^{3t}u(t)$$

خواص تبدیل لاپلاس

مشتق در حوزه ی زمان

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathrm{L}} X(s) \qquad Roc = R$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathrm{L}} sX(s) \qquad Roc \supseteq R$$

خواص تبدیل لاپلاس

مشتق در حوزه‌ی s

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{L}} X(s) \qquad Roc = R$$

$$-tx(t) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{dX(s)}{ds} \qquad Roc = R$$

مثال

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^2} \qquad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

$$\frac{1}{2}t^2e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^3} \qquad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

به طور کلی خواهیم داشت:

$$\frac{1}{n!}t^ne^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^{n+1}} \qquad \operatorname{Re}\{s\} > -a$$

$$\frac{-1}{n!}t^ne^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^{n+1}} \qquad \operatorname{Re}\{s\} < -a$$

مثال

$$X(s)=\frac{e^{-s}+1}{(s+1)^2(s+2)} \quad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$x(t)=?$$

$$X(s)=\left(e^{-s}+1\right)\left[\frac{A}{(s+1)^2}+\frac{B}{(s+1)}+\frac{C}{(s+2)}\right]$$

$$x(t)=te^{-t}u(t)-e^{-t}u(t)+e^{-2t}u(t)$$
$$+(t-1)e^{-(t-1)}u(t-1)-e^{-(t-1)}u(t-1)+e^{-2(t-1)}u(t-1)$$

خواص تبدیل لاپلاس

انتگرال در حوزه‌ی s

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \qquad Roc = R$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}X(s) \qquad Roc \supseteq R \cap \mathrm{Re}\{s\} > 0$$

The Initial- and Final-Value Theorems

X(t) در نقطه‌ی صفر شامل ضربه و یا مراتب بالاتر نباشد

$$x(t) = 0 \;,\; t < 0$$

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) \qquad x(\infty) = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

مثال

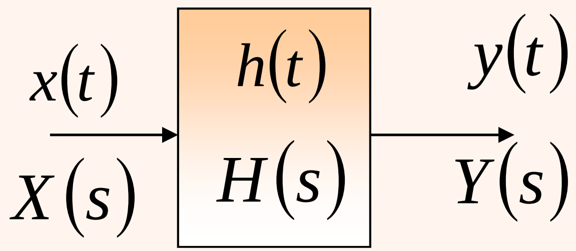
$$X(s)=\frac{s^2+2s+1}{(s-1)(s+2)(s+3)}$$

$$x\left(0^+\right)=\lim_{s\to\infty} sX(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s\left(s^2+2s+1\right)}{(s-1)(s+2)(s+3)}=1$$

آنالیز سیستم‌های LTI بر اساس تبدیل لاپلاس

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$



system Function or Transfer Function

آنالیز سیستم‌های LTI بر اساس تبدیل لاپلاس

علی بودن

سیستم علی است $\Rightarrow$ $ROC = \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_{\max}$

در صورتی که تابع سیستم گویا باشد

سیستم علی است $\Leftrightarrow$ $ROC = \mathrm{Re}\{s\} > \sigma_{\max}$

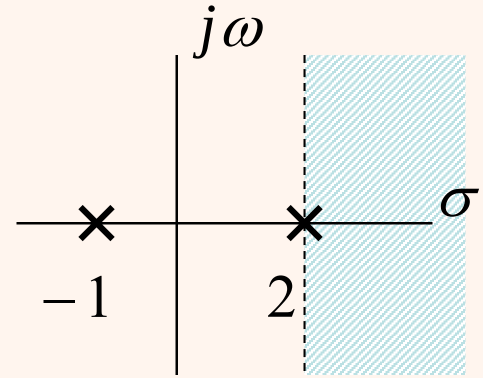
پایداری

سیستم پایدار است $\Leftrightarrow$ $ROC \supseteq j\omega - \text{axis}$

مثال

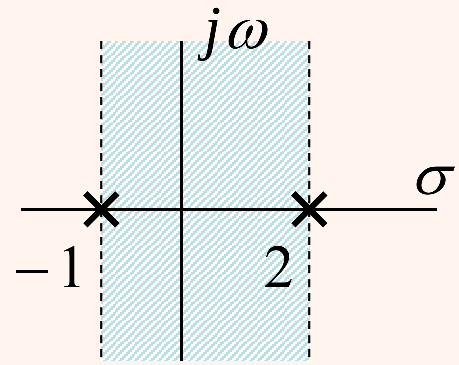
$$H(s)=\frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$$

(a) $\mathrm{Re}\{s\}>2$ علی و ناپایدار



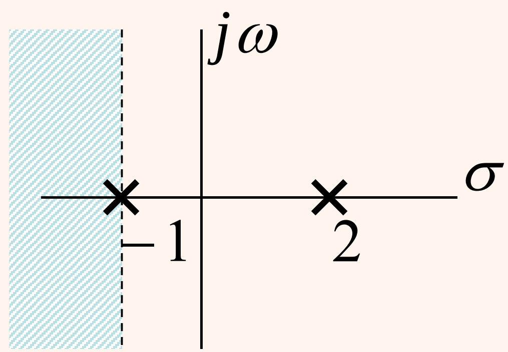
(b) $-1<\mathrm{Re}\{s\}<2$

غیر علی و پایدار



(c) $\mathrm{Re}\{s\}<-1$

غیرعلی و ناپایدار



مثال

$$(a)\quad H(s)=\frac{1}{s+1}$$ ——***Stable***

$$(b)\quad H(s)=\frac{1}{(s+1)(s-2)}$$ ——***unstable***

معادلات دیفرانسیل

$$\frac{dy(t)}{dt}+3y(t)=x(t)$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}=\sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

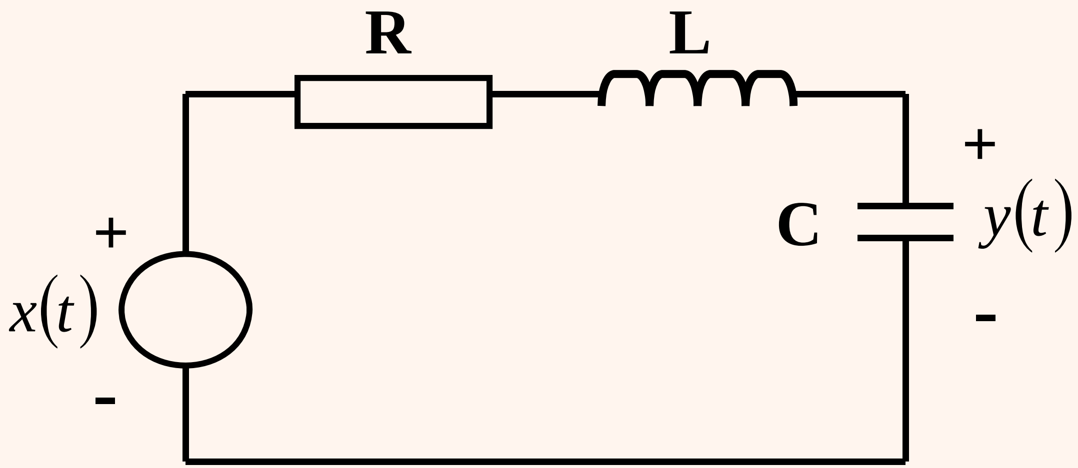
$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

ROC

مثال

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x(t)$$

$$s(t)=\left(\frac{1}{2}-e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$$



$$H(s)=\frac{1/LC}{s^2+(R/L)s+1/LC}$$

مثال

$$x(t)=e^{-3t}u(t)$$

$$y(t)=\left[e^{-t}-e^{-2t}\right]u(t)$$

$$H(s)=\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x'(t)+3x(t)$$

مثال

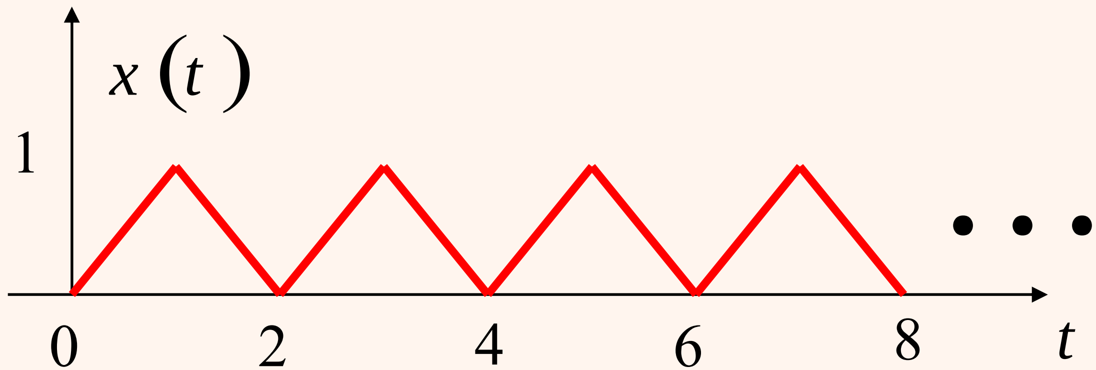
$$X(s)=\frac{1}{s+a}\quad \mathrm{Re}\{s\}>-a$$

① $a>0$ $\quad \lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} sX(s)=0$

② $a=0$ $\quad \lim_{t\to\infty} x(t)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}=1$

③ $a<0$

مثال



$$X(s) = ?$$

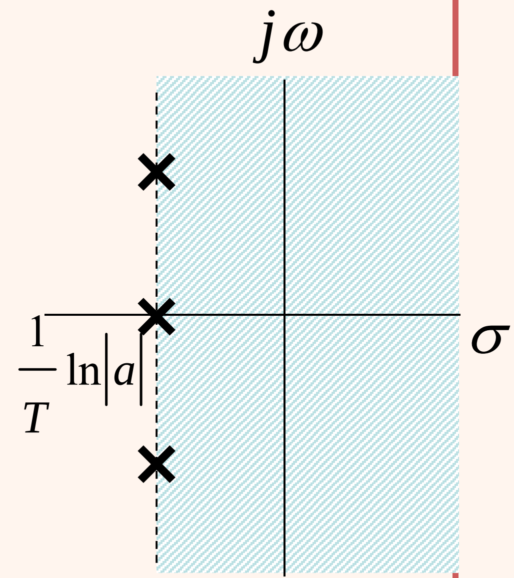
$$\boldsymbol{X(s) = X_1(s)\,X_2(s) = \frac{1-2e^{-s}+e^{-2s}}{s^2\left(1-e^{-2s}\right)} \qquad \mathrm{Re}\{s\} > 0}$$

$$x(t) = \frac{1}{t}\left[1-e^{-at}\right]u(t)$$

$$X(s) = \ln\left|\frac{s+a}{s}\right| \qquad \mathrm{Re}\{s\} > \max\{0,-a\}$$

مثال

$$x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} a^k \delta(t-kT) \qquad X(s)=?$$



$$X(s)=\frac{1}{1-ae^{-sT}} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>\frac{1}{T}\ln|a|$$

$$X(s)=\frac{1}{s\left(1+e^{-s}\right)} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>0 \qquad x(t)=?$$

$$x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u(t-k)$$

مثال

$$X(s)=\frac{2}{\left(s^2+1\right)^2} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>0 \qquad x(t)=?$$

$$\sin\omega_0 t u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}\{s\}>0$$

$$x(t)=\left(\sin t - t\cos t\right)u(t)$$