سیگنال و سیستم

(تجزیه و تحلیل سیستم‌ها)

۱۳-۱۱-۱۸۰

بخش هفتم

نمونه‌برداری

پردازش سیگنال‌های پیوسته
در دامنه‌ی گسسته

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

پاییز ۱۳۹۳

احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

- مفهوم نمونه‌برداری
- تجزیه و تحلیل نمونه‌برداری در فضای فرکانسی
- قضیه‌ی نمونه‌برداری و نرخ نایکوییست
- aliasing و undersampling

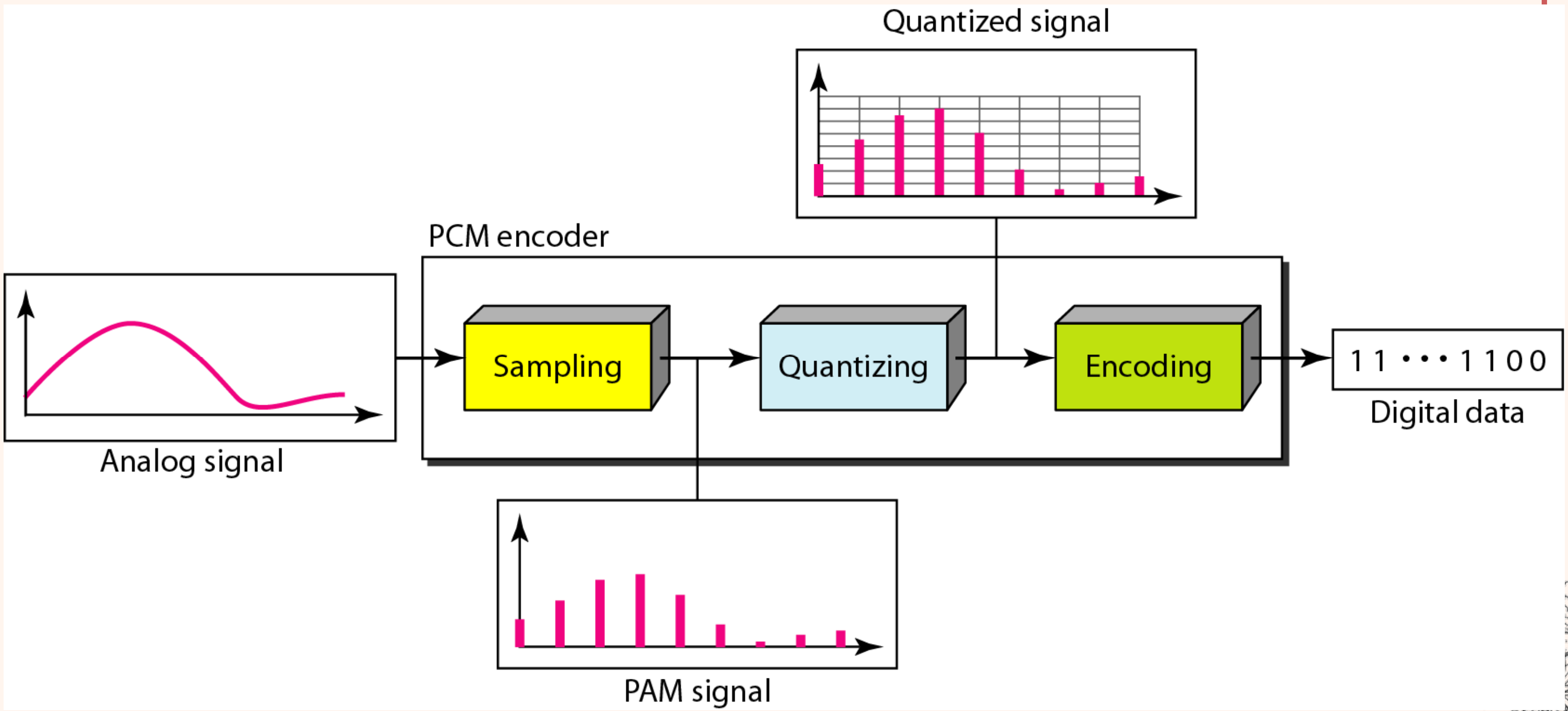
نمونه‌برداری

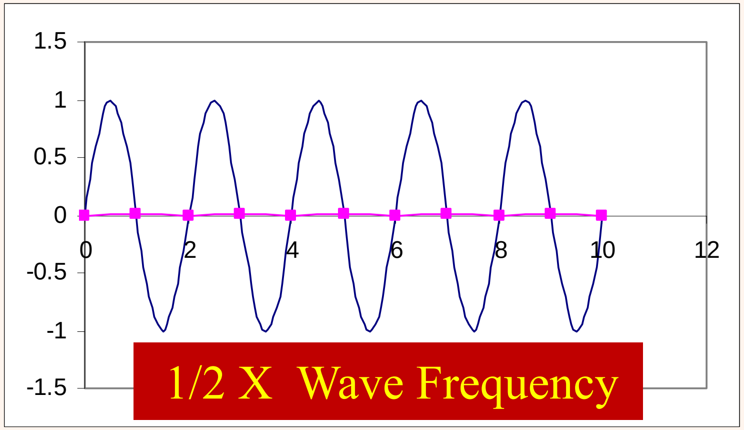
- بیشتر سیگنال‌هایی که با آن سروکار داریم، ماهیتی پیوسته دارند.
- برای تبدیل سیگنال آنالوگ به دیجیتال با تناوب T از سیگنال پیوسته نمونه‌برداری می‌شود.

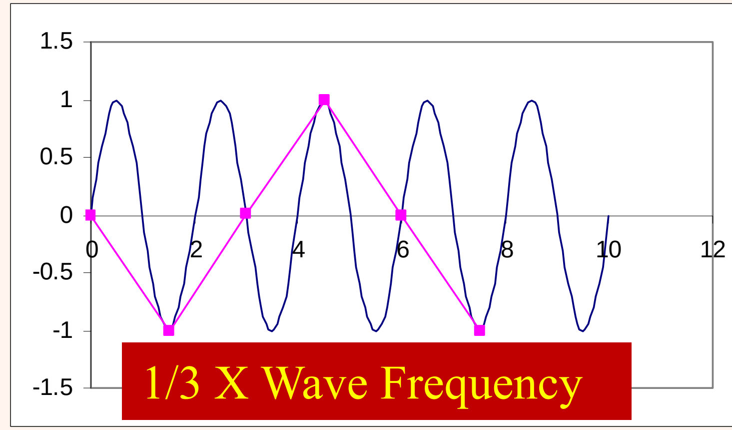
T – sampling period
x[n] ≡ x(nT), n = ..., -1, 0, 1, 2, ... — regularly spaced samples

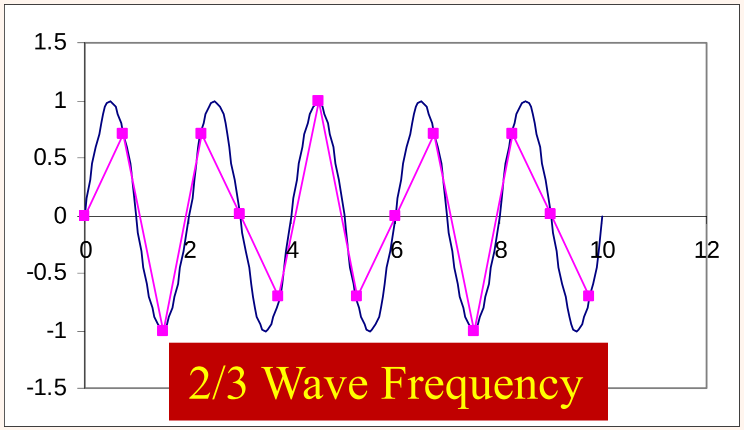
- برای استفاده از مزایای پردازش دیجیتال، لازم است سیگنال‌های زمان پیوسته(نظیر صوت، تصویر و ویدئو) را به صورت گسسته در آورد.

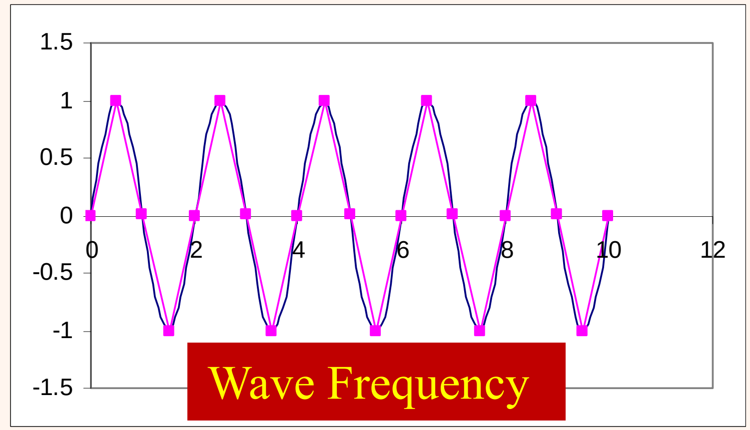
نمونه‌برداری

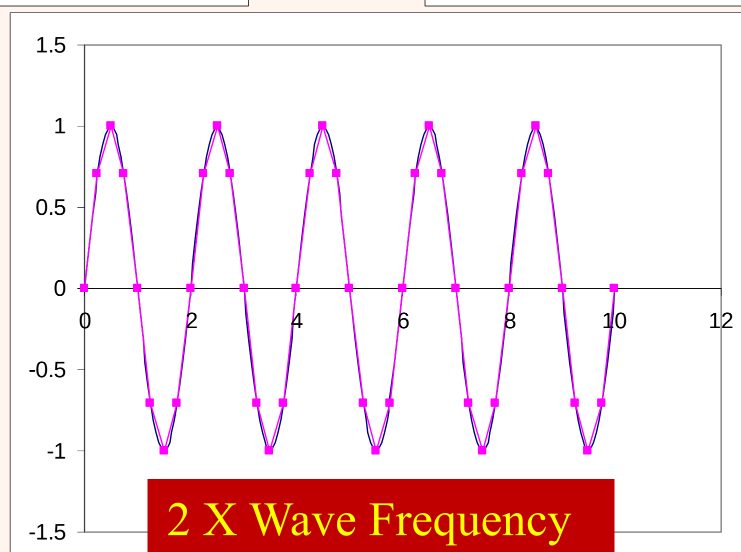



1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0 2 4 6 8 10 12
1/2 X Wave Frequency


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0 2 4 6 8 10 12
1/3 X Wave Frequency

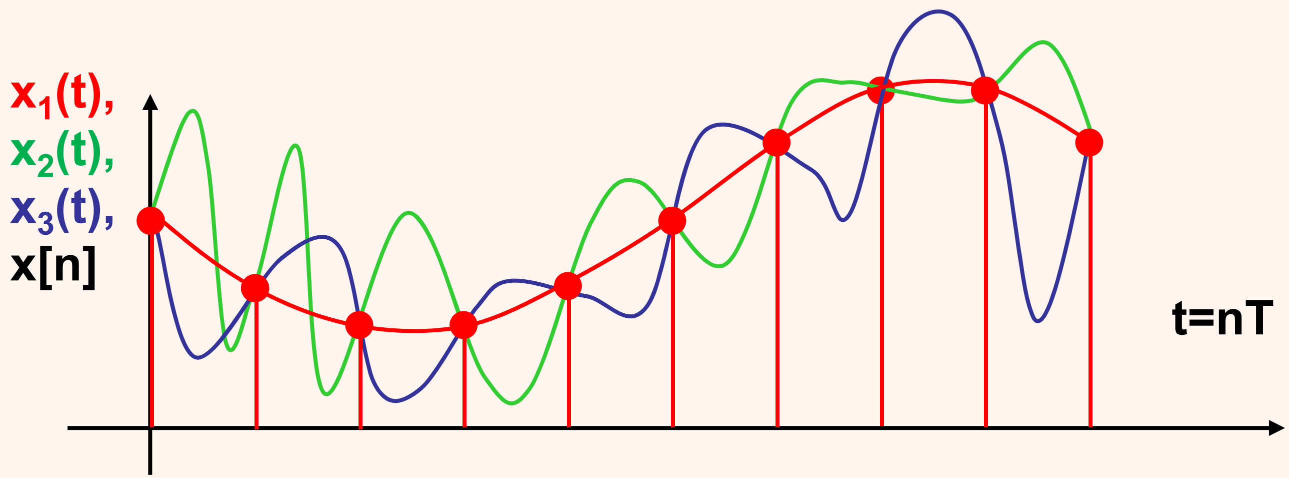

1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0 2 4 6 8 10 12
2/3 Wave Frequency


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0 2 4 6 8 10 12
Wave Frequency


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
0 2 4 6 8 10 12
2 X Wave Frequency

نرخ نمونه‌برداری

- سیگنال‌های مختلف می‌توان در نظر گرفت که نمونه‌های مشابهی داشته باشند.



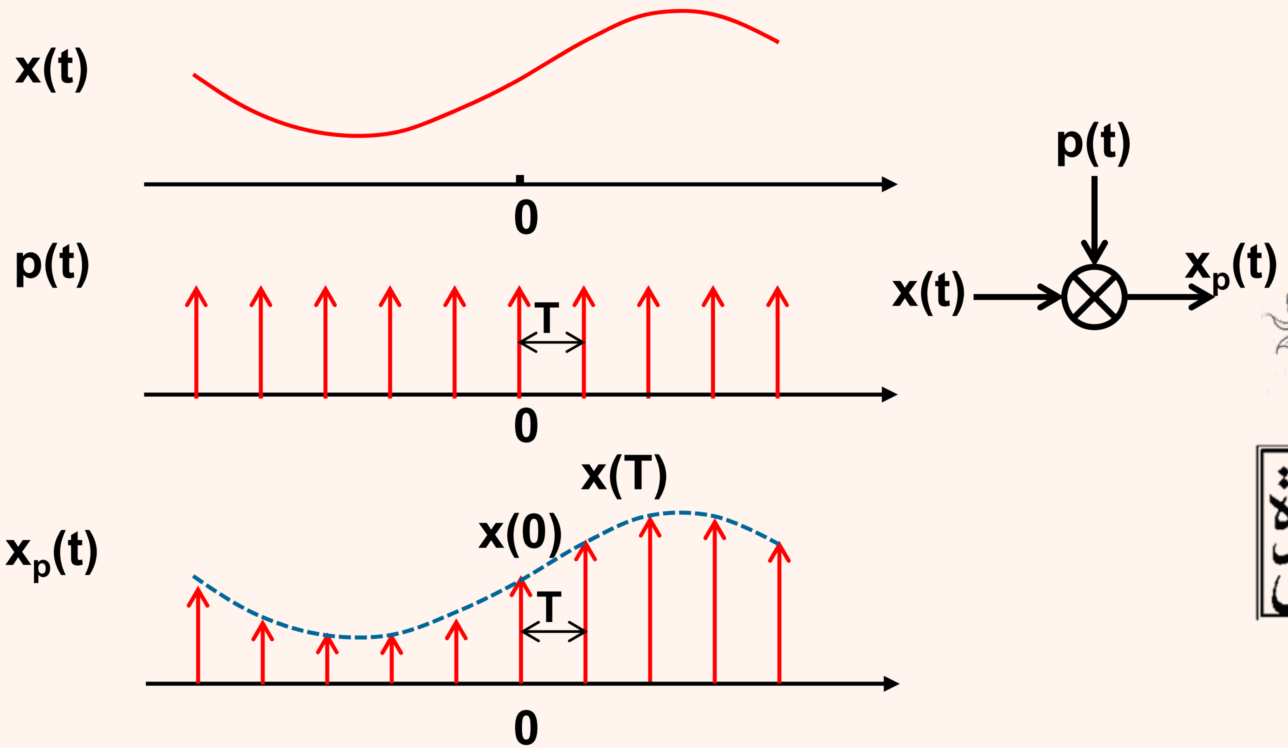
- با نمونه‌برداری، بسیاری از اطلاعات از دست می‌رود.
- در این حالت باید دید با چه شرایطی سیگنال اصلی از روی نمونه‌ها قابل بازسازی است؟

تابع نمونه‌برداری

- برای نمونه‌برداری از تابع آن را در تابع نمونه‌برداری ضرب می‌کنیم.

$$x_p(t) = x(t)p(t) \qquad p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = x(t)p(t) = p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT) == \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$



نمونه‌برداری در دامنه‌ی فرکانس

$$x_p(t) = x(t)p(t) \quad \Longrightarrow \quad X_p(j\omega) = X(j\omega) * P(j\omega)$$

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \qquad a_k = \tfrac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_s t} dt = \tfrac{1}{T}, \qquad \forall k$$

$$P(j\omega) = \tfrac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

$$X_p(j\omega) = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta) P(j(\omega-\theta)) d\theta$$

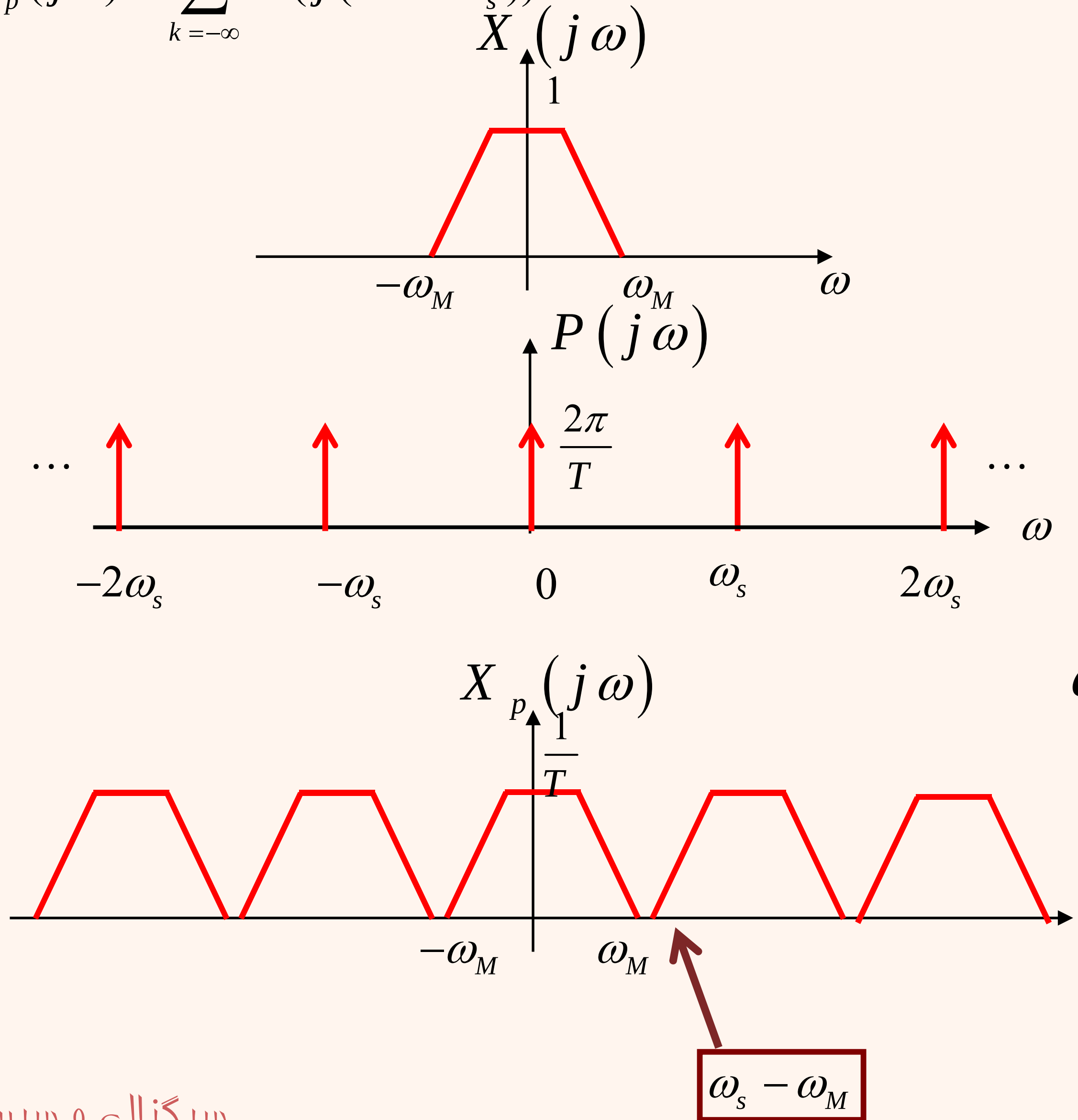
$$X_p(j\omega) = \tfrac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta((\omega - k\omega_s) - \theta) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta) \delta((\omega - k\omega_s) - \theta) d\theta$$

$$= \tfrac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

نمونه‌برداری در دامنه‌ی فرکانس

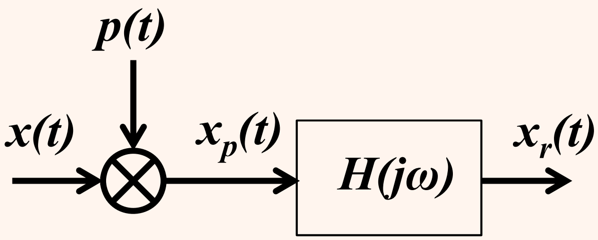
$$X_p(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$

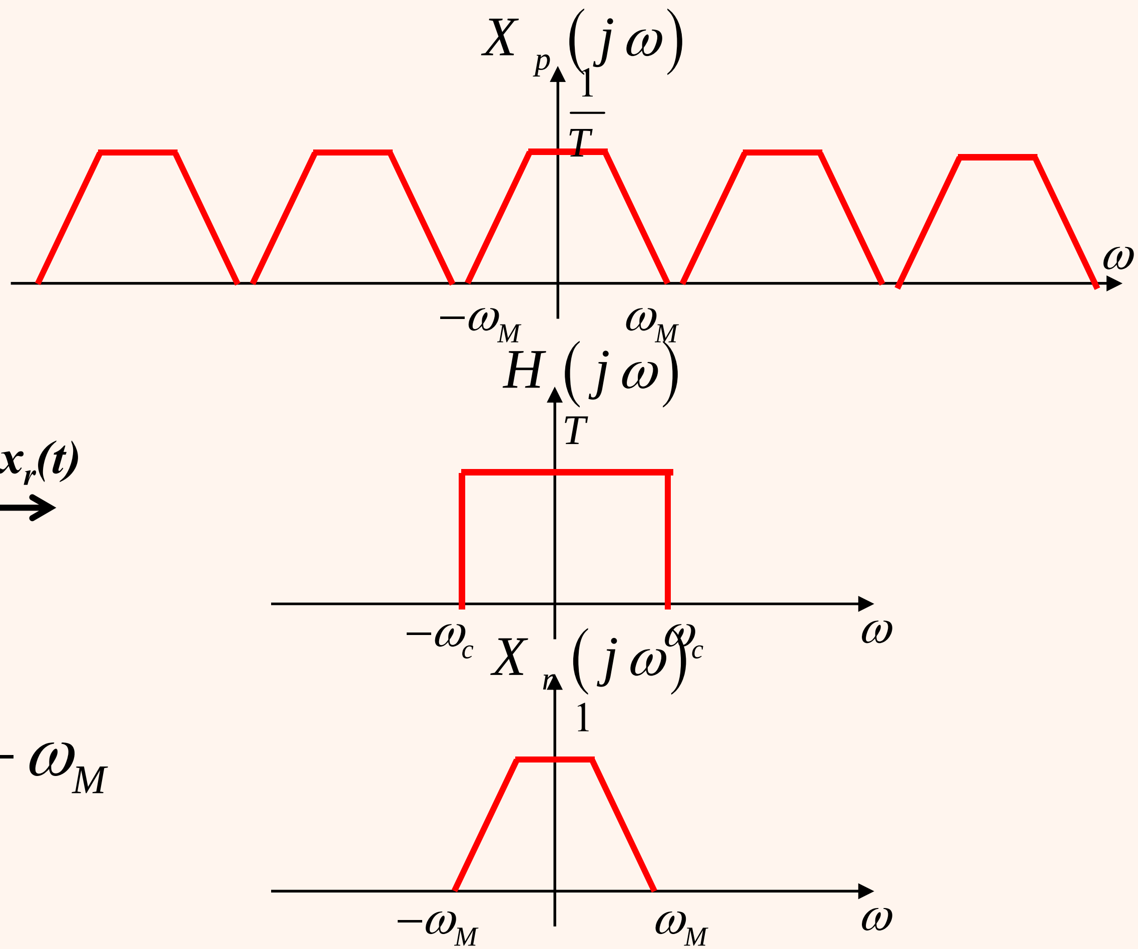


$$\omega_s - \omega_M > \omega_M$$

$$\omega_s > 2\omega_M$$

بازسازی از روی سیگنال نمونه‌برداری شده





$$\omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$$

در صورتی که بین طیف‌های شیفت یافته همپوشانی نباشد از روی
X_p می‌توان X را با استفاده از فیلتر پایین گذر بازسازی نمود

قضیه نمونه‌برداری

- در صورتی که $x(t)$ یک سیگنال با پهنای باند محدود است، به عبارت دیگر

$$X\left(j\omega\right)=0 \quad \text{for } \omega>\omega_M$$

- در این صورت با استفاده از سیگنال نمونه‌برداری شده‌ی x(nT) می‌توان x(t) را به دست آورد اگر

$$\omega_s > 2\omega_M$$

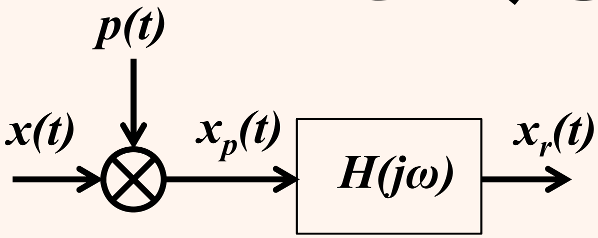
نرخ نایکوییست

Nyquiat rate

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

Harry Nyquist (1889 – 1976)

بازسازی سیگنال در دامنه‌ی زمان



$$x_r(t) = x_p(t) * h(t), \qquad \text{where } h(t) = \frac{T \sin \omega_c t}{\pi t}$$

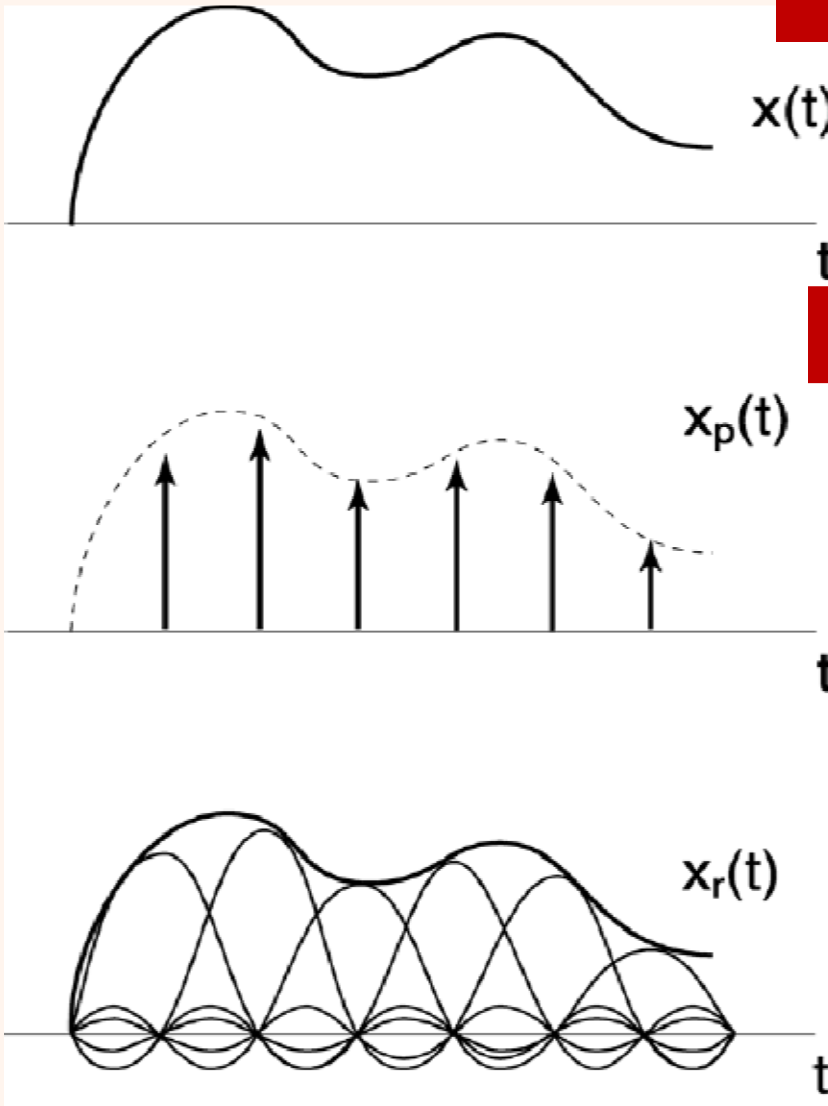
$$x_r(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \right) * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT) == \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{T \sin\left(\omega_c (t-nT)\right)}{\pi (t-nT)}$$

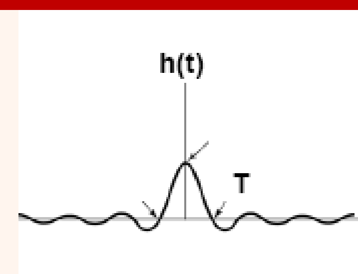
فیلتر پایین گذر درون یابی را با فرض این که سیگنال طیف فرکانسی محدودی دارد، انجام می‌دهد

بازسازی سیگنال در دامنه‌ی زمان

سیگنال اصلی

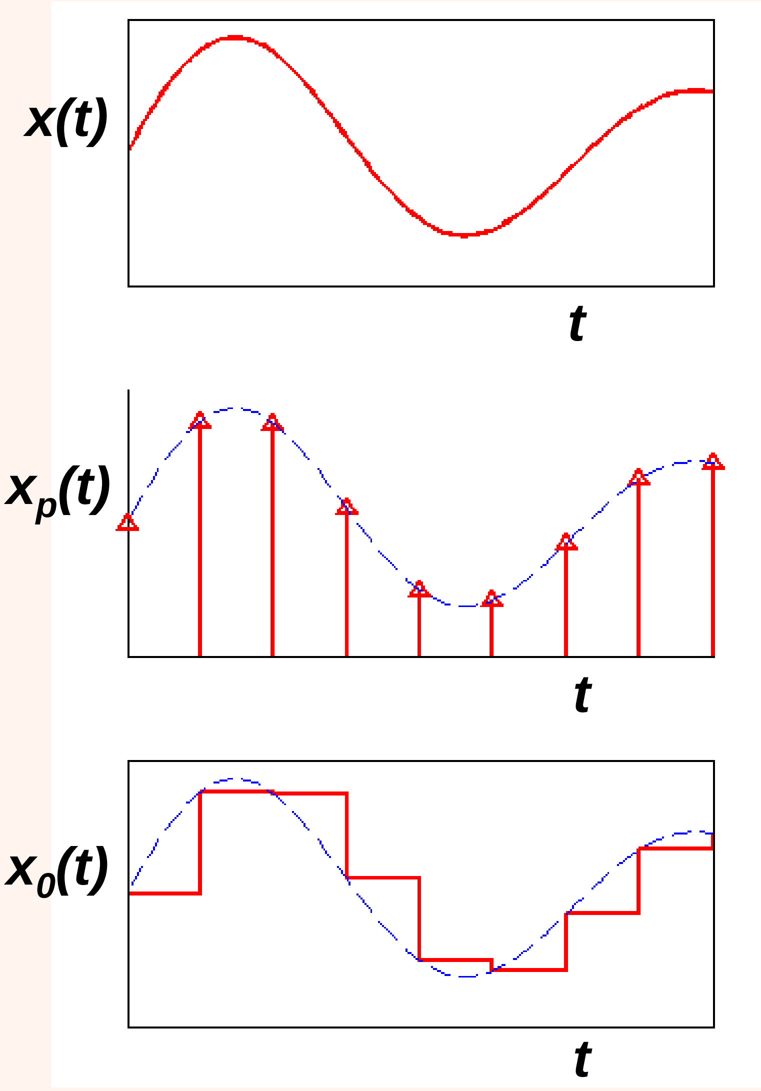


سیگنال نمونه‌برداری شده



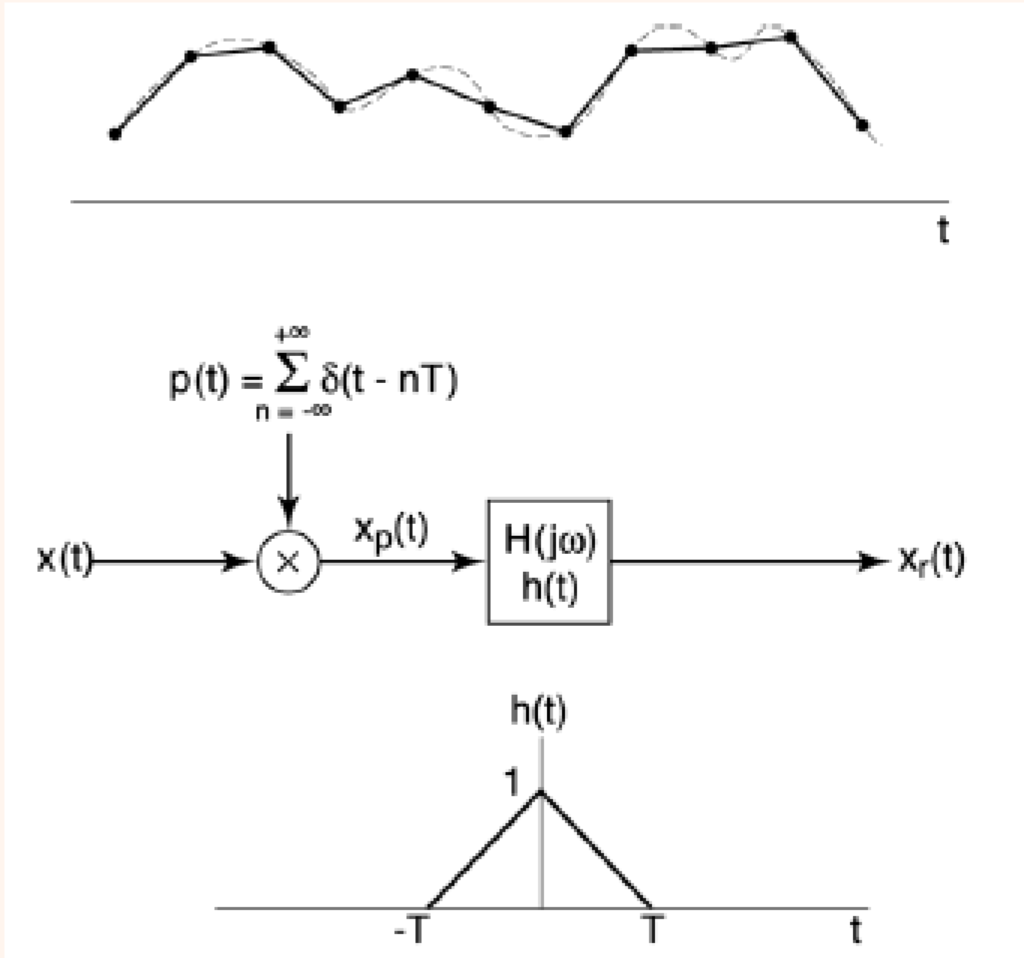
سیگنال بازسازی شده

درون‌یابی

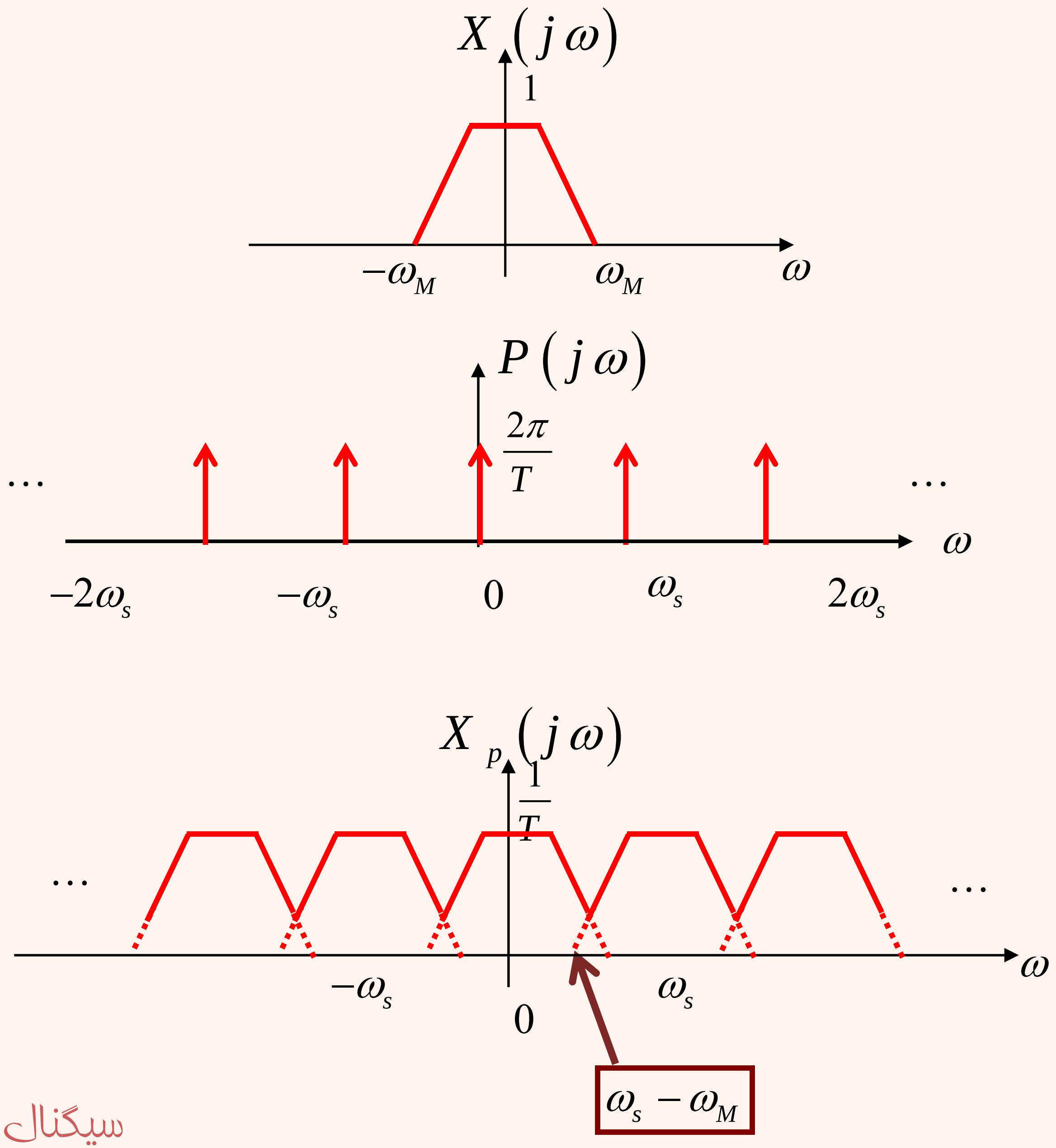


- در عمل برای نمونه‌بردای از قطار ضربه و فیلتر ایده‌آل استفاده نمی‌شود.
- یک نمونه‌ی عملی zero order hold
- درون‌یابی خطی

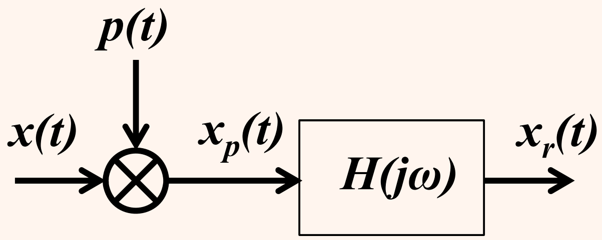
درون‌یابی مرتبه‌ی یک

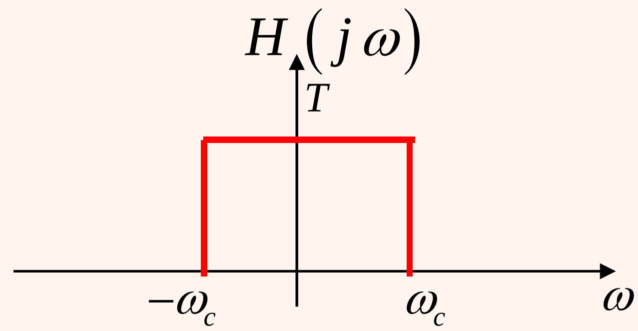


Undersampling and Aliasing



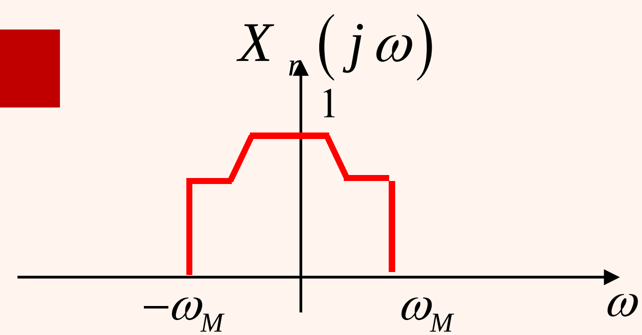
Undersampling and Aliasing



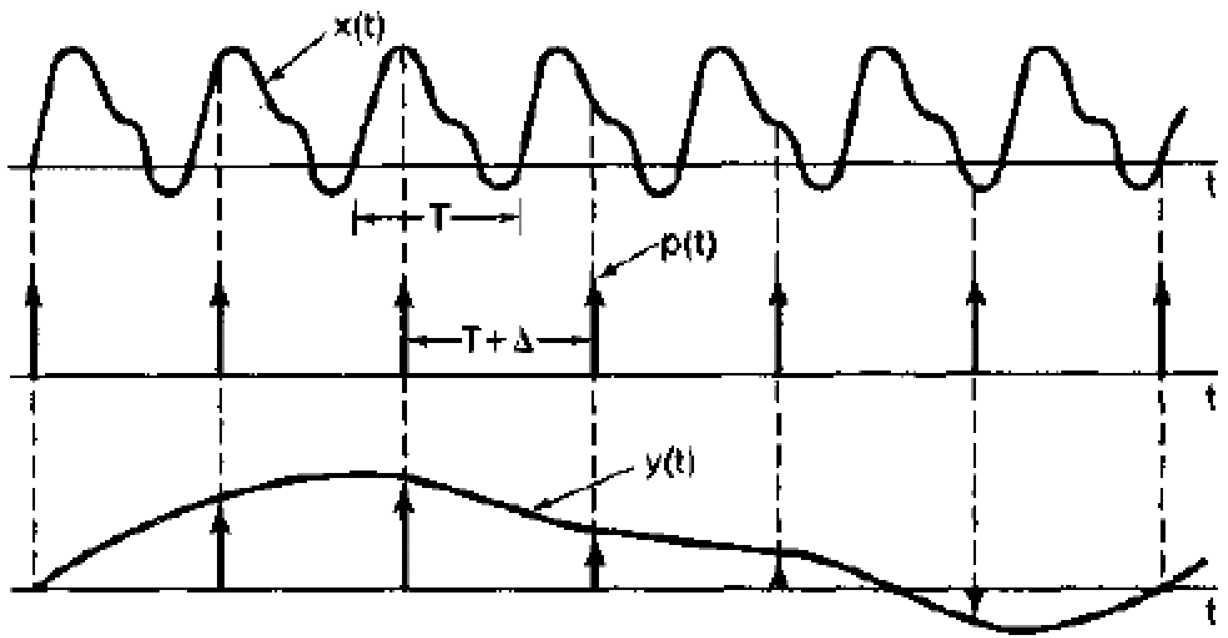


Distortion because of aliasing

$$X_p(j\omega) \neq X_p(j\omega)$$



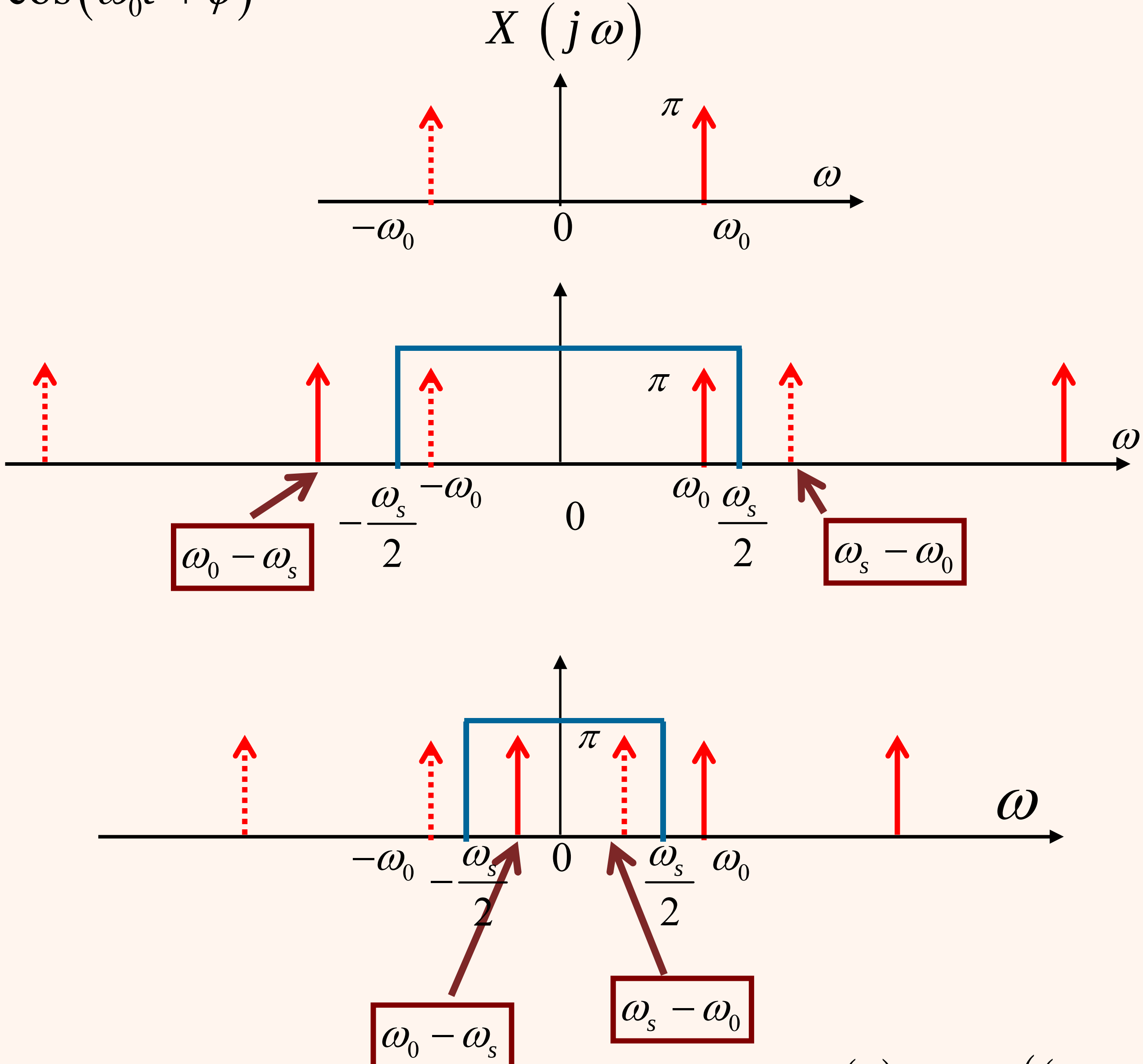
مثال



(a)

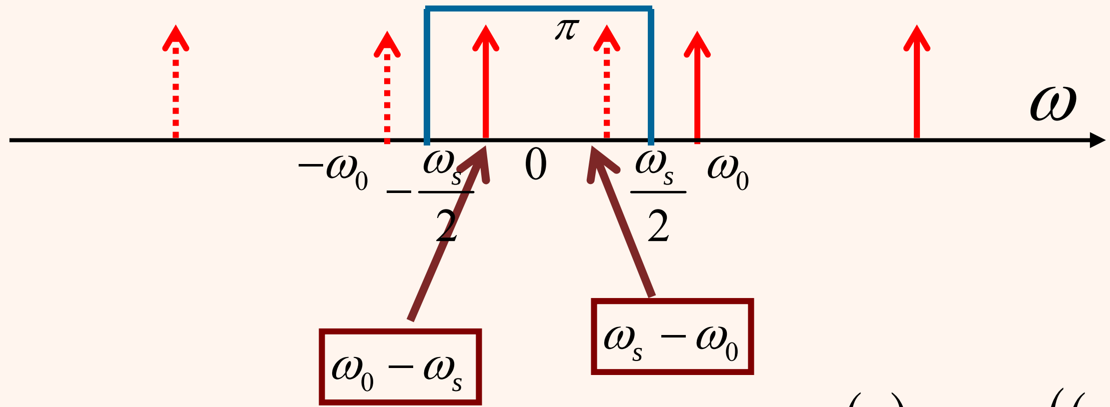
یک مثال ساده

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \phi)$$

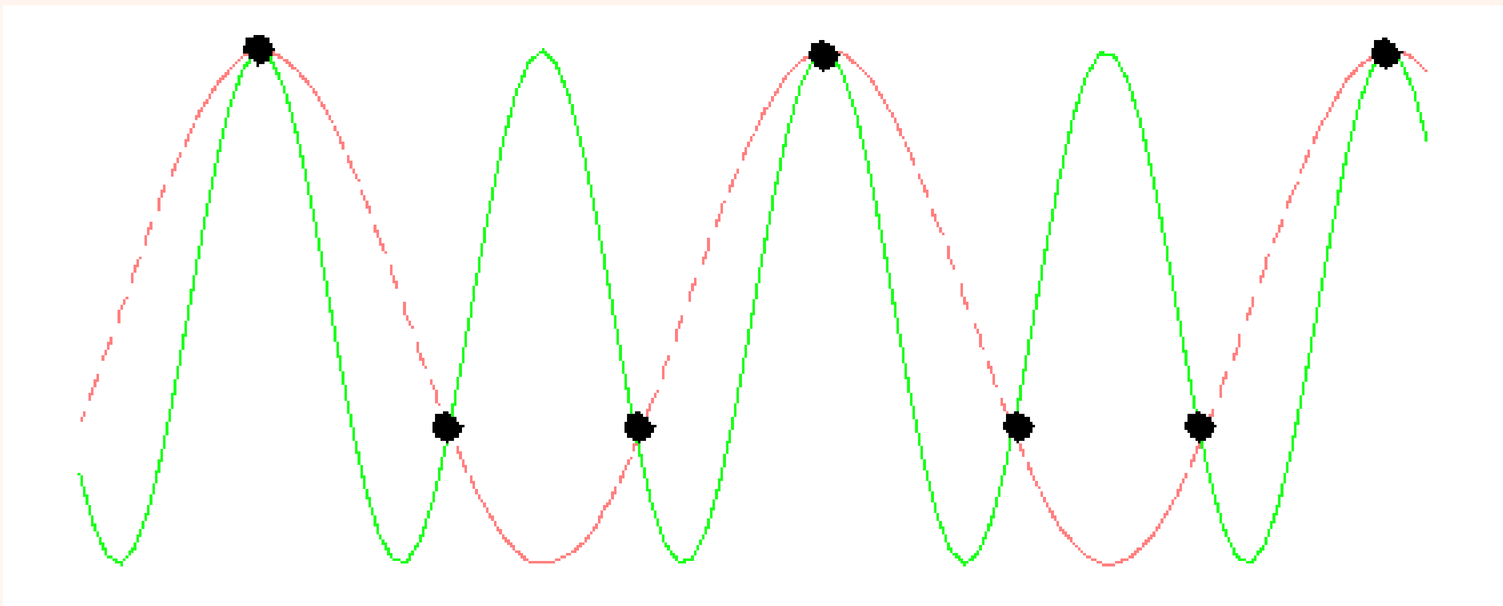


$$x(t) = \cos((\omega_s - \omega_0)t + \phi)$$

ادامه‌ی مثال

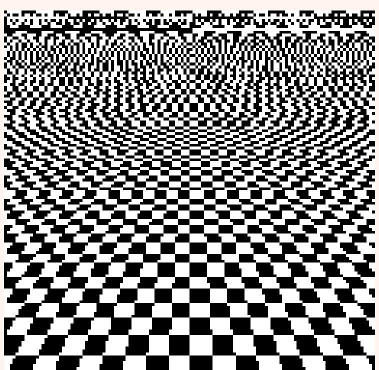


$$x(t) = \cos\left((\omega_s - \omega_M)t + \phi\right)$$

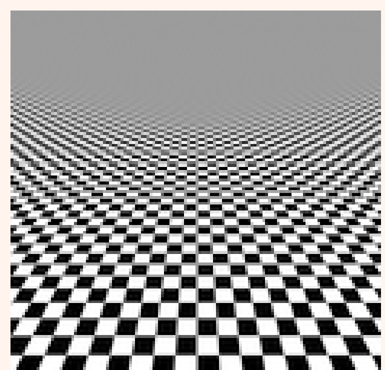


نمونه‌برداری در فضای دوبعدی

- در سیگنال‌های دوبعدی و بالاتر، نمونه‌بردرای نقش مهم‌تری نسبت به سیگنال‌های یک‌بعدی دارد.
- در مواجهه با بردار حرکت در سیگنال‌های ویدئو، گاهی بردار حرکت نیم‌پیکسلی پاسخ مناسب‌تری خواهد داشت.
- افزون بر این، شیوه‌های متنوع‌تری برای نمونه‌برداری قابل استفاده خواهد بود.



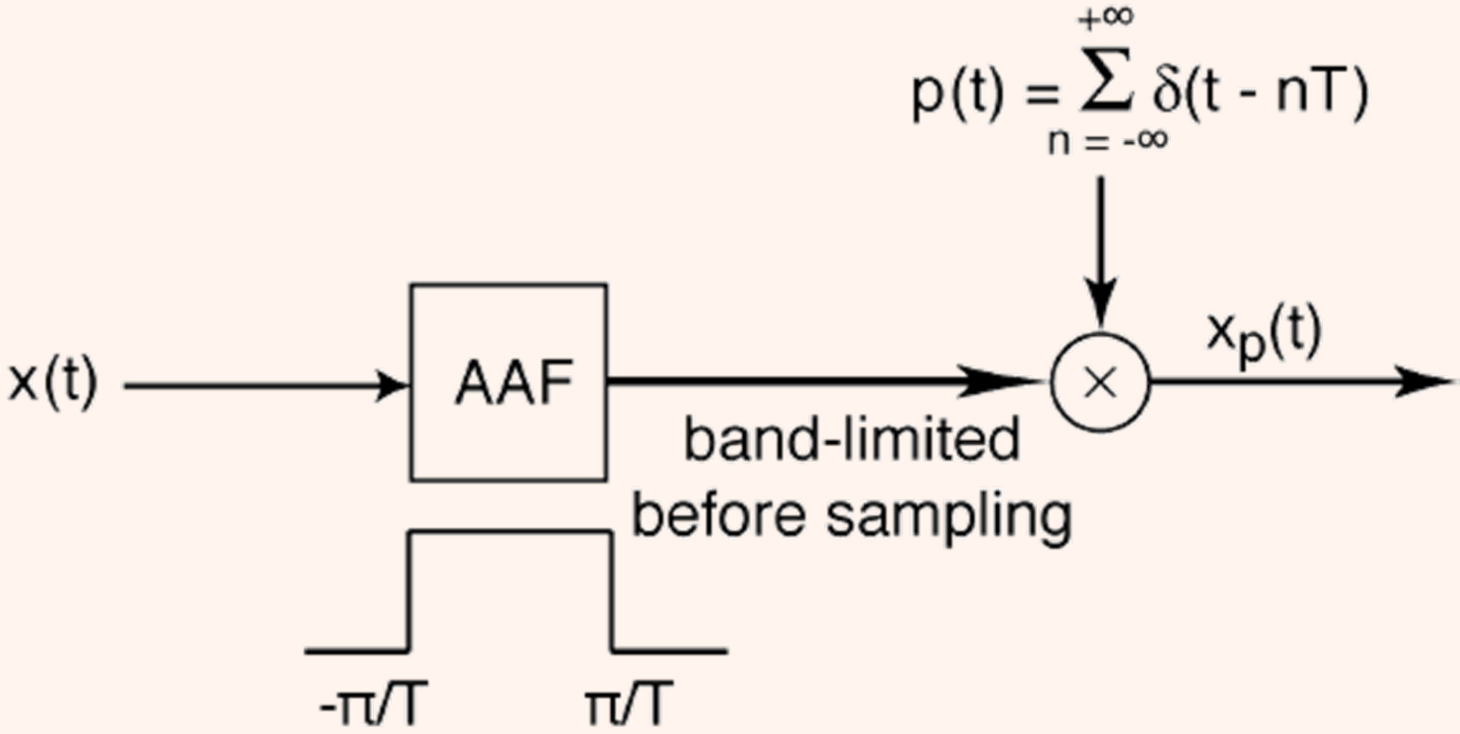
2D Aliasing



anti-aliasing

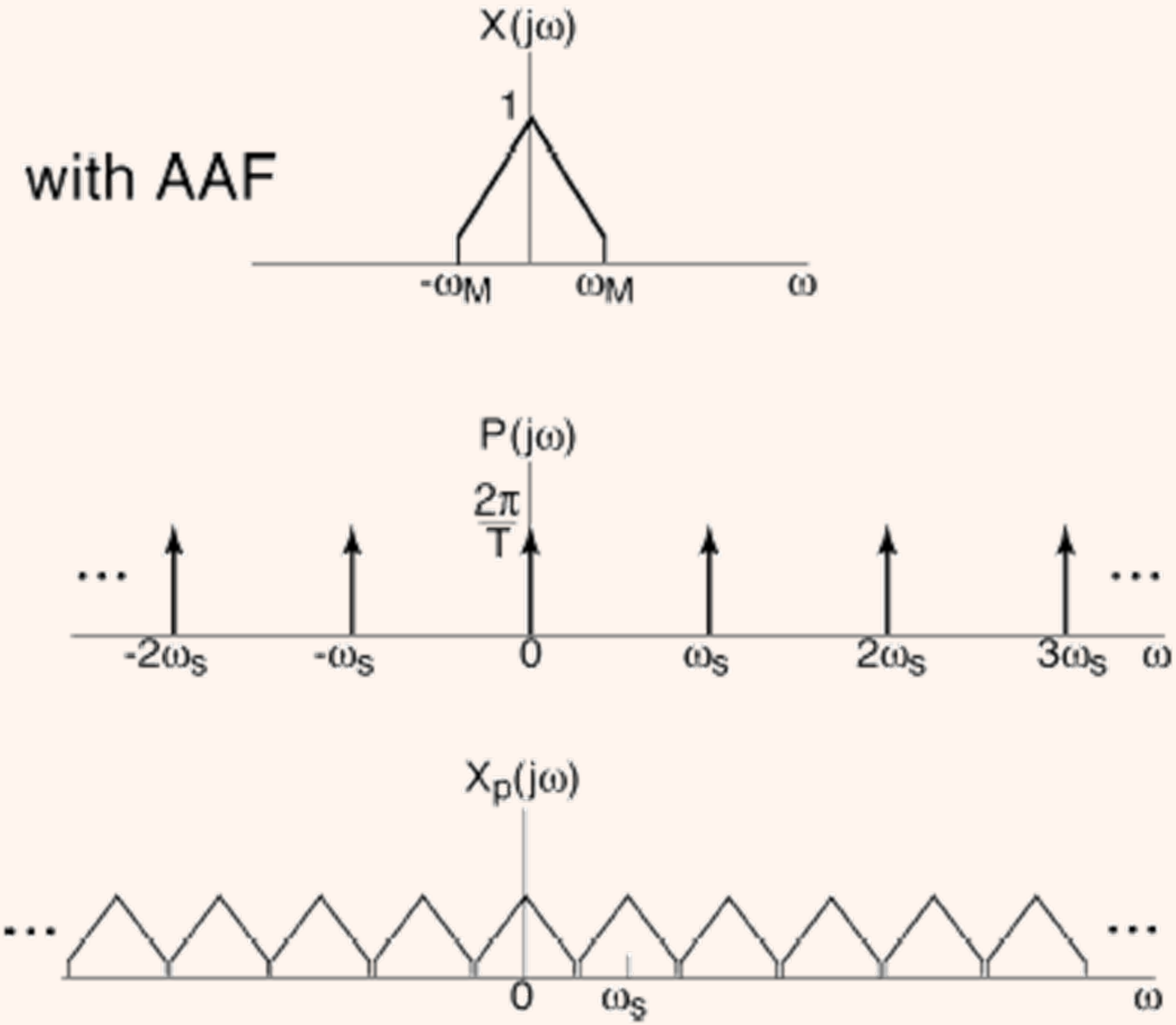
Anti-Alias Filtering (AAF)

- پیش از نمونه‌برداری از فیلتر AAF استفاده می‌شود:



The effect of AAF

with AAF



مثال

- نرخ نمونه‌برداری برای سیگنالی مانند x(t) برابر با ω است، در مورد سیگنال‌های زیر چه می‌توان گفت؟

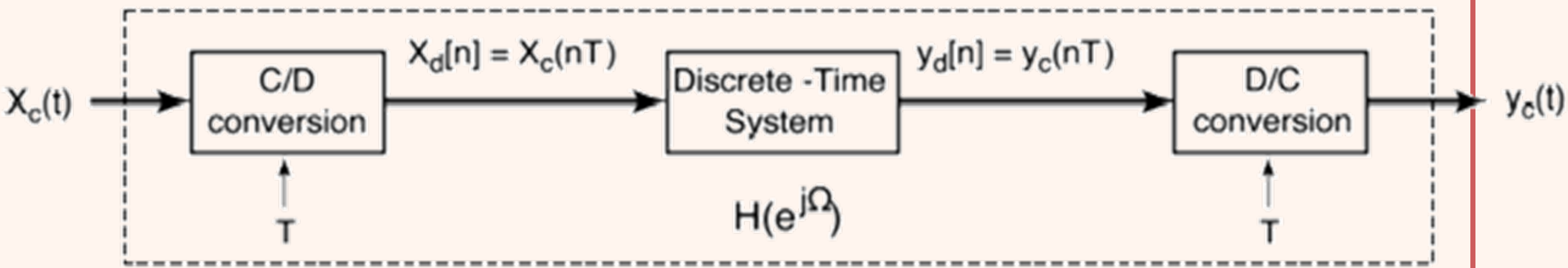
$y(t) = x(t) + x(t-1)$ $\quad Y(j\omega) = X(j\omega) + e^{-j\omega}X(j\omega)$ $\quad \omega_0$

$y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ $\quad Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$ $\quad \omega_0$

$y(t) = x(t)^2$ $\quad Y(j\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\left[X(j\omega) * X(j\omega)\right]$ $\quad 2\omega_0$

$y(t) = x(t)\cos\omega_0 t$ $\quad Y(j\omega) = \pi\left[X(j(\omega-\omega_0)) * X(j(\omega+\omega_0))\right]$ $\quad 3\omega_0$

پردازش گسسته‌ی سیگنال‌های زمان‌پیوسته

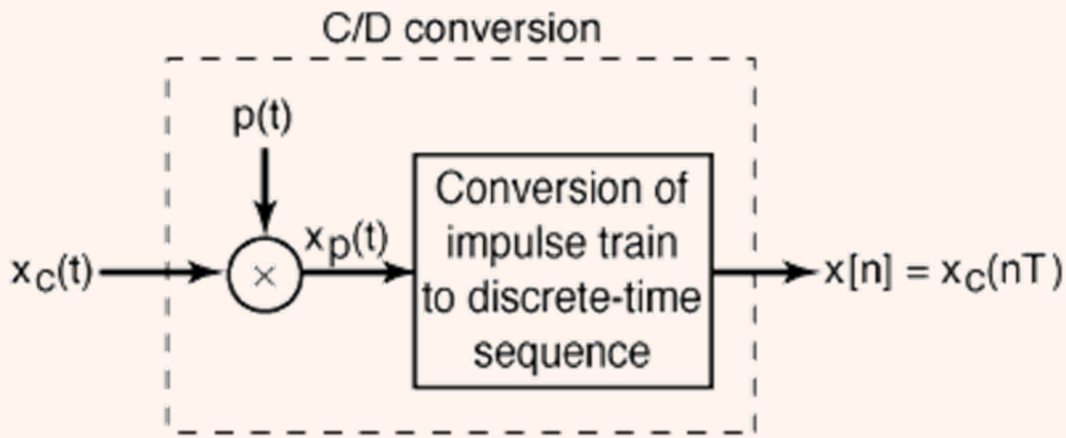


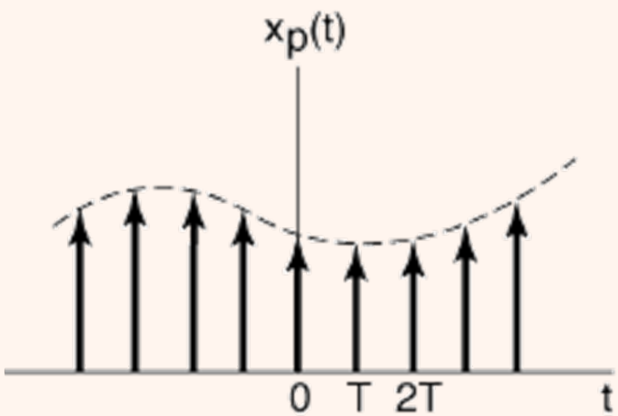
$H_c(j\omega)$

- انجام چنین کاری از این جهات زیر انجام می‌شود:
  - ابزارهای پردازش دیجیتال ارزان و در دسترس است؛ مانند کامپیوترهای شخصی و ریزپردازنده‌ها
  - سیگنال‌های دیجیتال در برابر نویز مقاوم‌تر هستند.

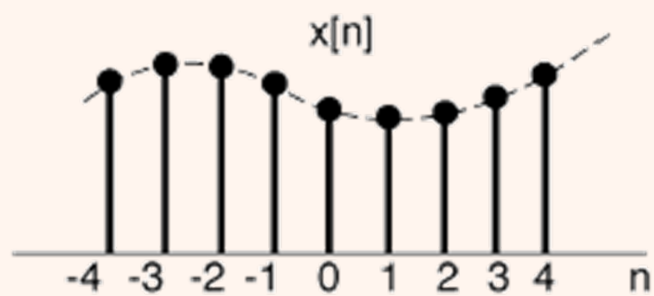
ω— CT frequency variable
Ω — DT frequency variable (Ω =ωT)

تفسیر تبدیل سیگنال پیوسته به گسسته در دامنه‌ی زمان





Discontinuous
CT signal



DT Sequence
$x_d[n] = x_c(nT)$

تحلیل در دامنه‌ی فرکانسی

$$x_p(t) = x_c(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\delta(t-nT)$$

$$\delta(t-t_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0}$$

FT

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT}$$

CT----periodic with period $\omega_s = 2\pi/T$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}$$

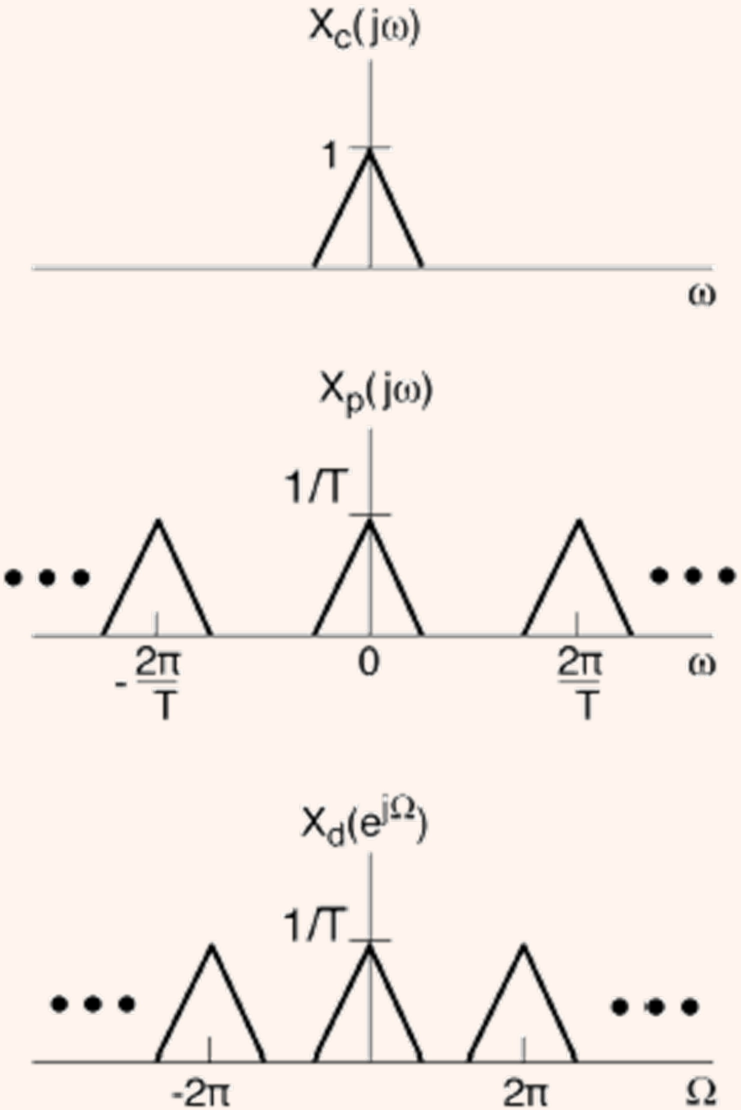
$(\Omega = \omega T)$

DT----periodic with period 2π

$$\boxed{X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(j\frac{\Omega}{T}\right)}$$

Note: $\omega_s \Leftrightarrow 2\pi$
CT DT

تحلیل در دامنه‌ی فرکانسی



$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\frac{\Omega}{T})$$

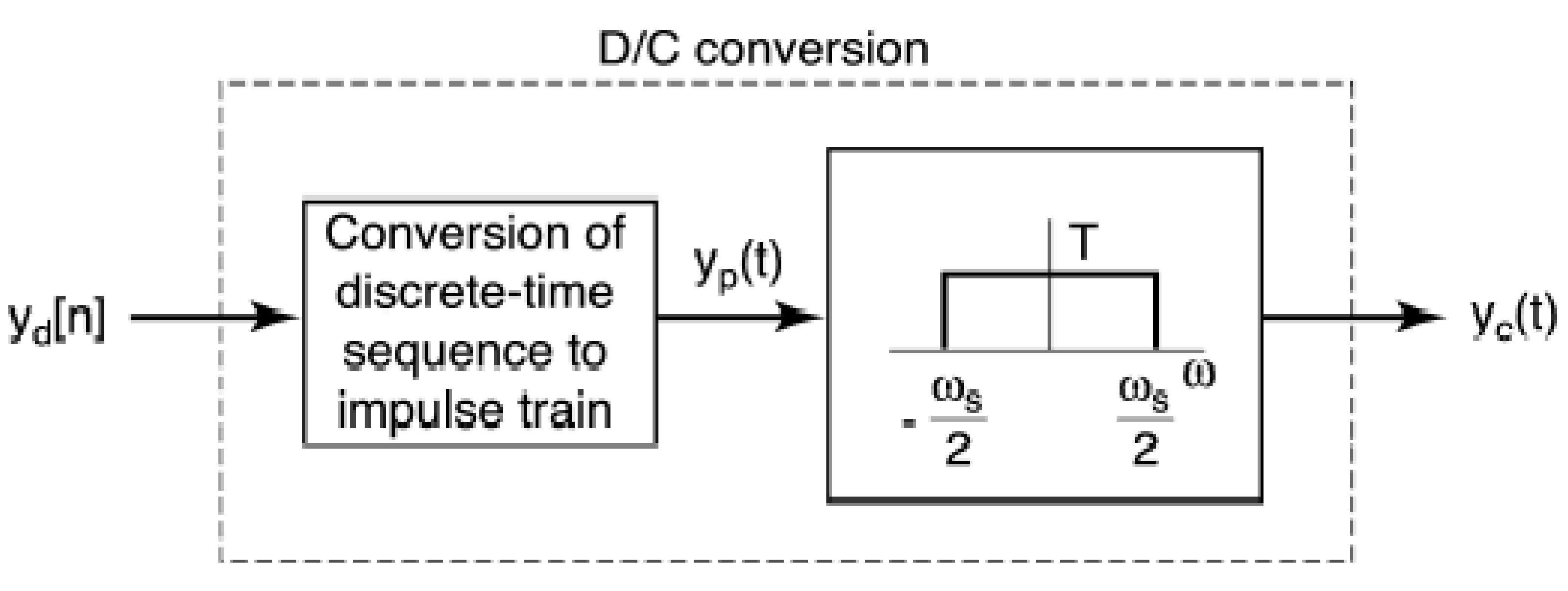
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s))$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\omega nT}$$

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d[n]e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}$$

تبدیل سیگنال گسسته به پیوسته

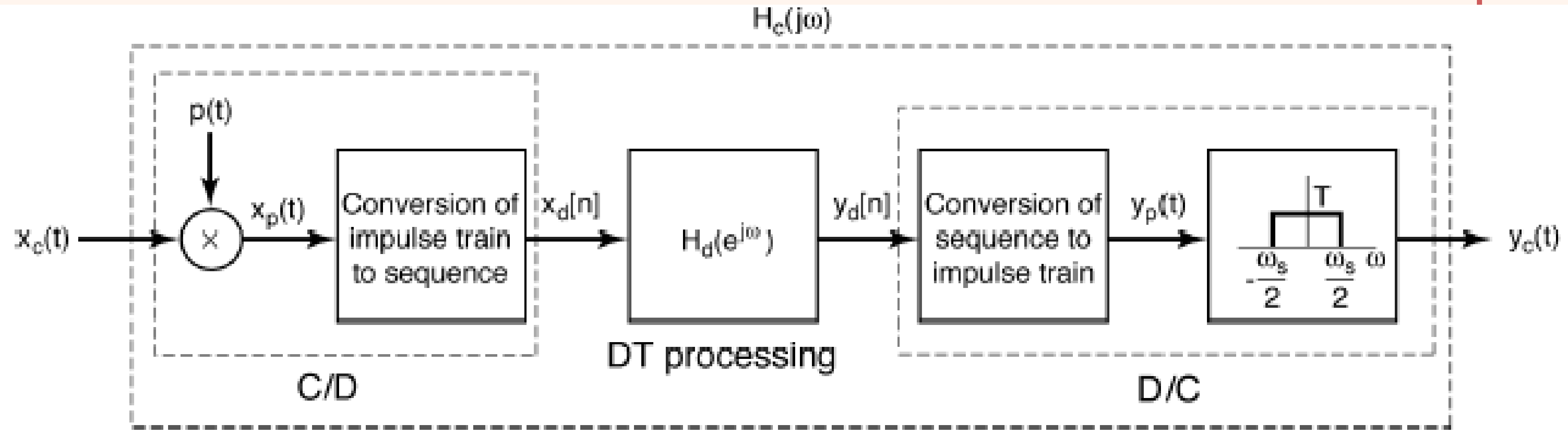


Again, $\Omega = \omega T$

$$Y_p(j\omega) = Y_d(e^{j\omega T}) \qquad \text{Reverse frequency scaling}$$

$$Y_c(j\omega) = \begin{cases} TY_d(e^{j\omega T}) & |\omega| < \dfrac{\omega_s}{2} \quad \text{bandlimited} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

تصویر کلی



$$Y_c(j\omega) = H_c(j\omega)H_c(j\omega) \leftrightarrow y_c(t) = h_c(t) * x_c(t)$$