

سیگنال و سیستم
(تجزیه و تحلیل سیستم‌ها)
۱۸-۱۱-۱۳

بخش سوم

سری فوریه



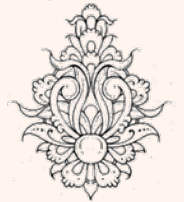
دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

پاییز ۱۳۹۳

احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

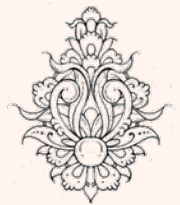
- سیستم‌های LTI و توابع ویژه
- سری فوریه‌ی زمان پیوسته
 - خواص
- سری فوریه‌ی زمان گسسته
 - خواص



پیش‌گفتار

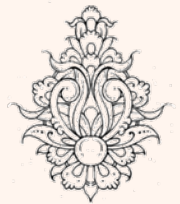
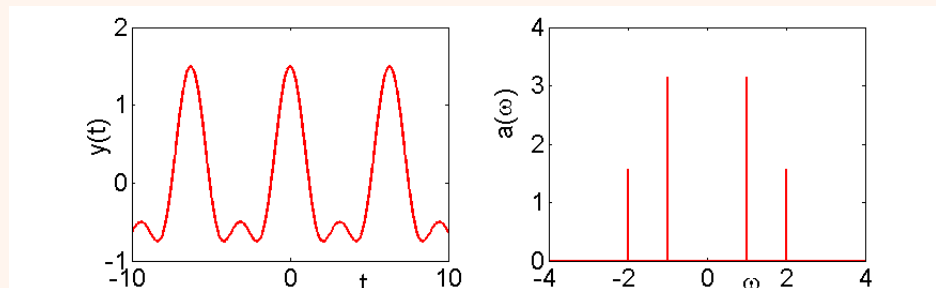
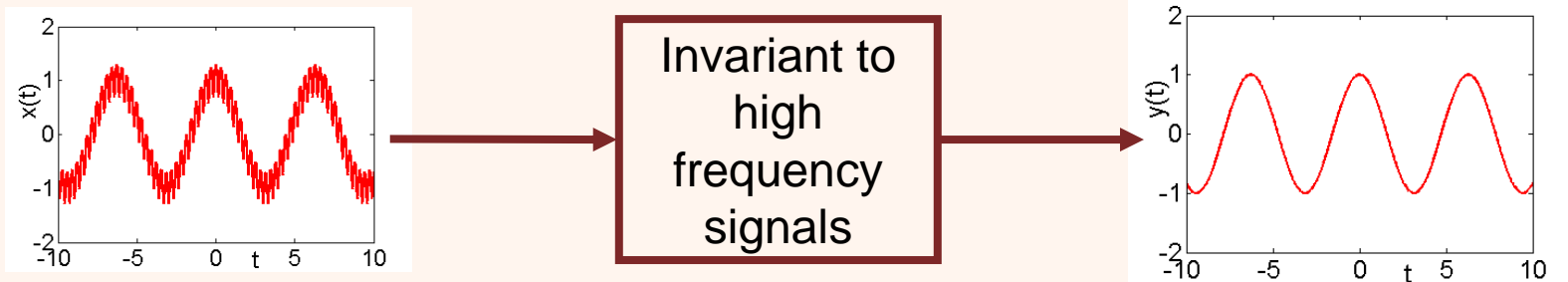
The profound study of nature is the most fertile source of mathematical discoveries.

Joseph Fourier



چرا آنالیز فوریه اهمیت دارد؟

- در بسیاری از کاربردها به تجزیه تحلیل در دامنه فرکانس نیاز داریم.
- با استفاده از این تئوری یک سیگنال از دامنه زمان (مکان) به دامنه فرکانس منتقل می‌شود.



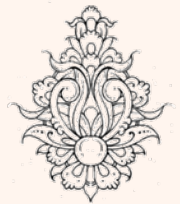
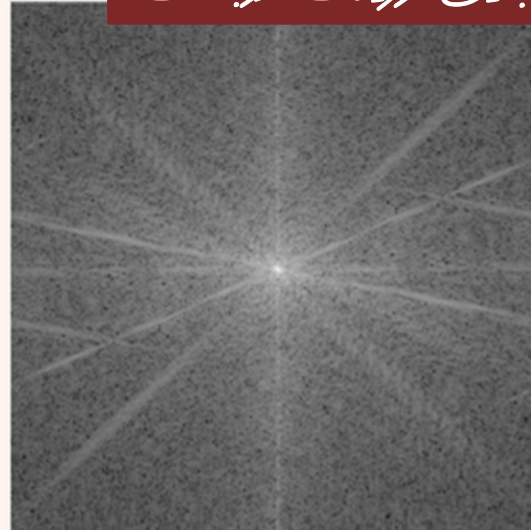
مثال

```
clear all;  
clc;  
Img=imread('cameraman.tif');  
imshow(Img);  
FImg=fft2(Img);  
FImg=fftshift(FImg);  
imshow(log(FImg),[]);
```



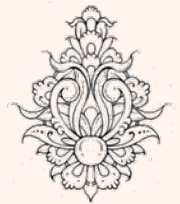
تصویر اصلی

پس از اعمال تبدیل فوریه دو بعدی

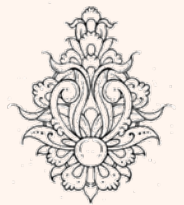
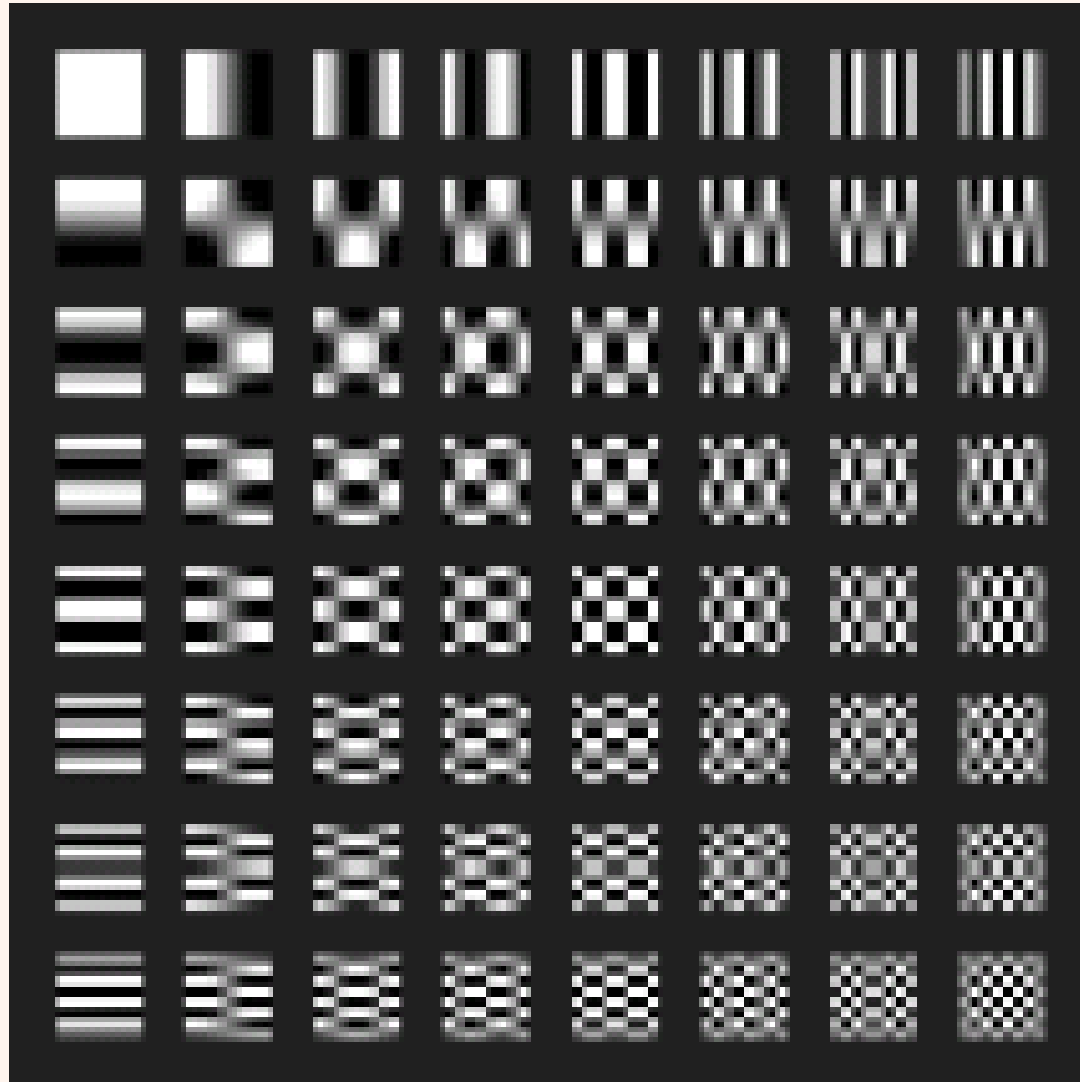


سیگنال‌های پایه

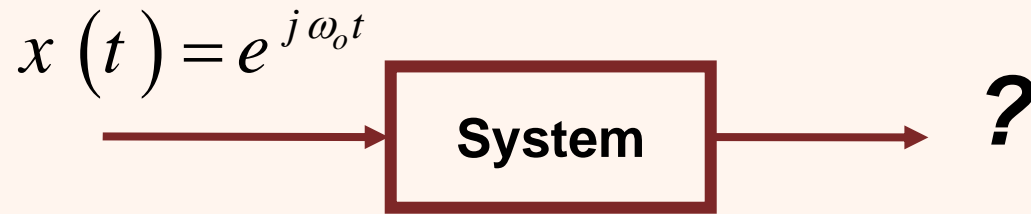
- با استفاده از سیگنال‌های پایه‌ی مناسب می‌توان دسته‌ی بزرگی از سیگنال‌ها را نمایش داد.
- تحلیل پاسخ ورودی‌های مختلف بر این اساس بسیار ساده‌تر خواهد بود.
- در عمل توابع پایه‌ی متنوعی مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- در این بخش به یکی از مهمترین دسته از توابع پایه پرداخته خواهد شد.



تصاویر پایه تبدیل کسینوسی



توابع ویژه و خواص آن



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0(t-\tau)} h(\tau) d\tau$$

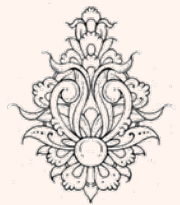
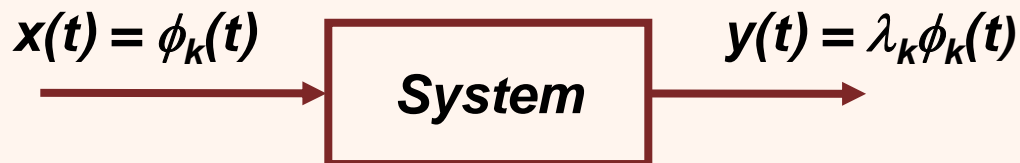
$$y(t) = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 \tau} h(\tau) d\tau$$

تابع ویژه

مقدار ویژه

eigenfunction

eigenvalue



توابع ویژه و خواص آن

- در صورتی که بتوان یک تابع را به صورت مجموع توابع ویژه نوشت:
- $x(t) = \sum_k a_k \phi_k(t)$

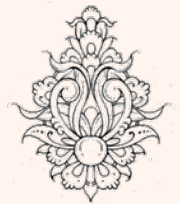
$$x(t) = \phi_k(t)$$



$$y(t) = \lambda_k \phi_k(t)$$

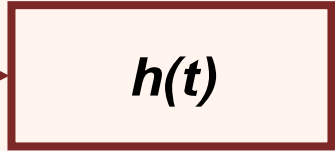
$$x(t) = \sum_k a_k \phi_k(t)$$

$$y(t) = \sum_k a_k \lambda_k \phi_k(t)$$



توابع نمایی مختلف زمان پیوسته

$$x(t) = e^{st}$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau$$

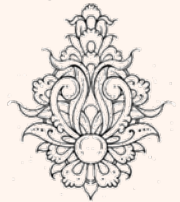
$$y(t) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} h(\tau) d\tau \right] e^{st}$$

$$y(t) = H(s) e^{st}$$

مقدار ویژه

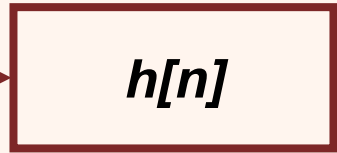
تابع ویژه

در سیستم‌های LTI توابع به شکل $\phi(t) = e^{st}$ (که s عدد مختلط است) توابع ویژه هستند.



توابع نمایی مختلف زمان گسسته

$$x[n] = z^n$$



$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] z^{n-m}$$

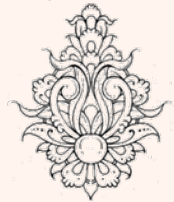
$$y[n] = \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] z^{-m} \right] z^n$$

$$y(t) = H[z] z^n$$

مقدار ویژه

تابع ویژه

در سیستم‌های LSI توابع به شکل $\phi[n] = z^n$ (که z عدد مختلط است) توابع ویژه هستند.



سیگنال‌های متناوب و سری فوریه

- $x(t) = x(t+T)$ for all t
 - به کوچک‌ترین T ، fundamental period گفته می‌شود.
 - $\omega_0 = 2\pi/T$ ، fundamental frequency گفته می‌شود.
- هر سیگنال متناوب را می‌توان با کمک سری فوریه نمایش داد.
- توابع پایه‌ی زیر برای نمایش سیگنال متناوب با دوره‌ی تناوب T به کار می‌رود.

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

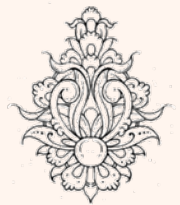


سیگنال‌های متناوب و سری فوریه (ادامه...)

- سیگنال متناوب $x(t)$ با استفاده از توابع پایه‌ی سری فوریه به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

- ضرایب a_k ضرایب سری فوریه نامیده می‌شوند.
- a_0 مؤلفه‌ی DC
- $a_{\pm 1}$ مؤلفه‌ی اساسی (هارمونیک اول)
- $a_{\pm n}$ هارمونیک n ام



محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه-مثال

- ضرایب سری فوریه‌ی تابع زیر را محاسبه کنید.

$$x(t) = \cos(4\pi t) + 2\sin(8\pi t)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \left[e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t} \right] + \frac{1}{j} \left[e^{j8\pi t} - e^{-j8\pi t} \right]$$

$$\omega_0 = 4\pi \quad T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$$

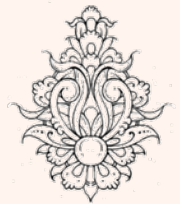
$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{1}{j}$$

$$a_{-2} = \frac{-1}{j}$$



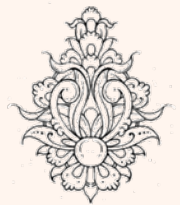
سری فوریه

- برای نمایش توابع حقیقی با استفاده از سری فوریه می‌توان به شیوه‌ی زیر نیز عمل کرد:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos k \omega_0 t + \beta_k \sin k \omega_0 t]$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\gamma_k \cos(k \omega_0 t + \theta_k)]$$

- با توجه به خواص توابع ویژه، از شیوه‌ی پیش استفاده می‌کنیم.



محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

• طرفین را در $e^{-jn\omega_0 t}$ ضرب می‌کنیم.

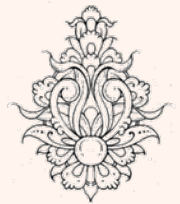
$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

• از طرفین انتگرال می‌گیریم.

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} dt$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T \delta(n-k)$$

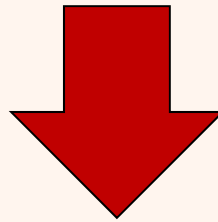
$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$
$$= K\delta(n-k)$$

تعامد



محاسبه‌ی ضرایب سری فوریه

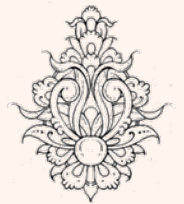
$$\int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T \delta(n-k)$$



$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k$$

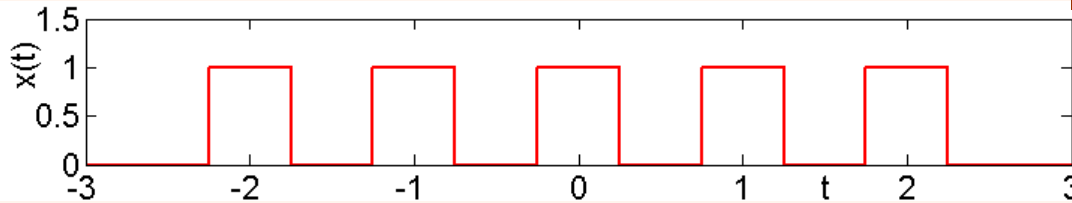


مثال

• سری فوریه سیگنال زیر را محاسبه کنید:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$



$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} 1 dt = \frac{2T_1}{T}$$

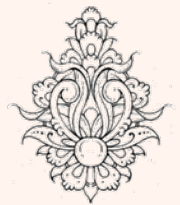
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$= \frac{2}{k\omega_0 T} \left(\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right)$$

$$= 2 \sin(k\omega_0 T_1) / k\omega_0 T$$

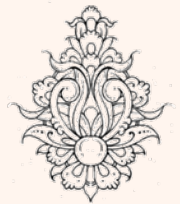
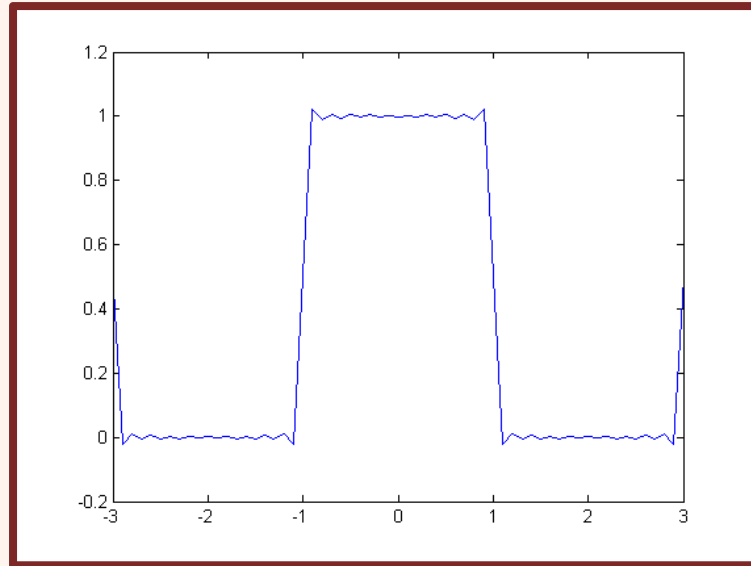
$$= \sin(k\omega_0 T_1) / k\pi$$

مؤلفه DC مقدار
میانیین سیگنال است

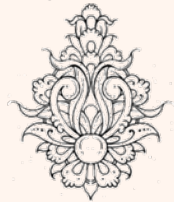
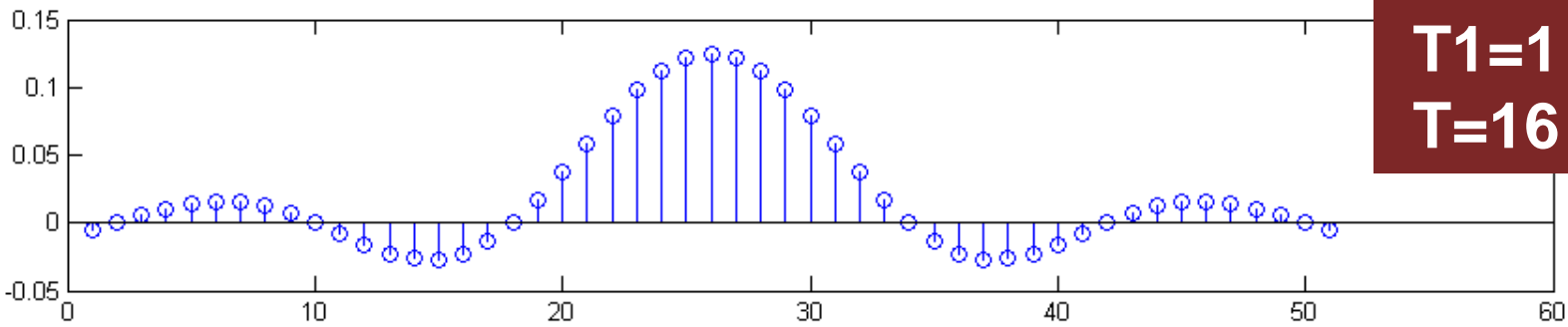
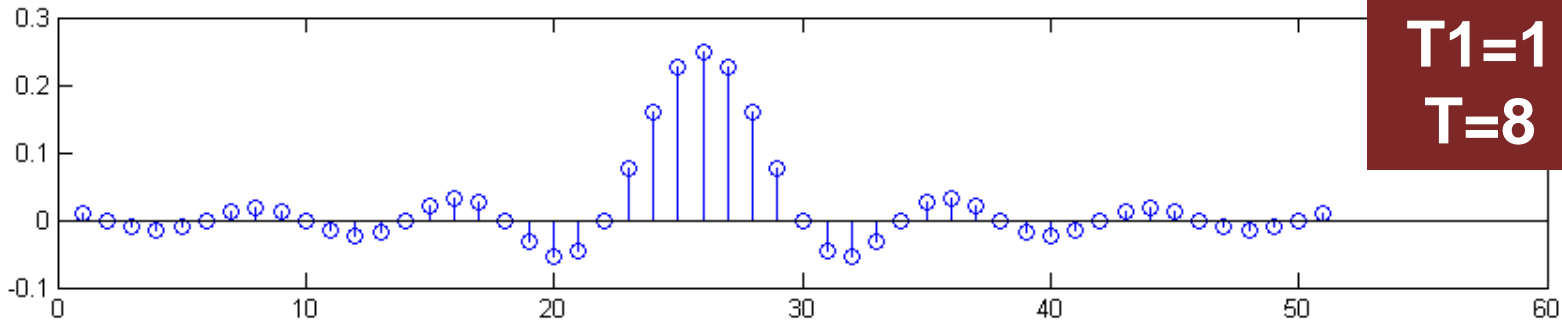
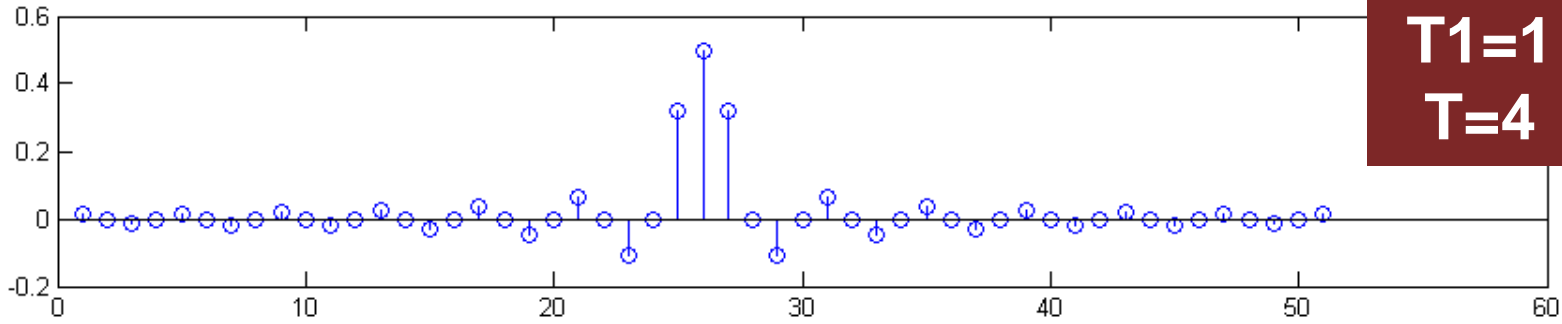


مثال

```
clear all;
clc;
T1=1;
T=4;
W=2*pi/T;
a0=2*T1/T;
x=[-3:0.1:3];
y=ones(size(x)).*a0;
plot(x,y);
for k=1:100
    a(k)=sin(k*W*T1)/(k*pi);
    y=y+(a(k).*(exp(j*k*W*x)+exp(-j*k*W*x)));
    plot(x,y);
end
```



مثال (ادامه...)



همگرایی سری فوریه

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

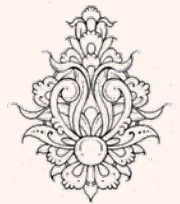
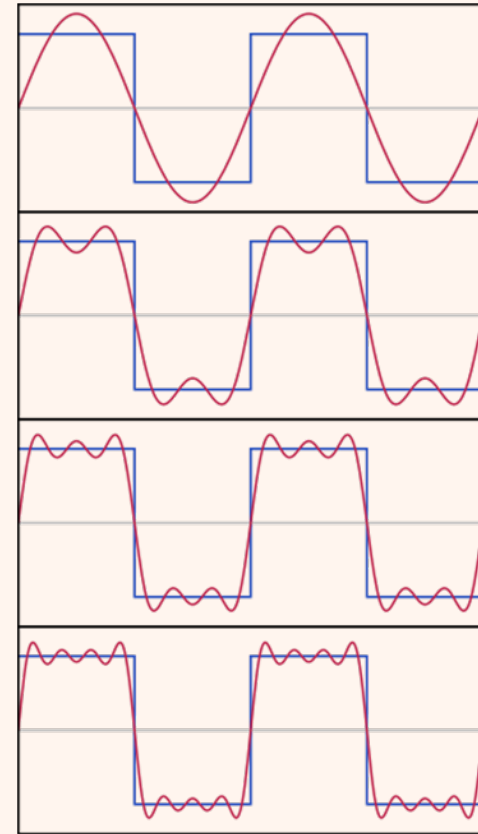
$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$E_N = \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \int_{T_0} e_N(t) e_N^*(t) dt$$

$$\int_0^T |x(t)| dt < \infty$$

$$|a_k| < \infty$$



شرایط Dirichlet

شرایط کافی برای موجود بودن ضرایب سری فوریه

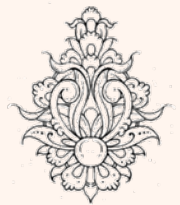
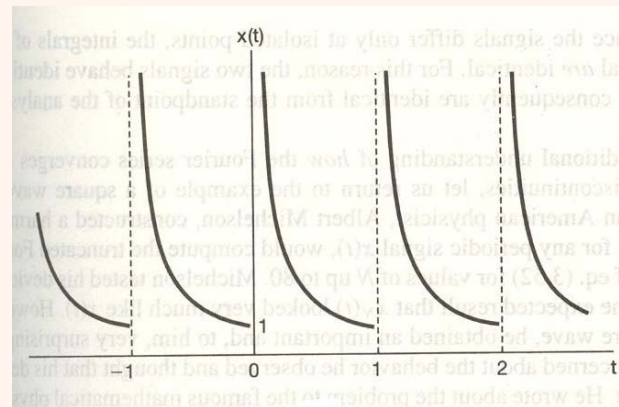
- $x(t)$ به طور مطلق در یک دوره انتگرال پذیر باشد.

$$|a_k| \leq \frac{1}{T_0} \int_0^T |x(t) e^{-jk\omega_0 t}| dt < \frac{1}{T_0} \int_0^T |x(t)| dt$$

$$\frac{1}{T_0} \int_0^T |x(t)| dt < \infty \quad |a_k| < \infty$$

• مثال:

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1$$

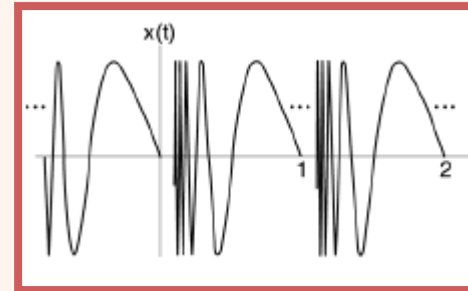


شرایط Dirichlet (ادامه...)

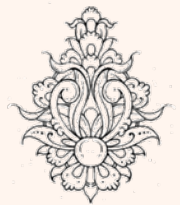
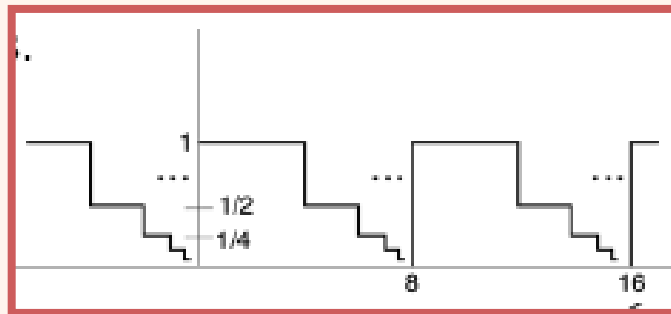
شرایط کافی برای موجود بودن ضرایب سری فوریه

- $x(t)$ به طور مطلق در یک دوره، تعداد محدودی نقاط مینیمم و ماکزیمم داشته باشد.

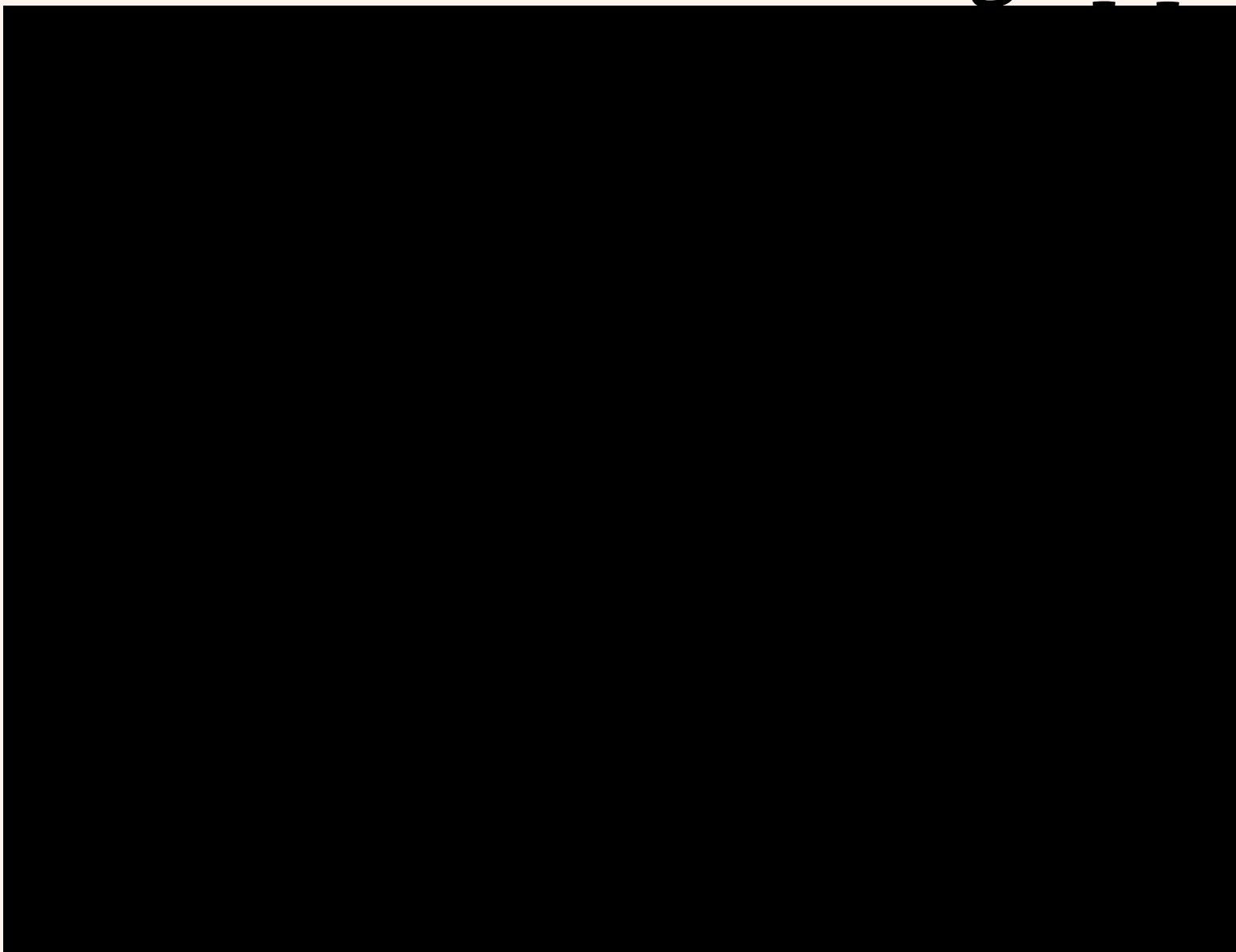
$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t < 1$$



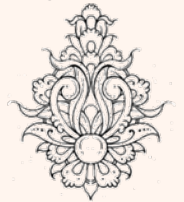
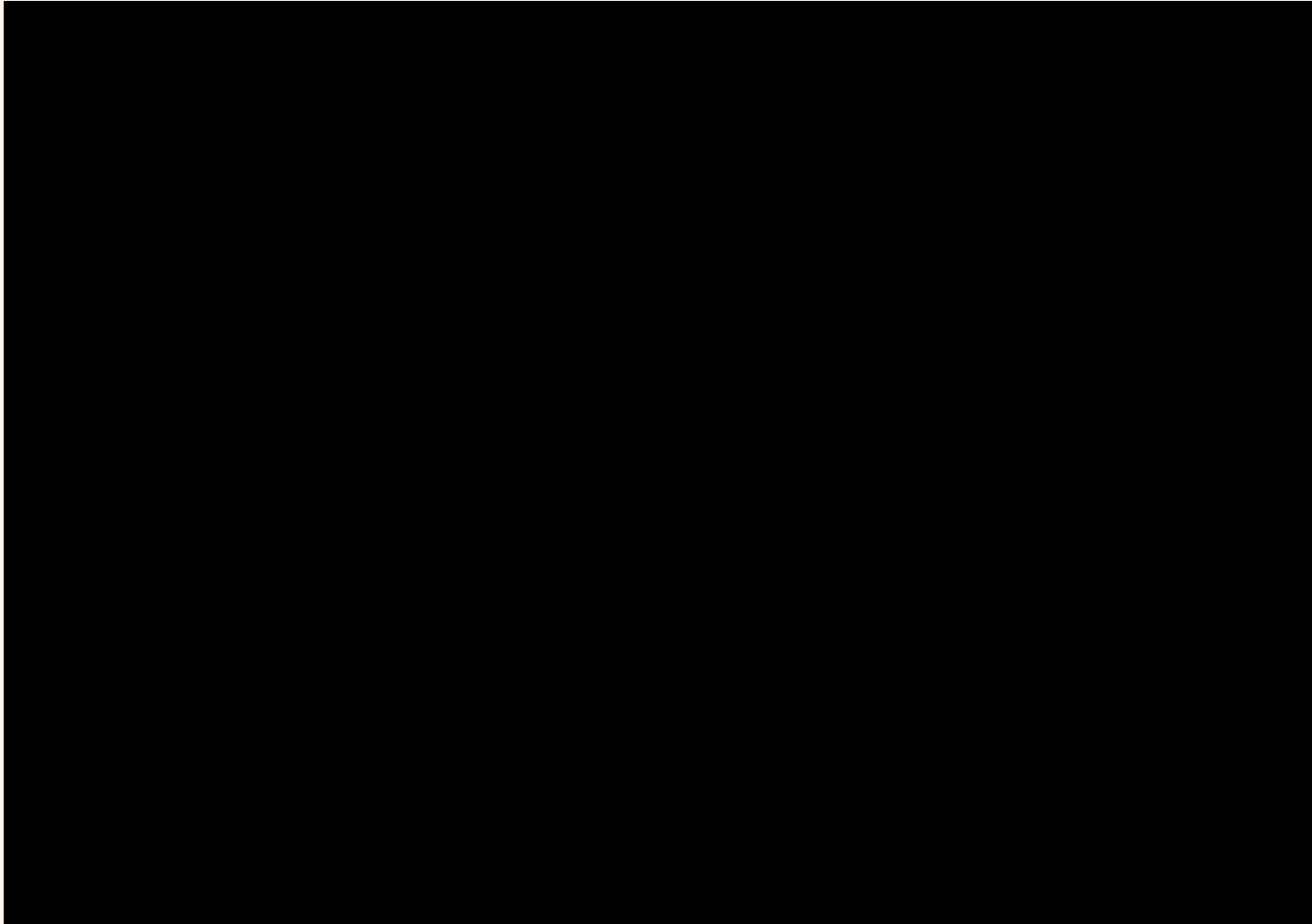
در یک دوره‌ی تناوب تعداد نقاط گسستگی محدودی داشته باشد.



Gibbs دیدہی



مثال



یک مثال مهم

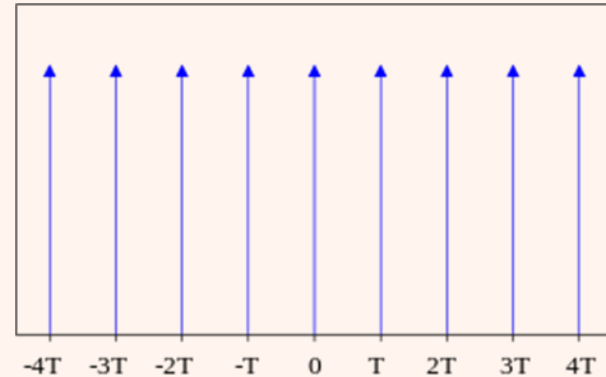
از این تابع برای نمونه برداری استفاده می شود

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

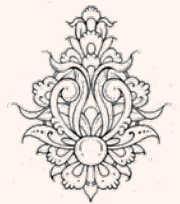
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T} \quad \text{for all } k!$$

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-N}^N e^{jk\omega_0 t}$$



همه‌ی مؤلفه‌های دارای فاز و اندازه‌ی یکسانی هستند



برخی خواص سری فوریه پیوسته

• خطی بودن:

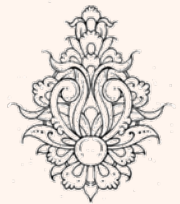
$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k \quad y(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} b_k$$

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} c_k = Aa_k + Bb_k$$

• شیفیت زمانی:

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k$$

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$$



برخی خواص سری فوریه پیوسته (ادامه...)

- قرینه کردن نسبت به محور زمان:

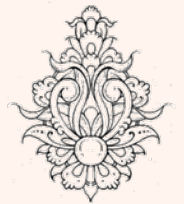
$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k \quad x(-t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_{-k}$$

- اگر سیگنال زوج باشد:

$$x(t) = x(-t) \Rightarrow a_k = a_{-k}$$

- اگر سیگنال فرد باشد:

$$x(t) = -x(-t) \Rightarrow a_k = -a_{-k}$$



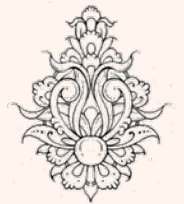
مثال

• شیفیت به اندازهی نیم‌پریود

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k$$

$$x\left(t - \frac{T}{2}\right) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k e^{-jk\omega_0 \frac{T}{2}} = a_k e^{-jk\pi}$$

$$x\left(t - \frac{T}{2}\right) \xleftrightarrow{\text{FS}} (-1)^k a_k$$



برخی خواص سری فوریه پیوسته (ادامه...)

- ضرایب سری فوریه مزدوج:

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k \quad x^*(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_{-k}^*$$

- اگر سیگنال حقیقی باشد:

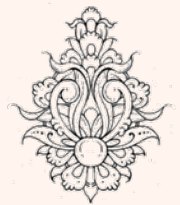
$$x(t) = x^*(t) \Rightarrow a_{-k}^* = a_k \quad \text{or} \quad a_k^* = a_{-k}$$

$$a_k = \text{Re}\{a_k\} + j \text{Im}\{a_k\} = |a_k| e^{j\angle a_k}$$

$$x(t) = x^*(t) \Rightarrow |a_k| = |a_{-k}| \quad \angle a_{-k} = -\angle a_k$$

زوج است

فرد است



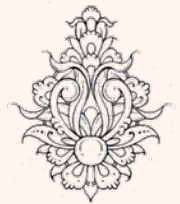
برخی خواص سری فوریه پیوسته (ادامه...)

$$x(t) \text{ حقیقی و زوج} \longrightarrow a_k \text{ حقیقی و زوج}$$

$$x(t) \text{ حقیقی و فرد} \longrightarrow a_k \text{ موهومی و فرد}$$

$$Ev\{x(t)\}[\mathbf{x}(t)\text{real}] \longrightarrow \text{Re}\{a_k\}$$

$$Od\{x(t)\}[\mathbf{x}(t)\text{real}] \longrightarrow j \text{Im}\{a_k\}$$



برخی خواص سری فوریه پیوسته (ادامه...)

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k$$

• مشتق:

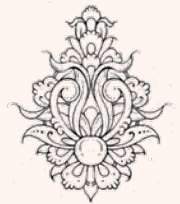
$$x'(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} (jk\omega_0) a_k$$

$$x^{(n)}(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} (jk\omega_0)^n a_k$$

• تغییر مقیاس (Time Scaling):

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k$$

در این حالت ضرایب سری فوریه تفاوتی نمی‌کنند



ضرب

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k \quad y(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} b_k$$

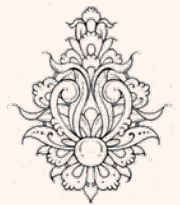
$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} h_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$$

$$x(t)y(t) = \sum_l a_l e^{jl\omega_0 t} \sum_m b_m e^{jm\omega_0 t}$$

$$= \sum_l \sum_m a_l b_m e^{j(l+m)\omega_0 t}$$

$$\xrightarrow{l+m=k} \sum_k \left[\sum_l a_l b_{l-k} \right] e^{j(k)\omega_0 t}$$

اثبات:



اثبات رابطه ضرب

اوش سوم

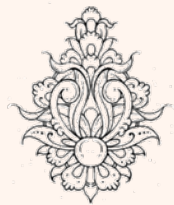
$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} z(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} \right] y(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} y(t) e^{-j(k-n)\omega_0 t} dt \right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n b_{k-n}$$



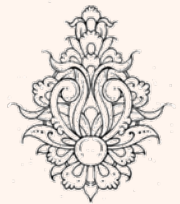
رابطه‌ی Parseval

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

انرژی متوسط سیگنال

انرژی هارمونیک کام

انرژی چه در دامنه‌ی فرکانس اندازه‌گیری شود و چه در و دامنه‌ی زمان تفاوتی نخواهد داشت



مثال

راه اول

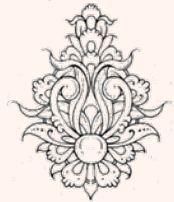
• ضرایب سری فوریه را برای سیگنال زیر محاسبه کنید:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

$$T_0 = 2$$

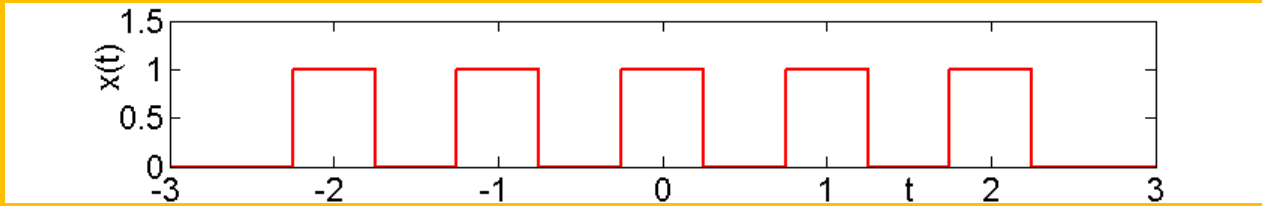
$$a_k = \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 e^{-jk\pi t} dt - \int_1^2 e^{-jk\pi t} dt \right]$$

$$a_k = \frac{1 - e^{-jk\pi}}{jk\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ even} \\ \frac{2}{jk\pi} & k \text{ odd} \end{cases}$$



مثال

اوش يوم

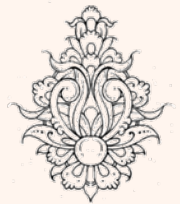


$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T/2 \end{cases} \quad a_k = \sin(k \omega_0 T_1) / k \pi$$

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \end{cases} \quad a_{1k} = \frac{\sin(k \pi / 2)}{k \pi} e^{-jk \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{jk \pi}, \quad k \text{ odd}$$

$$x(t) = x_1(t) - x_1(t - 1)$$

$$a_k = a_{1k} \left[1 - e^{-jk \pi} \right] = \begin{cases} 0 & k \text{ even} \\ 2a_{1k} & k \text{ odd} \end{cases}$$



مثال

اوش سوم

ضرایب سری فوریه را برای سیگنال زیر محاسبه کنید:

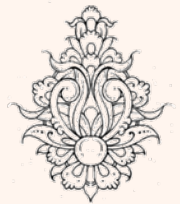
$$x(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ -1 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

$$T_0 = 2$$

$$x'(t) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n) - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n - 1)$$

$$x'(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} 1 - e^{jk\pi} = \begin{cases} 0 & k \text{ even} \\ 1 & k \text{ odd} \end{cases}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} \begin{cases} 0 & k \text{ even} \\ \frac{1}{jk\pi} & k \text{ odd} \end{cases}$$



مثال

• از اطلاعات زیر در دست است:

– حقیقی است.

– متناوب است با $T=4$

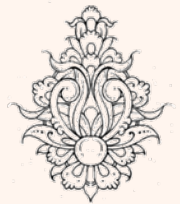
– ضرایب سری فوریه به ازای $|k| > 1$ صفر است.

– $y(t)$ فرد است و ضرایب سری فوریه آن $b_k = e^{-jk\frac{\pi}{2}} a_{-k}$

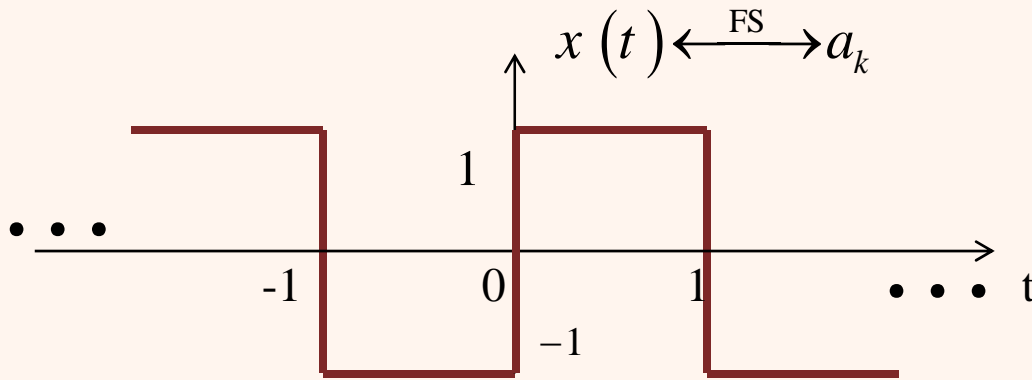
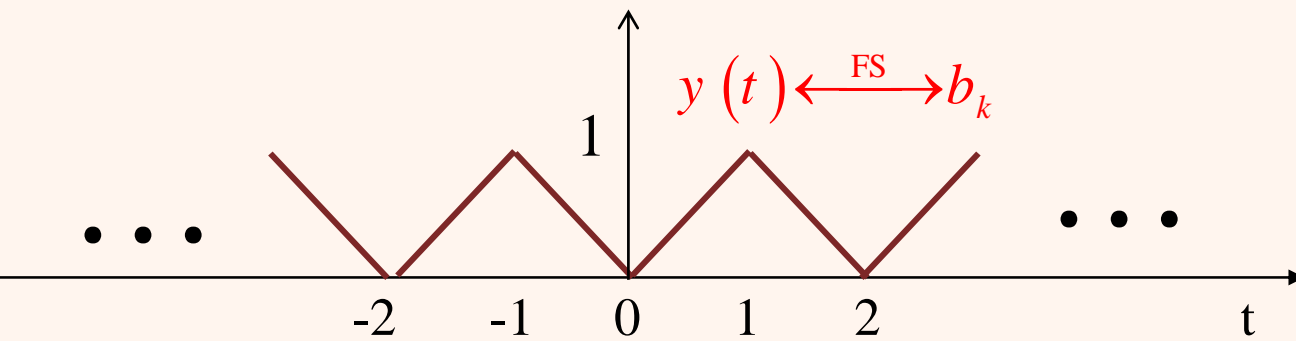
– داریم:

$$\frac{1}{4} \int_T |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$$

$$x(t) = \pm \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$



مثال



$$x(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$



$$a_k = jk \omega_0 b_k$$

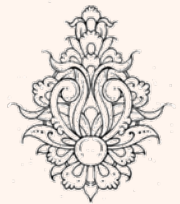
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

$$b_k = -\frac{2a_k j}{k \pi}$$

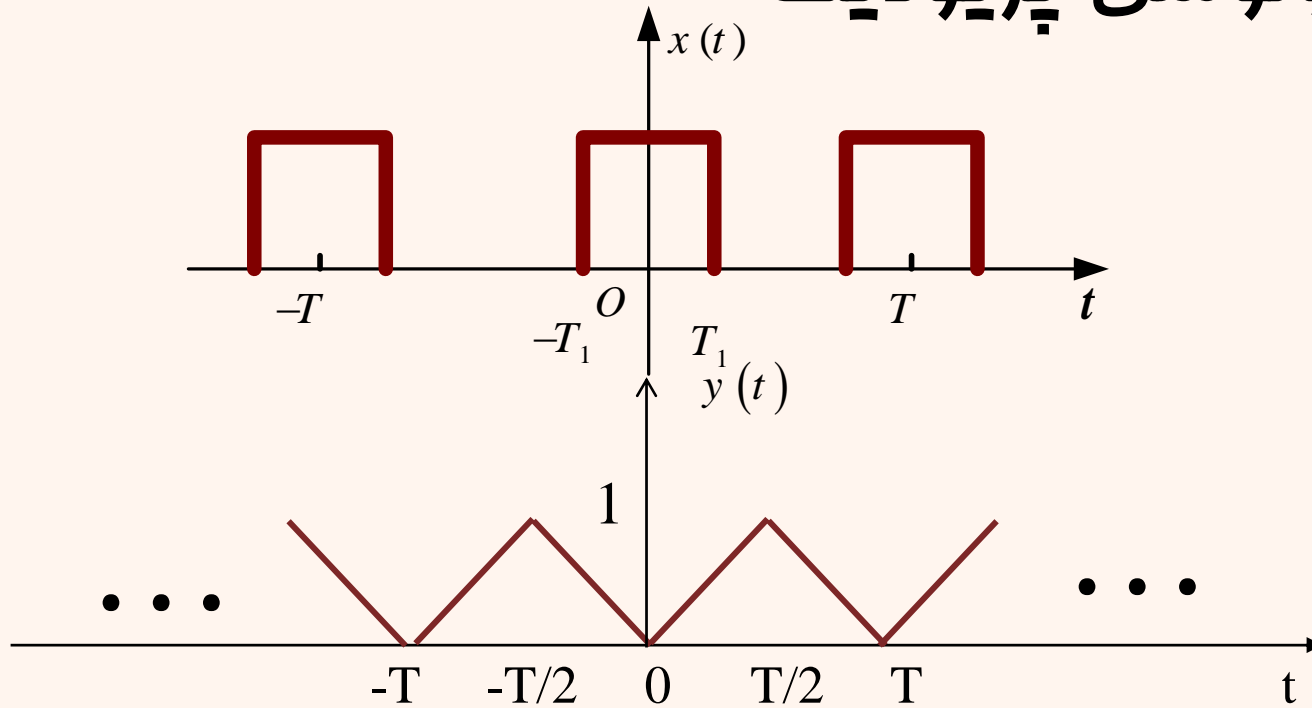
$$b_k = \begin{cases} 0 & k \text{ even} \\ -\left(\frac{2}{k \pi}\right)^2 & k \text{ odd} \end{cases}$$

k even

k odd



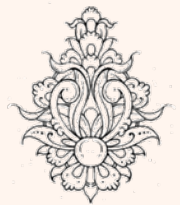
کانولوشن پریودی



$$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

اگر هر دو سیگنال مثبت باشند

$$x(t) * y(t) = +\infty$$

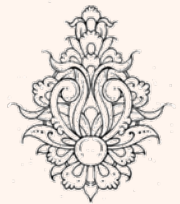
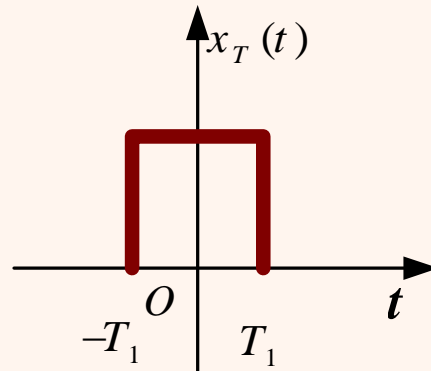


کانولوشن پریودیک (ادامه...)

- در این حالت کانولوشن تنها در یک دوره از پریود گرفته می‌شود.

$$z(t) = \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T/2 < t < T/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



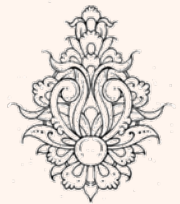
کانولوشن پریودیك (ادامه...)

سینال حاصل پریودیك است

$$z(t) = \int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau = x(t) \otimes y(t)$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} a_k \quad y(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} b_k \quad z(t) \xleftrightarrow{\text{FS}} c_k$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_T z(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T \left(\int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau \right) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \int_T \left(\frac{1}{T} \int_T y(t - \tau) e^{-jk\omega_0(t - \tau)} dt \right) x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \\ &= \int_T b_k x(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau \\ &= T a_k b_k \end{aligned}$$



سری فوریه زمان گسسته

- $x[n]$ سیگنالی زمان گسسته‌ی متناوب است:

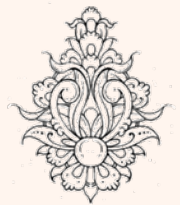
$$x[n + N] = x[n] \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

- در سری فوریه تنها $e^{j\omega n}$ که دارای تناوب N هستند، ظاهر می‌شوند.

$$\omega N = k2\pi \leftrightarrow \omega = k\omega_0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- می‌دانیم که تنها N سیگنال این‌چنینی وجود دارد.

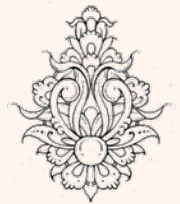
$$e^{j(k+N)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} e^{j\overbrace{N\omega_0 n}^{2\pi n}} = e^{jk\omega_0 n}$$



سری فوریه زمان گسسته (ادامه...)

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n}$$

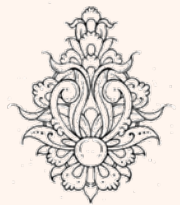
$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \rightarrow \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$



به ازای چه سیگنال‌هایی وجود دارد؟

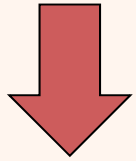
$$\begin{aligned}x[n] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \\ &\Downarrow \\ x[0] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \\ x[1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0} \\ x[2] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j2k\omega_0} \\ &\vdots \\ x[N-1] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(N-1)k\omega_0}\end{aligned}$$

N معادله و **N** مجهول



محاسبه‌ی ضرایب

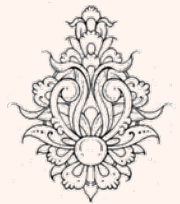
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N & , \alpha = 1 \\ \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} & , \alpha \neq 1 \end{cases}$$



$$\alpha = e^{jk\omega_0}$$

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{jk\omega_0 n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jk\omega_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{jk 2\pi / N} \right)^n$$

$$= \begin{cases} N & , k = 0, \pm N, \pm 2N \\ \frac{1 - e^{jk(2\pi/N)N}}{1 - e^{jk\omega_0}} = 0 & , otherwise \end{cases}$$



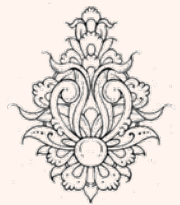
محاسبه‌ی ضرایب

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jm\omega_0 n} &= \sum_{n=\langle N \rangle} \left(\sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \right) e^{-jm\omega_0 n} \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \left(\sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-m)\omega_0 n} \right) = Na_k \end{aligned}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_{k+N} = a_k$$



مثال

- سری فوری سیگنال زیر را محاسبه کنید:

$$x[n] = \cos(\pi n/8) + \cos(\pi n/4 + \pi/4)$$

$$N = 16 \longrightarrow \omega_0 = \frac{\pi}{8}$$

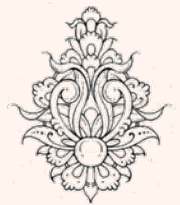
$$x[n] = \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}] + \frac{1}{2} [e^{j\pi/4} e^{j2\omega_0 n} + e^{-j\pi/4} e^{-j\omega_0 n}]$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{-1} = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = \frac{e^{j\pi/4}}{2}, \quad a_{-2} = \frac{e^{-j\pi/4}}{2}$$

$$a_3 = a_{-3} = 0$$



مثال:

- سری فوریهی سیگنال زیر را محاسبه کنید:

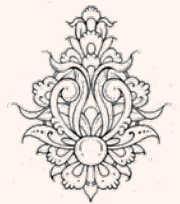
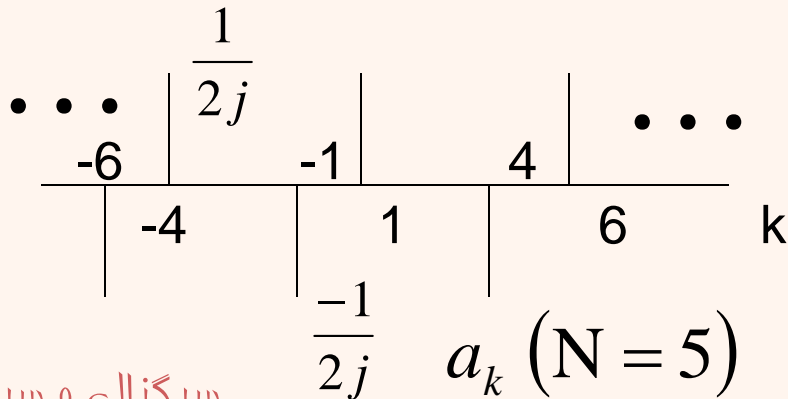
$$x[n] = \sin \omega_0 n$$

$$\omega_0 / 2\pi = \frac{1}{N} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n}$$

$$a_1 = \frac{1}{2j}$$

$$a_{-1} = \frac{-1}{2j}$$

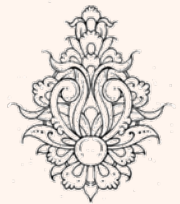
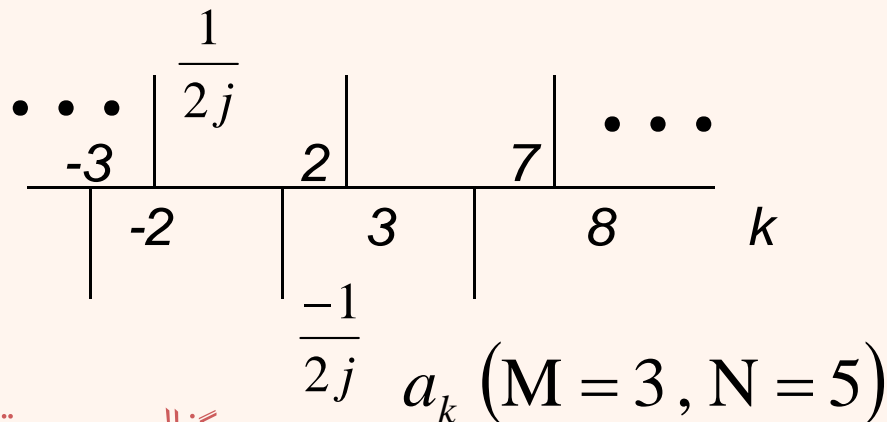


ادامه مثال:

$$\omega_0 / 2\pi = \frac{M}{N} \quad \omega_0 = \frac{M}{N} 2\pi$$

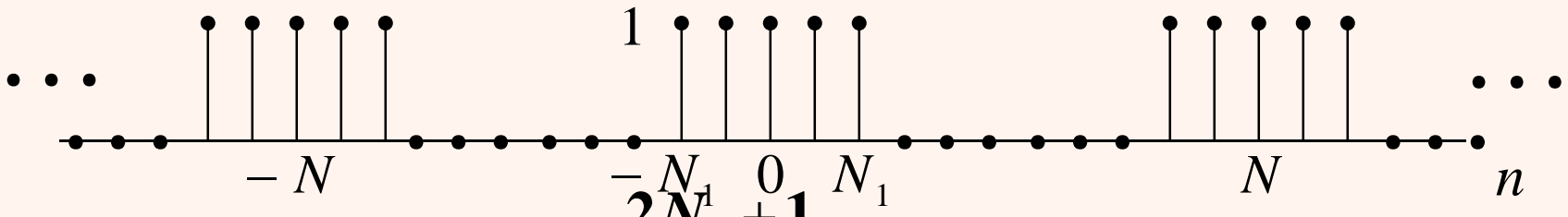
$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jM(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jM(2\pi/N)n}$$

$$M = 3, N = 5 \quad a_3 = \frac{1}{2j}, \quad a_{-3} = a_2 = \frac{-1}{2j}$$



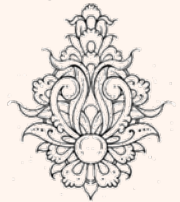
مثال

• سری فوریه‌ی سیگنال زیر را محاسبه کنید:



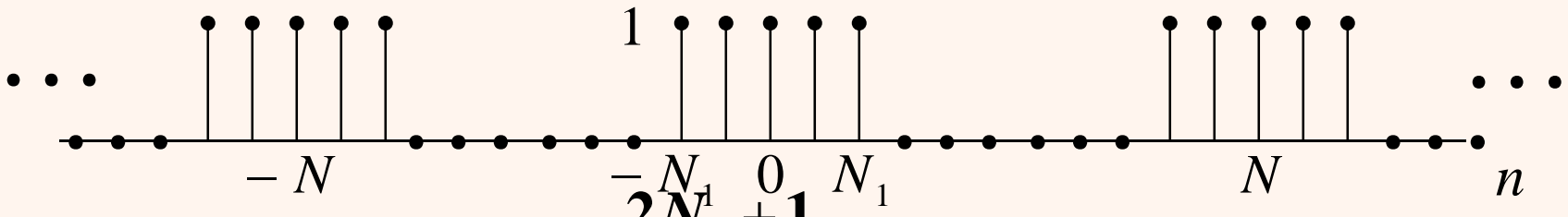
$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{+N_1} e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \begin{cases} \frac{N}{2N_1+1} & k = mN \\ \frac{1}{N} \frac{e^{-jk \frac{2\pi}{N} (-N_1)} - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (N_1+1)}}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} & k \neq mN \end{cases}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk \frac{\pi}{N}} \left\{ e^{jk \frac{2\pi}{N} (N_1+1/2)} - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (N_1+1/2)} \right\}}{e^{-jk \frac{\pi}{N}} \left(e^{jk \frac{\pi}{N}} - e^{-jk \frac{\pi}{N}} \right)}$$



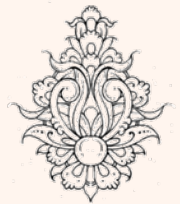
مثال

• سری فوریه‌ی سیگنال زیر را محاسبه کنید:

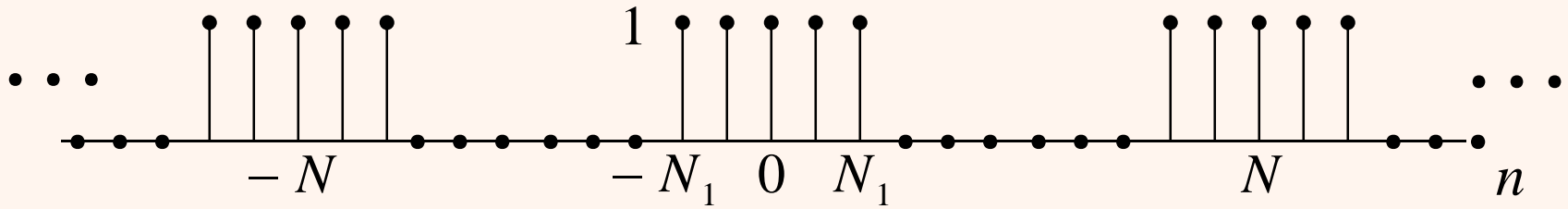


$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{+N_1} e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \begin{cases} \frac{N}{2N_1+1} & k = mN \\ \frac{1}{N} \frac{e^{-jk \frac{2\pi}{N} (-N_1)} - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (N_1+1)}}{1 - e^{-jk \frac{2\pi}{N}}} & k \neq mN \end{cases}$$

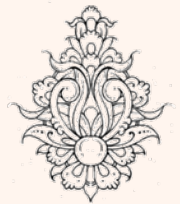
$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-jk \frac{\pi}{N}} \left\{ e^{jk \frac{2\pi}{N} (N_1+1/2)} - e^{-jk \frac{2\pi}{N} (N_1+1/2)} \right\}}{e^{-jk \frac{\pi}{N}} \left(e^{jk \frac{\pi}{N}} - e^{-jk \frac{\pi}{N}} \right)}$$



مثال-ادامه



$$a_k = \begin{cases} \frac{2N_1 + 1}{N} & k = mN \\ \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(\pi k / N)} & k \neq mN \end{cases}$$



ویژگی‌های سری فوریه گسسته

- خواص سری فوریه گسسته دقیقاً شبیه خصوصیات سری فوریه پیوسته است.

$$x(t) \leftrightarrow a_k, y(t) \leftrightarrow b_k ; x[n] \leftrightarrow a_k, y[n] \leftrightarrow b_k$$

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$$

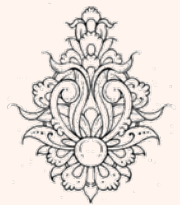
خطی بودن

$$\alpha x[n] + \beta y[n] \leftrightarrow \alpha a_k + \beta b_k$$

$$x(t - t_0) \leftrightarrow a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk2\pi t_0/T}$$

$$x[n - n_0] \leftrightarrow a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$$

ثبات در دامنه زمان



ویژگی‌های سری فوریه گسسته

ثبات در دامنه فرکانس

$$e^{jM\omega_0 t} x(t) \leftrightarrow a_{k-M} \quad e^{jM\omega_0 t} x[n] \leftrightarrow a_{k-M}$$

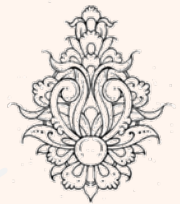
$$x(-t) \text{ or } x[-n] \leftrightarrow a_{-k}$$

عکس کردن زمان

$$\int_T x(\tau) y(t - \tau) d\tau \leftrightarrow T a_k b_k$$

$$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r] y[n - r] \leftrightarrow N a_k b_k$$

کانولوشن پی‌پوریک



ویژگی‌های سری فوریه گسسته

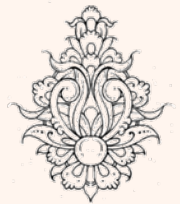
$$x^*(t) \text{ or } x^*[n] \leftrightarrow a_{-k}^*$$

$$x(t) \text{ or } x[n] \text{ real} \Rightarrow a_{-k} = a_k^*$$

$\text{Re}\{a_k\}$ is even, $\text{Im}\{a_k\}$ is odd

or $|a_k|$ is even, $\angle a_k$ is odd

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N_0-1} |a_k|^2$$

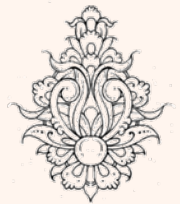


ویژگی‌های سری فوریه گسسته

Time Scaling

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] & n \text{ is a multiple of } m \\ 0 & n \text{ is not a multiple of } m \end{cases}$$

$$x_{(m)}[n] \leftrightarrow \frac{1}{m} a_k$$



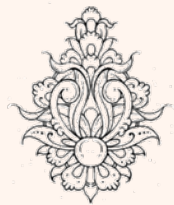
ویژگی‌های سری فوریه گسسته

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - e^{jk\omega_0}) a_k$$

تفاضل

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \left(\frac{1}{1 - e^{jk\omega_0}} \right) a_k$$

مجموع



پاسخ فرکانسی

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(jk\omega_0) a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k \rightarrow H(jk\omega_0) a_k \quad H(jk\omega_0) = |H(jk\omega_0)| e^{\angle H(jk\omega_0)}$$

Gain

شامل اندازه و فزائت

$$x[n] = \sum_{n=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} \rightarrow \boxed{H[n]} \rightarrow y[n] = \sum_{n=\langle N \rangle} H(e^{jk\omega_0 n}) a_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$a_k \rightarrow H(e^{jk\omega_0}) a_k \quad H(e^{jk\omega_0}) = |H(e^{jk\omega_0})| e^{\angle H(e^{jk\omega_0})}$$

Gain

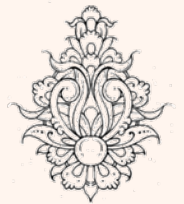
شامل اندازه و فزائت



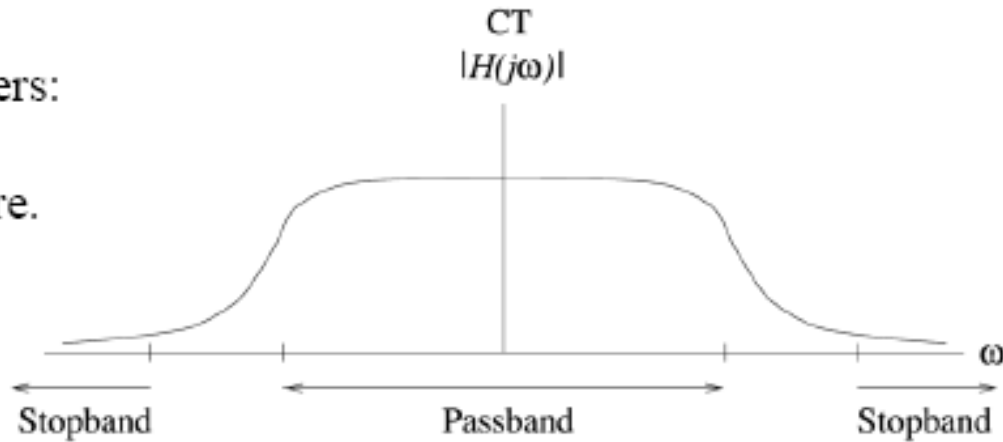
پاسخ فرکانسی (ادامه...)

- در بسیاری از کاربردها لازم است، برفی فرکانس‌ها را حذف کرده و یا اندازه‌ی آن را تغییر داد، به چنین فرآیندی «فیلتر کردن» می‌گویند.

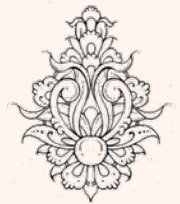
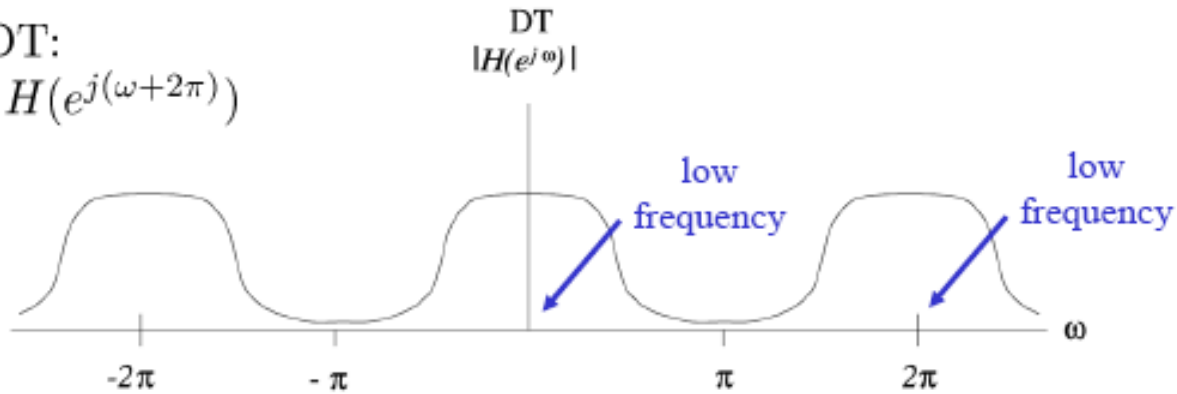
- Frequency Selective Filters
- Frequency Shaping Filters



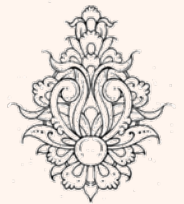
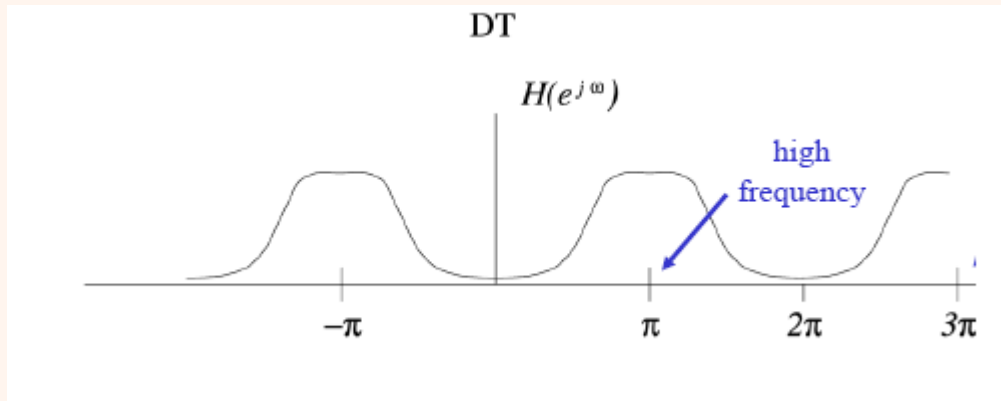
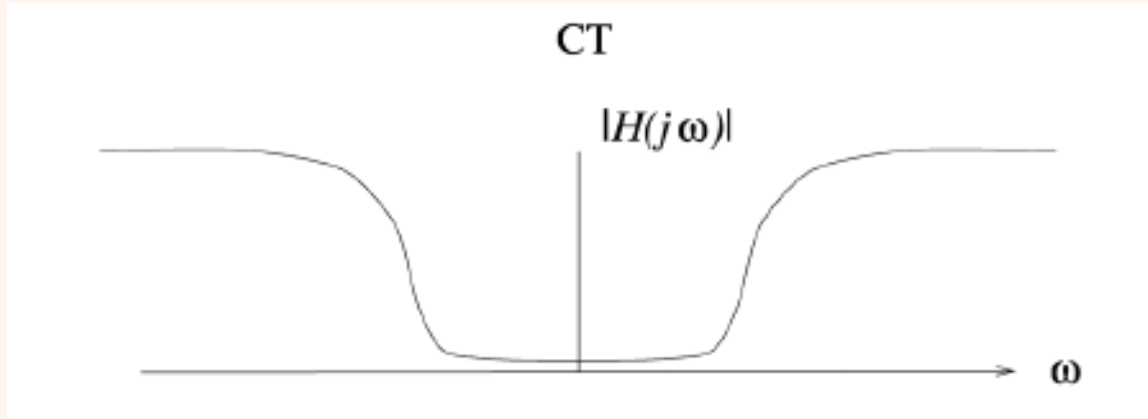
Lowpass Filters:
Only show
amplitude here.



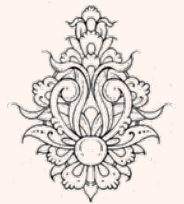
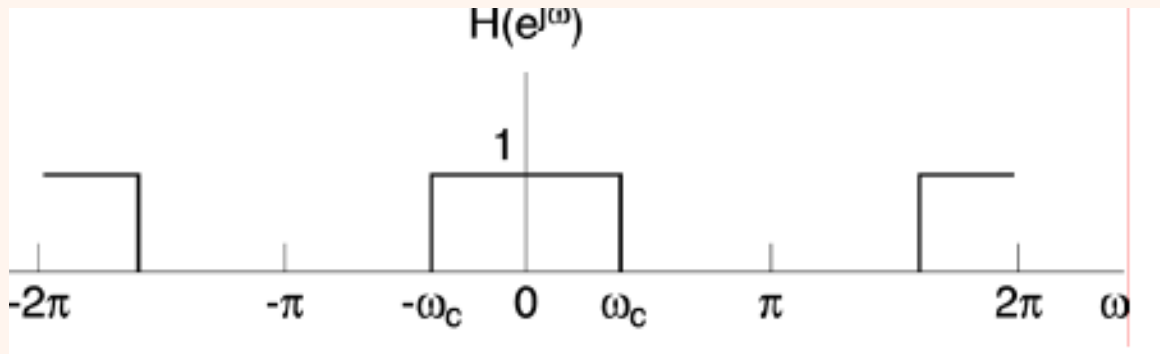
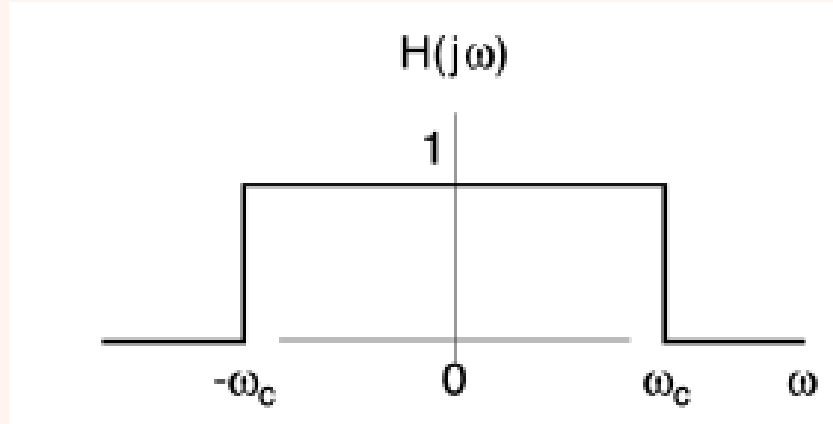
Note for DT:
 $H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})$



فیلتر بالاگذر



فیلتر ایده آل



مثال

- سیگنال $x[n]$ ، سیگنالی حقیقی و فرد است با دوره‌ی تناوب $N=7$

$$a_{15} = j$$

$$a_{16} = 2j$$

$$a_{17} = 3j$$

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = a_{15} = j \quad a_{-1} = a_1^* = -j$$

$$a_2 = a_{16} = 2j \quad a_{-2} = a_2^* = -2j$$

$$a_3 = a_{17} = 3j \quad a_{-3} = a_3^* = -3j$$

