

# سیگنال و سیستم (تجزیه و تحلیل سیستم‌ها) ۱۱۸-۱۱-۱۳

بخش نخست  
موضوعات  
سیگنال‌های پایه  
موضوعات سیگنال  
خصوصیات سیستم

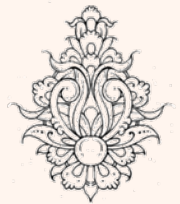


دانشگاه شهید بهشتی  
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر  
پاییز ۱۳۹۳

احمد محمودی ازناوه

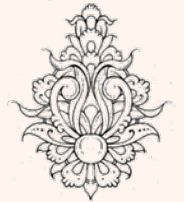
# فهرست مطالب

- دیباچه
- این درس درباره‌ی چیست و به چه کار می‌آید؟  
– زمینه‌های کاربرد این درس
- چند تذکر
- منابع
- سیگنال چیست؟
- سیستم چیست؟



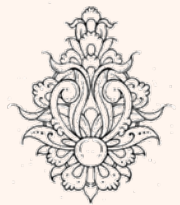
# فهرست مطالب (ادامه...)

- تبدیل‌ها
- سیگنال‌های پایه
- خواص سیگنال
- خواص سیستم‌ها
  - حافظه‌دار بودن
  - پایداری
  - معکوس‌پذیری
  - علی بودن
  - خطی بودن
  - تخریر ناپذیر با زمان



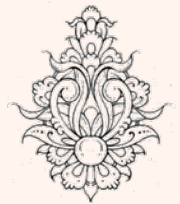
# دیباچه

- مفاهیم مرتبط با این درس در زمینه‌های گوناگونی از علوم و فناوری کاربرد دارند؛ زمینه‌های نظیر انتقال داده، طراحی مدار، هوانوردی، مهندسی پزشکی، سیستم‌های توزیع قدرت، مهندسی کنترل، پردازش تصویر، صوت و ویدئو
- هرچند ذات کاربردهای گفته شده در بالا با هم متفاوت است، در دو مفهوم اشتراک دارند:  
«سیگنال و سیستم»



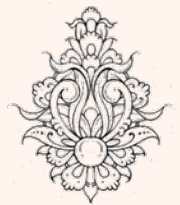
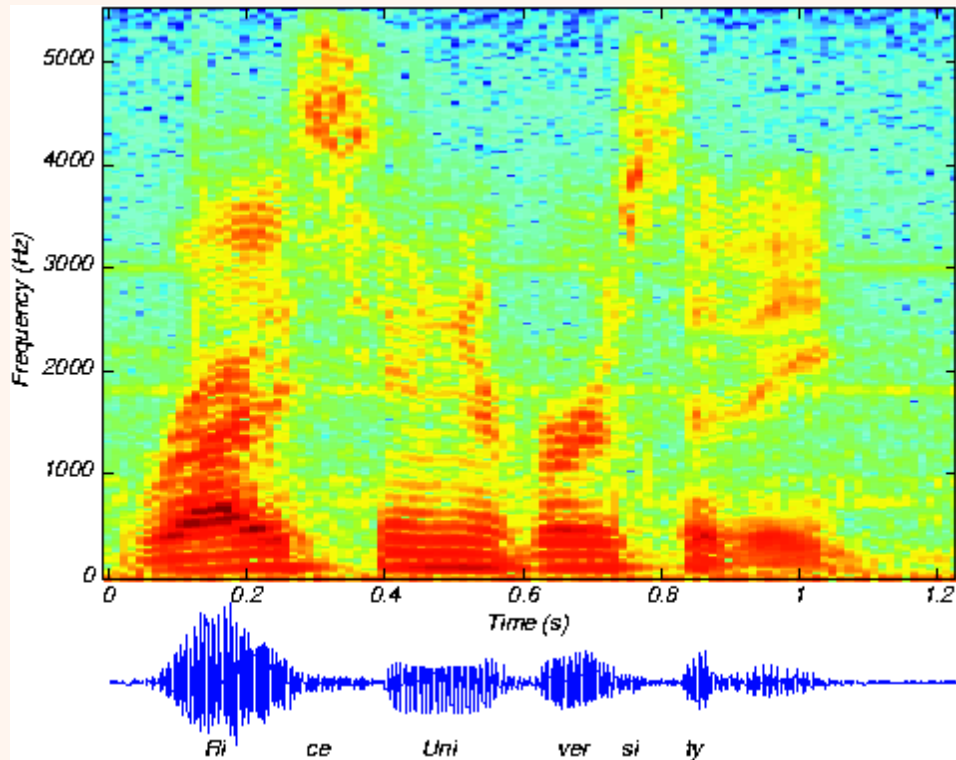
# کاربردها

- در بسیاری از کاربردها می‌خواهیم بدانیم پاسخ یک سیستم به یک سیگنال چگونه است.
  - پیش‌بینی قیمت سهام بر اساس سیستم اقتصادی
  - پاسخ یک مدار به یک سیگنال ورودی
- در مواردی می‌خواهیم سیستمی طراحی کنیم که به سیگنال‌های خاص پاسخ مشخصی داشته باشد.
  - طراحی سیستمی برای بازیابی سیگنال
  - ارتقاء کیفیت سیگنال (سیگنال‌های تصویر)
- بهبود کارایی یک سیستم توسط ترکیب با سیستم‌های دیگر



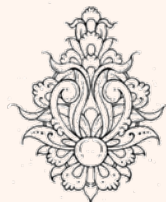
# موضوع درس

- در این درس با ابزارهایی آشنا می‌شویم که ما در دستیابی به اهداف فوق یاری کند.



# تذکرات تکراری ولی مهم

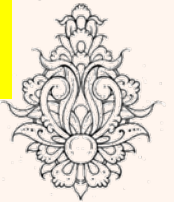
- در صورتی که در رابطه با مطلبی، ایمیل می‌زنید، لطفا در پایان ایمیل نام خود را هم بنویسید، به ویژه اگر از نام مستعار برای شناسایی ایمیل خود استفاده می‌کنید.
- نام درس [و گروه] فراموش نشود.
- یکی از مهمترین مواردی که رعایت آن بر عهده‌ی ماست، رعایت «**اخلاق آکادمیک**» است. کپی کردن تکالیف، استفاده از مطلبی بدون ذکر منبع و هم‌فکری در امتحان از موارد بارز تخلف محسوب می‌شود.
- توجه داشته باشید، برای نمره گرفتن همراه آوردن والدین سودی ندارد.
- **از نوشتن به صورت فینگیلیش بپرهیزید.**



# بارمبندی

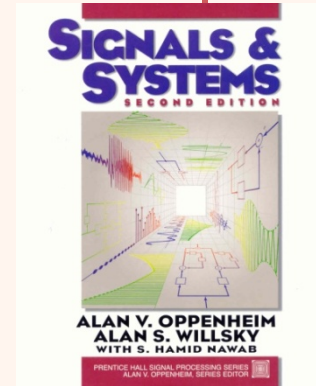
• تکالیف	۱۵٪
• کوییزها	۱۰٪
• میان‌ترم	۳۰-۲۵٪
• پایان‌ترم	۵۰-۴۰٪

توجه: بarmبندی فوق تقریبی است و با توجه به شرایط قابل تغییرات است.  
تحویل ندادن تکالیف و شرکت نکردن در کوییزها **نمره منفی** دارد.

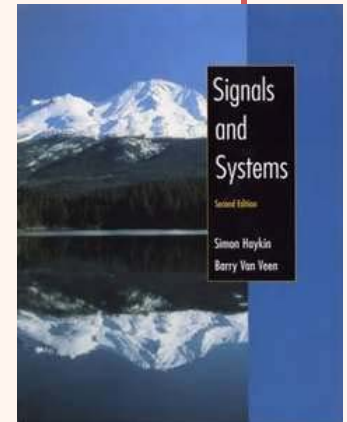




- Signals and Systems, Oppenheim & Willsky



- Signals and Systems, Haykin & Van Veen

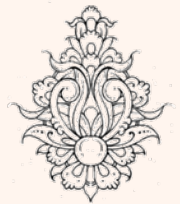


- برای این درس از منابع online مانند اسلایدهای MIT نیز استفاده شده است.

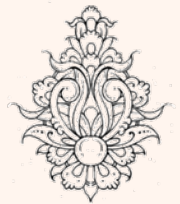
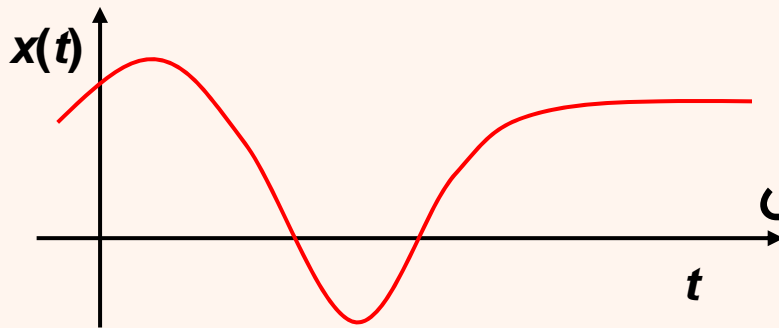


# سیگنال چیست؟

- سیگنال تابعی از **متغیرهای مستقل** حاوی **اطلاعات** در مورد یک پدیده فیزیکی است، مانند
  - سیگنال‌های الکتریکی: جریان و ولتاژ
  - سیگنال‌های صوتی: سیگنال صحبت که هم می‌تواند به صورت آنالوگ و یا دیجیتال باشد.
  - سیگنال‌های ویدئویی: میزان روشنایی پیکسل‌ها در یک فریم از ویدئو
  - سیگنال‌های زیستی: سیگنال‌های مغزی، سیگنال‌های قلب

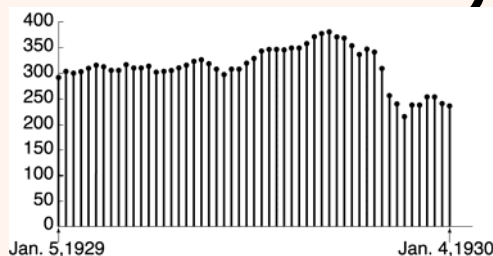


- این متغیرهای مستقل می‌توانند پیوسته و گسسته باشند.
- بیشتر سیگنال‌های فیزیکی از نوع «پیوسته» هستند:
  - سیگنال صوتی
  - سرعت
  - دما
  - میزان رطوبت
  - مسیر حرکت یک موشکی



- برخی سیگنال‌ها ماهیتی گسسته دارند:

– شاخص سهام در هر روز

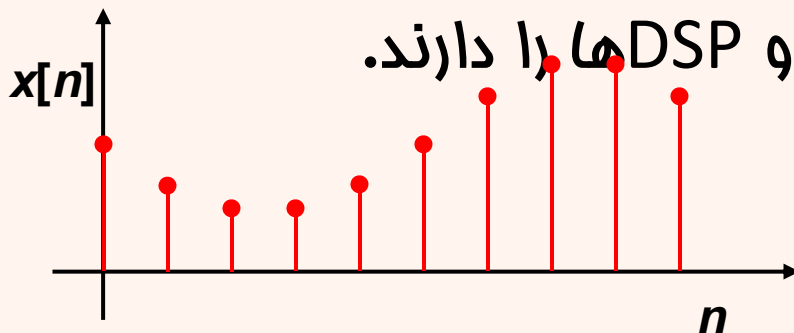


- برخی با نمونه‌برداری از سیگنال‌های پیوسته به دست می‌آیند.

– تصاویر دیجیتال

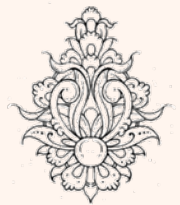
- چرا از سیگنال‌های گسسته استفاده می‌شود؟

– این سیگنال‌ها قابلیت پردازش توسط کامپیوترهای پیشرفته و DSP را دارند.



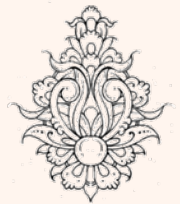
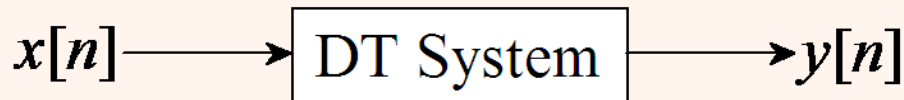
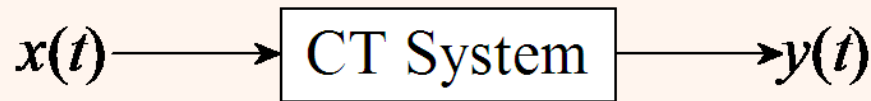
# ابعاد سیگنال

- سیگنال‌های می‌توانند یک‌بعدی، دو‌بعدی، ... و  $n$  بعدی باشند.
  - سیگنال یک بعدی: سیگنال صوت
  - سیگنال دو بعدی: تصویر
- در این درس تمرکز ما بر روز سیگنال‌های یک‌بعدی است.
- این اصول برای استفاده در سیگنال‌های چند بعدی قابل تعمیم هستند.



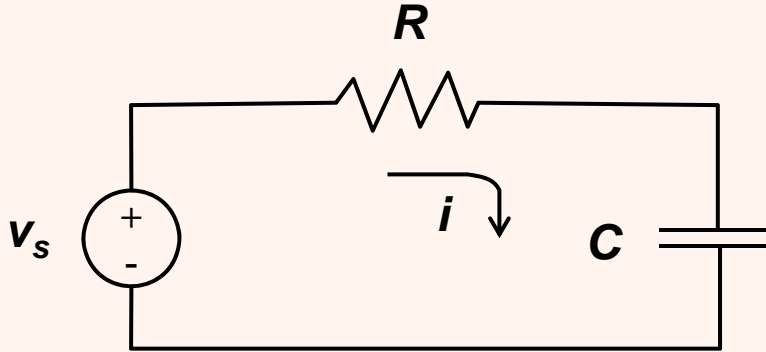
# سیستم

- یک سیستم، در پاسخ به یک سیگنال ورودی، یک سیگنال به عنوان خروجی دارد.
- مشخصات سیستم بر سیگنال خروجی اثر گذار است.



# مثال‌های از سیستم

• مثال‌های متنوعی از سیستم می‌توان ارائه کرد.



– یک مدار RCL

– یک سیستم کنترلی

– سیستم حذف نویز از صدا  $v_c$

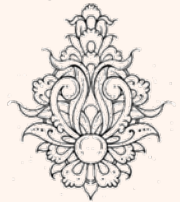
– سیستم حذف اکو از صدا

– الگوریتم پیش‌بینی قیمت سهام

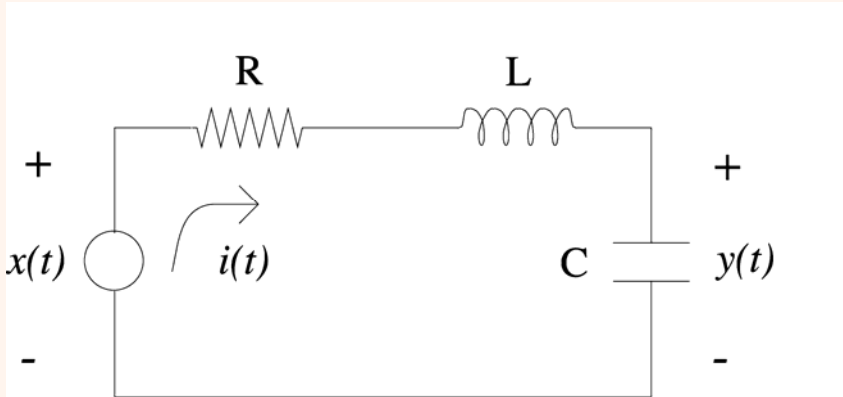
– یک تشخیص دهنده لبه در تصاویر دیجیتال

– یک بهبوددهنده کیفیت تصویر

– یک فشرده‌ساز تصویر یا ویدئو



# یک مدار RLC

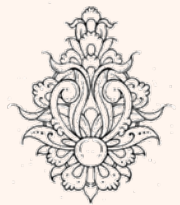


$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{dt}$$

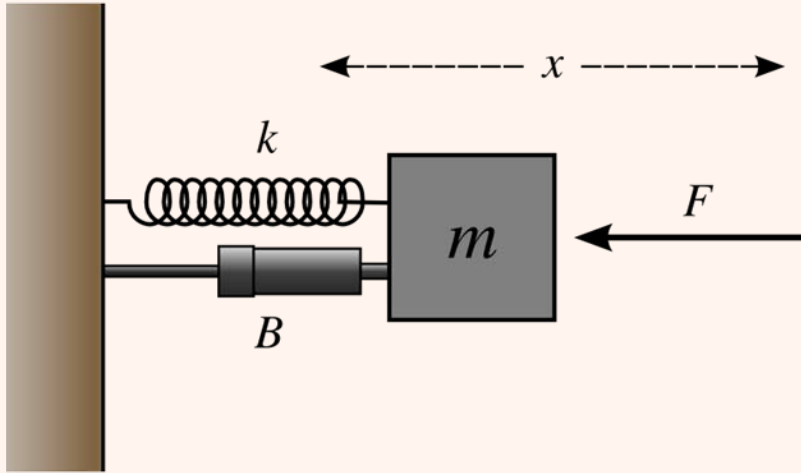
⇓

$$LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$





# یک سیستم مکانیکی (جرم-فنر-میراگر)

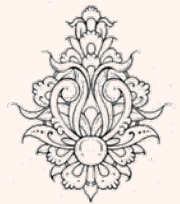


$x(t)$  - applied force  
 $K$  - spring constant  
 $D$  - damping constant  
 $y(t)$  - displacement from rest

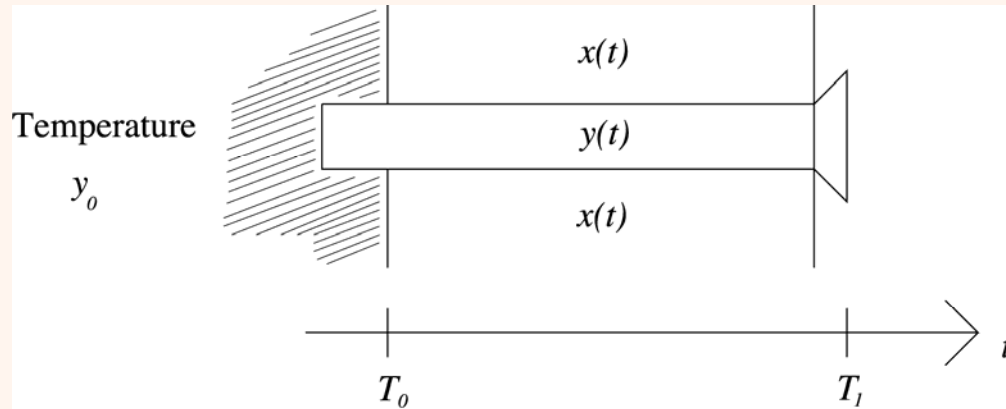
$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x(t) - Ky(t) - D \frac{dy(t)}{dt}$$

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + D \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

یک سیستم فیزیکی کاملاً متفاوت، دارای مدل ریاضی کاملاً یکسانی است.



# یک سیستم حرارتی



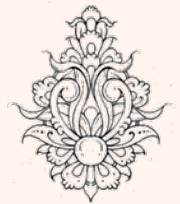
$t$  = distance along rod

$y(t)$  = Fin temperature as function of position

$x(t)$  = Surrounding temperature along the fin

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = k[y(t) - x(t)]$$
$$y(T_0) = y_0$$
$$\frac{dy}{dt}(T_1) = 0$$

متغیر مستقل سیگنال می تواند چیزی جز زمان باشد، به عنوان نمونه مکان

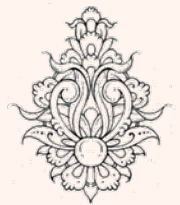


# یک سیستم آشکارساز لبه

$$\begin{aligned}y[n] &= x[n+1] - 2x[n] + x[n-1] \\ &= \{x[n+1] - x[n]\} - \{x[n] - x[n-1]\} \\ &= \text{“Second difference”}\end{aligned}$$

$$(a) \quad x[n] = n \quad \Rightarrow \quad y[n] = 0$$

$$(b) \quad x[n] = nu[n] \quad \Rightarrow \quad y[n]$$



# توان و انرژی سیگنال

- انرژی سیگنال زمان پیوسته:

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt$$

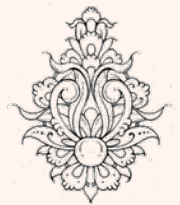
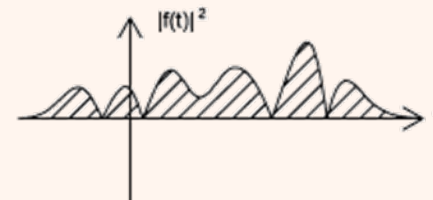
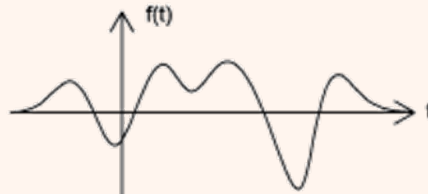
- انرژی سیگنال زمان گسسته:

$$E = \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$$

- برای محاسبه توان، انرژی بر بازه‌ی زمانی تقسیم می‌شود.

$$(t_2 - t_1)$$

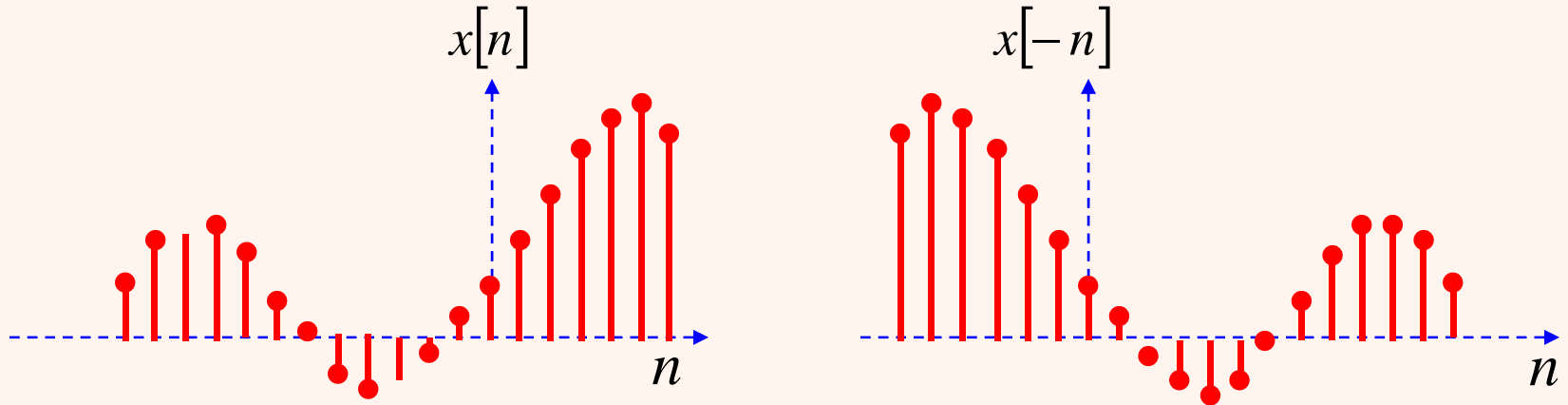
$$(n_2 - n_1 + 1)$$



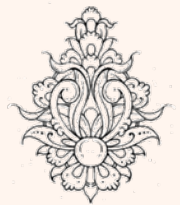
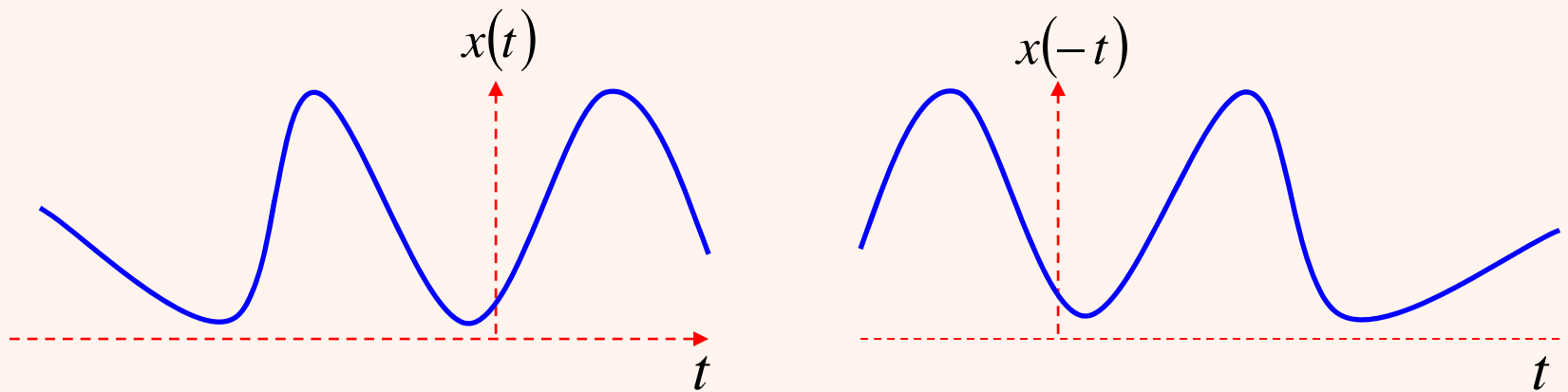
# Time reversal

# تبدیل سیگنال - قرینه سازی

$$x[n] \rightarrow x[-n]$$

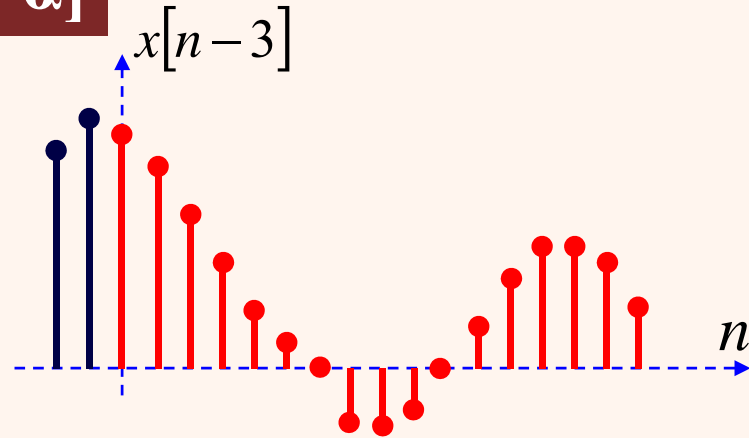
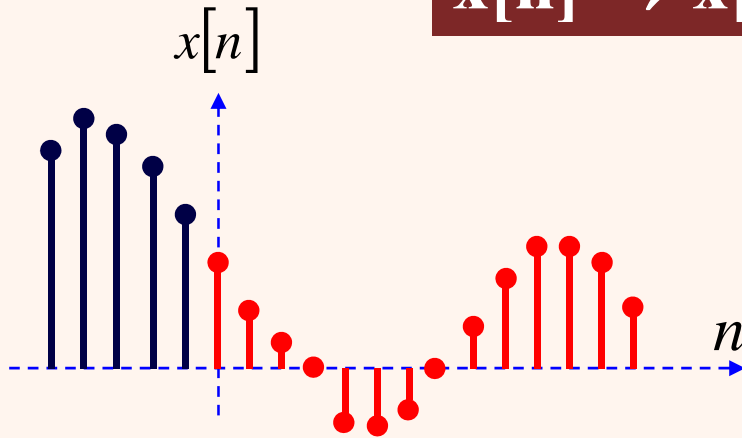


$$x(t) \rightarrow x(-t)$$

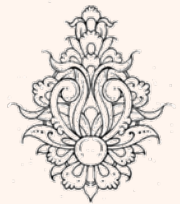
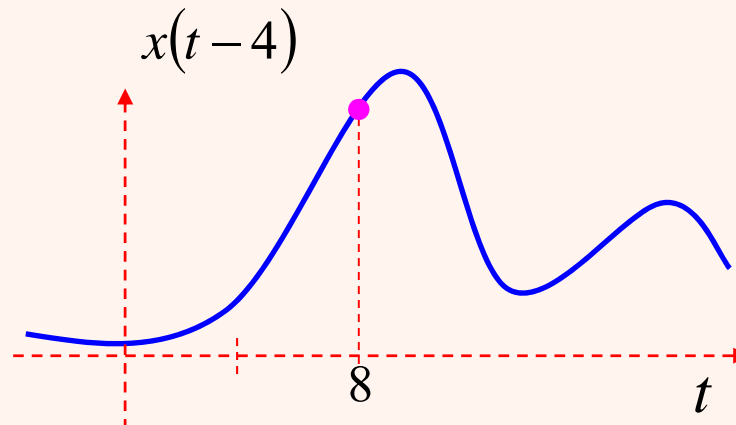
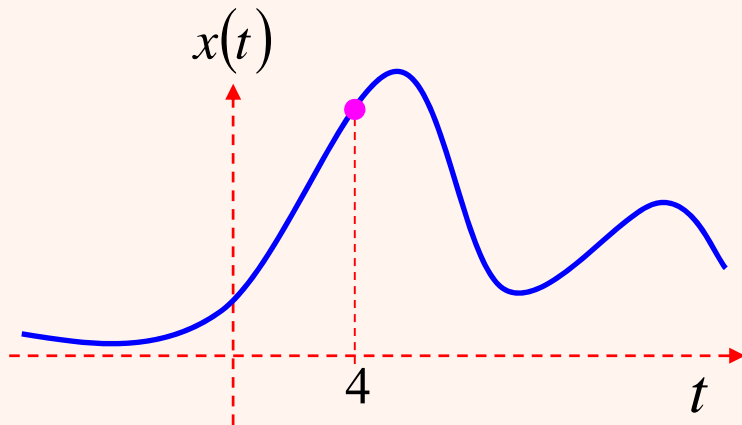


# تبدیل سیگنال - انتقال

$$x[n] \rightarrow x[n-\alpha]$$

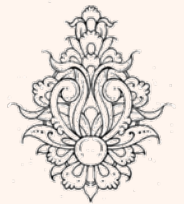
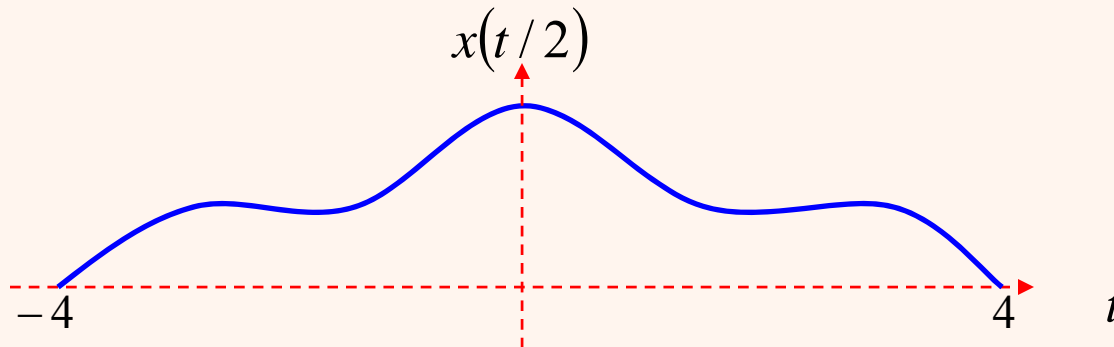
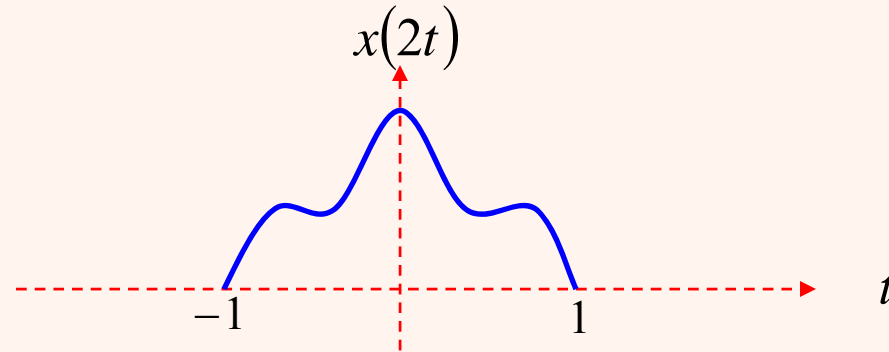
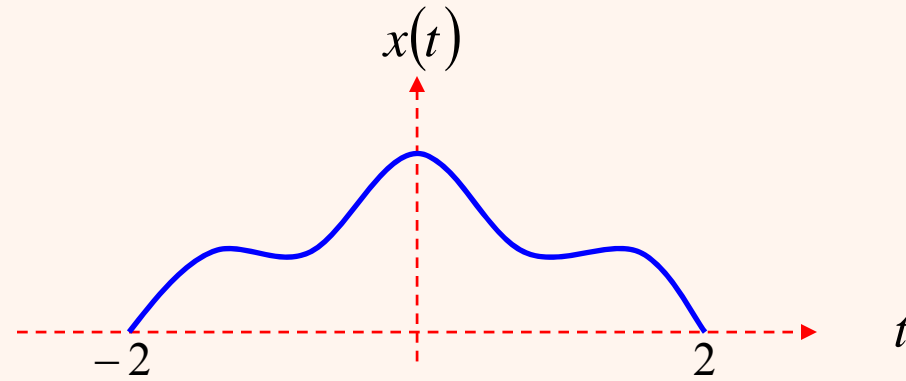


$$x(t) \rightarrow x(t-\alpha)$$

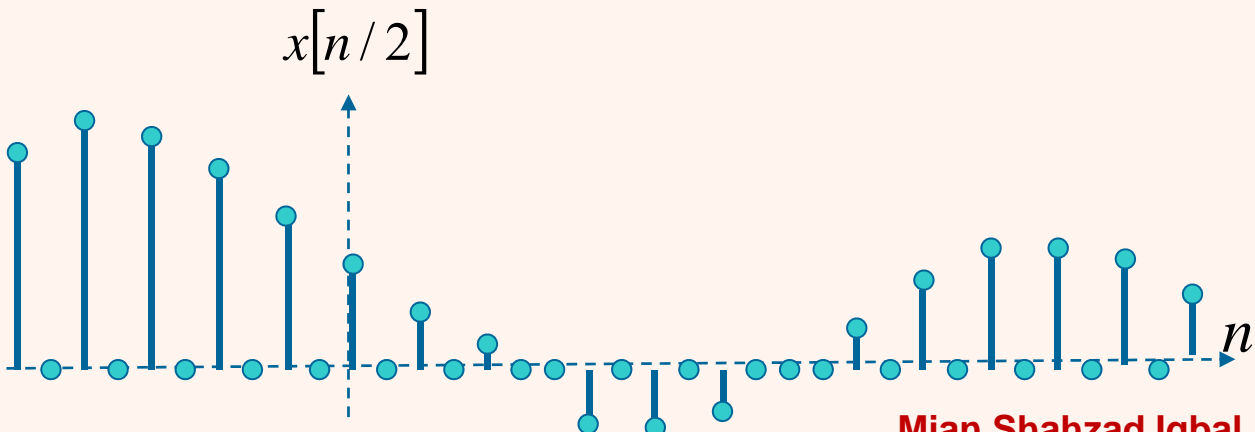
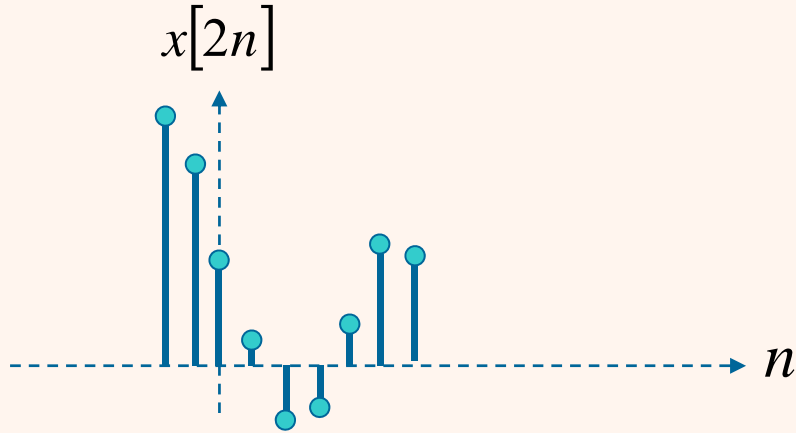
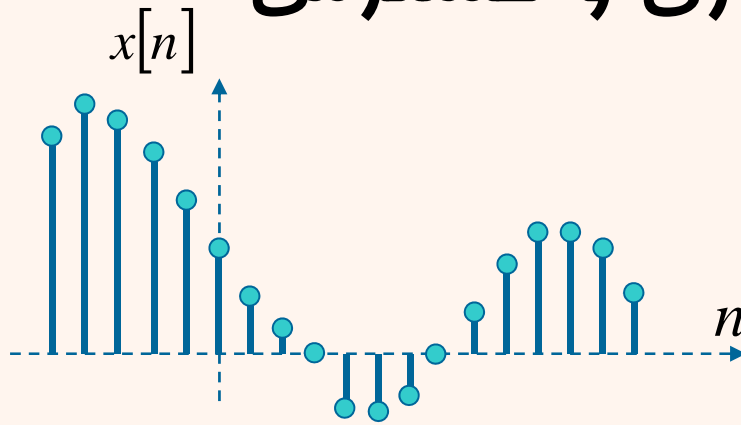


# تبدیل سیگنال- فشرده سازی و گسترش

Time scaling



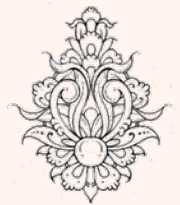
# فشرده سازی و گسترش



سیگنال و سیستم

Mian Shahzad Iqbal.

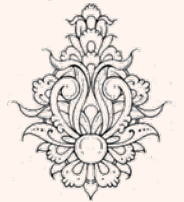
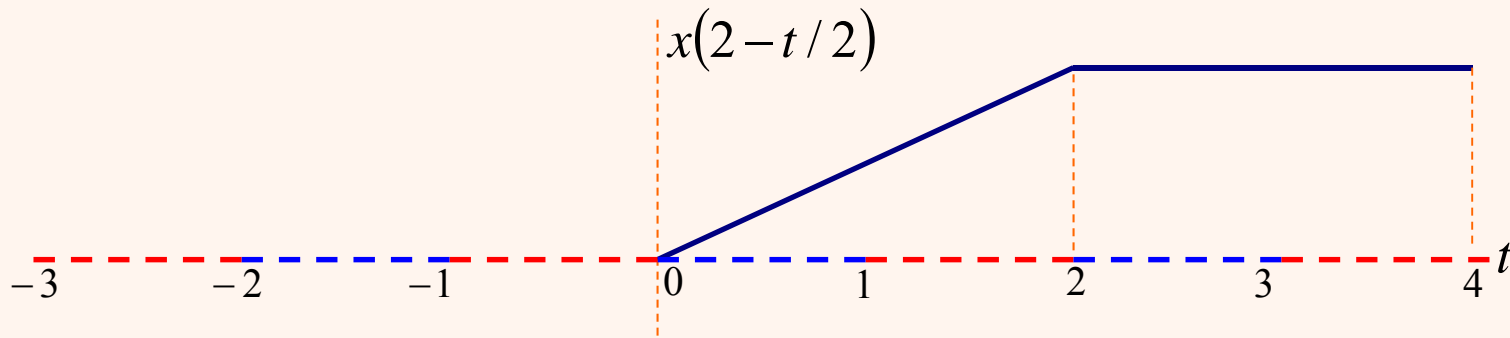
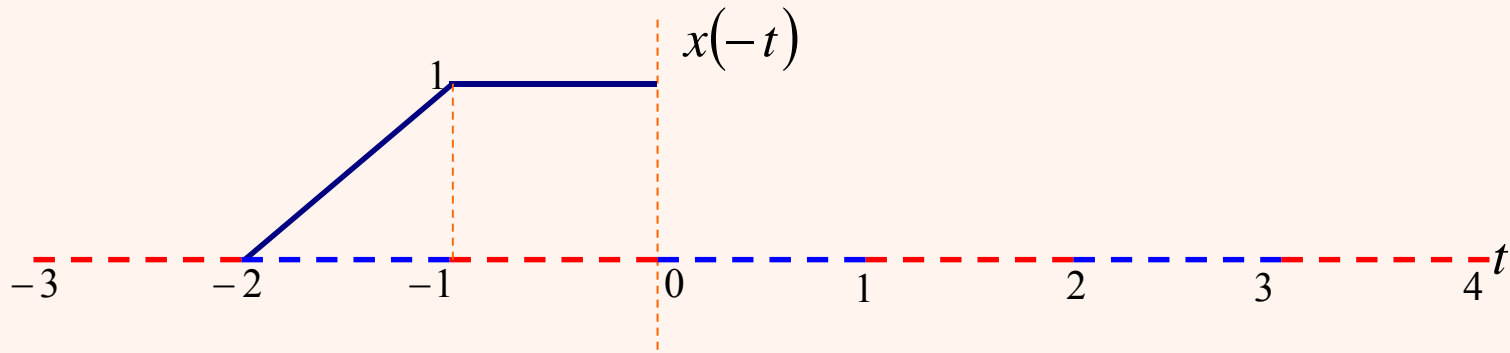
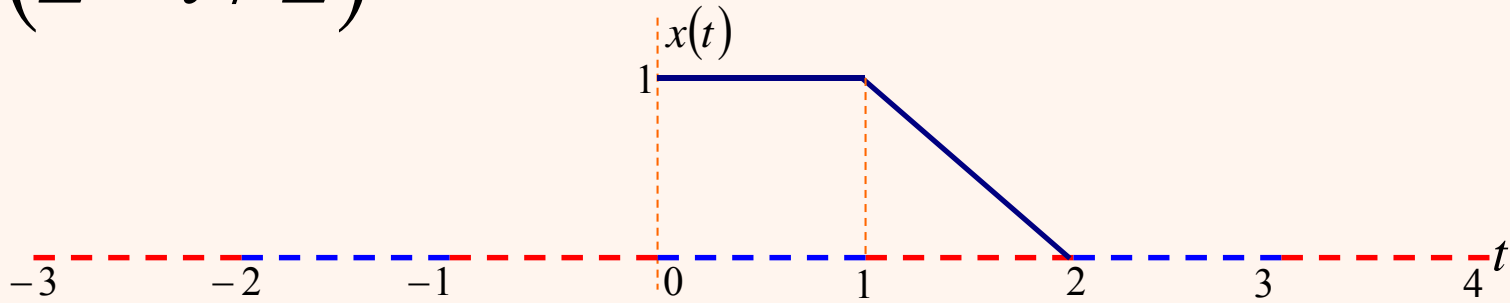
UET TAXILA





# مثال:

$$x(2 - t/2)$$



# ترکیب تبدیلیها

 $\mu$  $l$ 

$$y(t) = x(\alpha t + \beta)$$

- بررسی برخی نقاط خاص می‌توانید در یافتن تبدیلیها به ما کمک کنید:

$$y(0) = x(\beta)$$

$$y(-\beta/\alpha) = x(0)$$

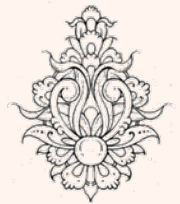
- از طرفی می‌توان این گونه استدلال کرد: در تخریب مقیاس به جای  $t$ ،  $\alpha t$  قرار می‌دهیم، در حالی که شیفیت زمانی مقدار  $t$  را با  $t - \beta$  جایگزین می‌کنیم، از این رو تخریب مقیاس اولویت دارد.

- به گونه‌ای دیگر نیز می‌توان استدلال کرد.

$$y(t_0) = x(\alpha t_0 + \beta) = x(t_x)$$

$$\alpha t_0 + \beta = t_x$$

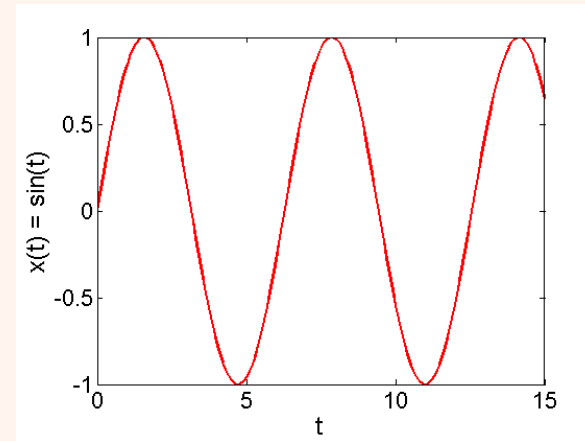
$$t_0 = (1/\alpha)(t_x - \beta)$$



- یکی از مهمترین دسته‌ها، سیگنال‌های متناوب هستند.

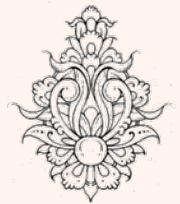
where  $T_0 > 0$ , for all  $t$ .  $x(t) = x(t + T_0)$

where  $N_0 > 0$ , for all  $n$ .  $x[n] = x[n + N_0]$



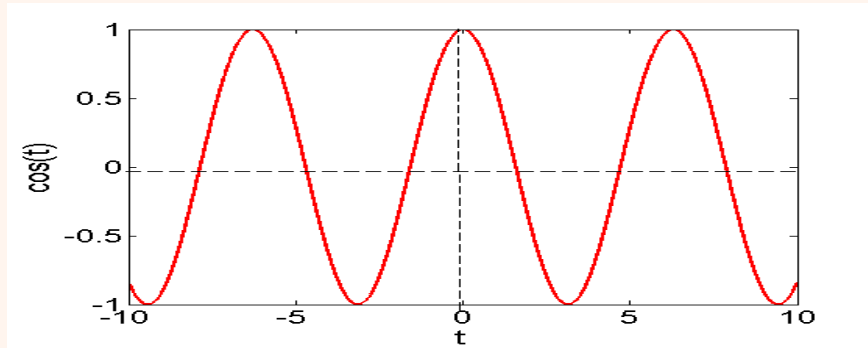
• مثال:

$$\begin{aligned}\cos(t+2\pi) &= \cos(t) \\ \sin(t+2\pi) &= \sin(t)\end{aligned}$$



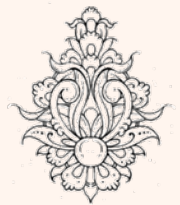
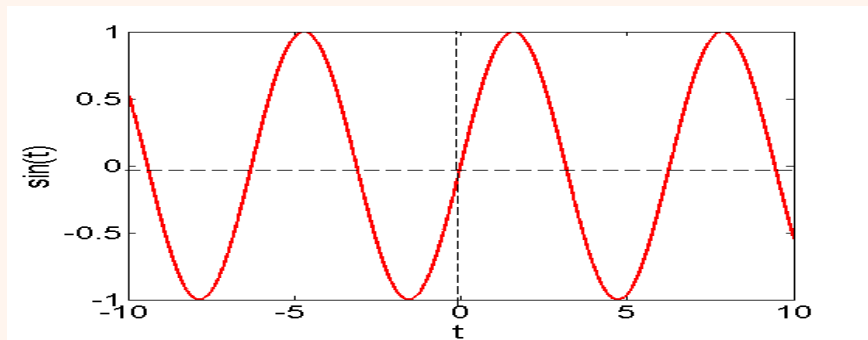
- سیگنالی زوج است که با معکوس خود برابر باشد.

$$x(-t) = x(t)$$



- سیگنالی فرد است که قرینه‌ی معکوسش باشد.

$$x(-t) = -x(t)$$



# سیگنال‌های زوج و فرد (ادامه...)

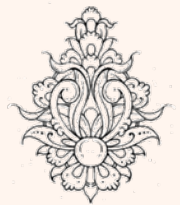
• مثال:

- $x(t) = \cos(t)$
- $x(t) = \sin(t)$
- $x(t) = c$
- $x(t) = t$

• هر سیگنال را می‌توان به صورت مجموع یک سیگنال زوج و یک سیگنال فرد نوشت.

$$Ev \{x(t)\} = \frac{1}{2} \{x(t) + x(-t)\}$$

$$Od \{x(t)\} = \frac{1}{2} \{x(t) - x(-t)\}$$



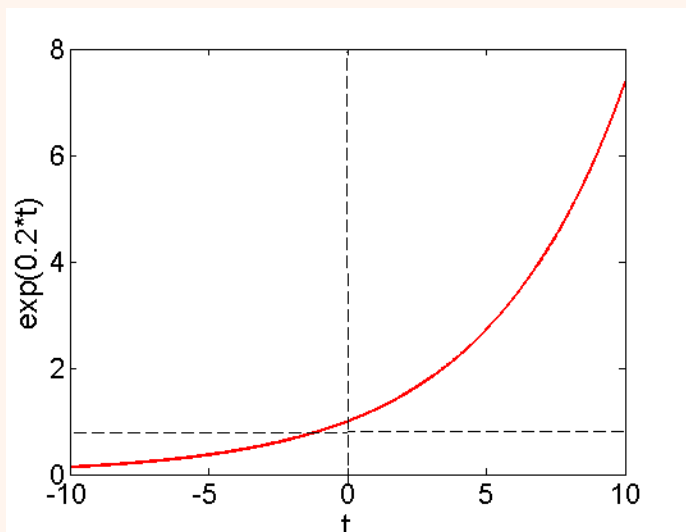
# معرفی سیگنال‌های پایه



# سیگنال‌های نمایی

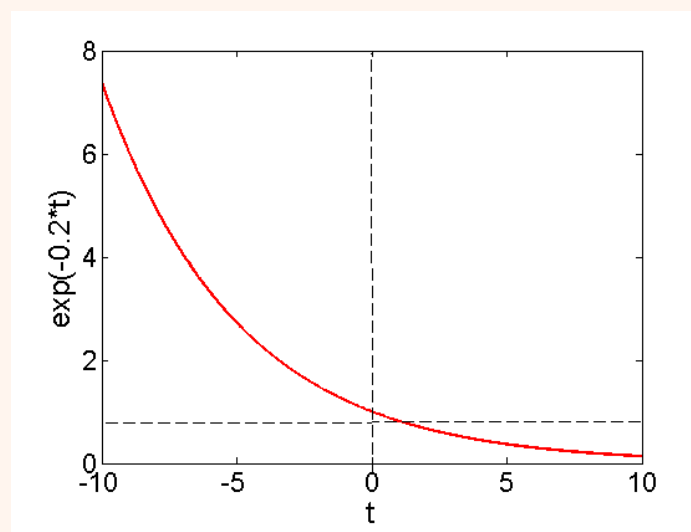
- در طبیعت بسیاری از سیگنال‌های بدین صورت هستند.

$$x(t) = Ce^{at}$$



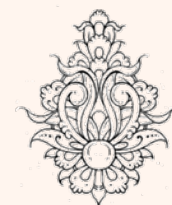
$$a > 0$$

$$C > 0$$



$$a < 0$$

$$C > 0$$



# سیگنال‌های نمایی و سینوسی

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

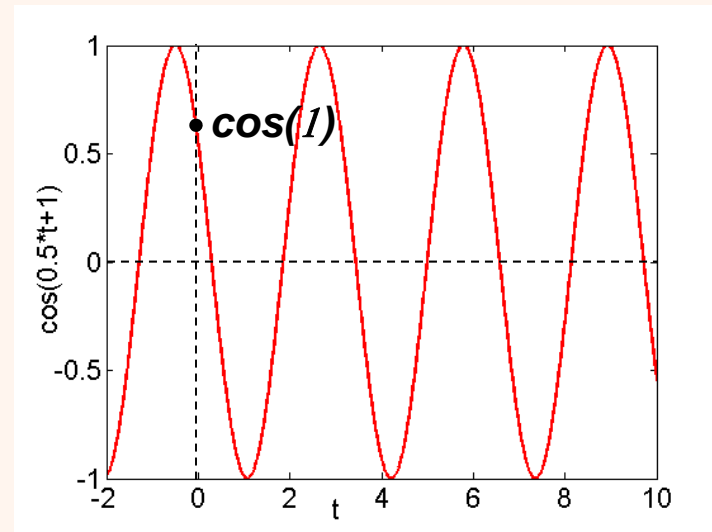
Euler's relationship

$$\begin{aligned} e^{j\omega_0(t+T)} &= \cos \omega_0(t+T) + j \sin \omega_0(t+T) \\ &= \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t = e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

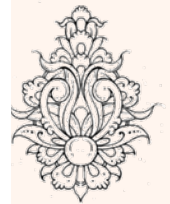
when  $T=2\pi/\omega_0$

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \Re(e^{j(\omega_0 t + \phi)})$$

$$A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \Im(e^{j(\omega_0 t + \phi)})$$



$$\begin{aligned} T_0 &= 2\pi/\omega_0 \\ &= \pi \end{aligned}$$



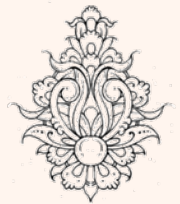
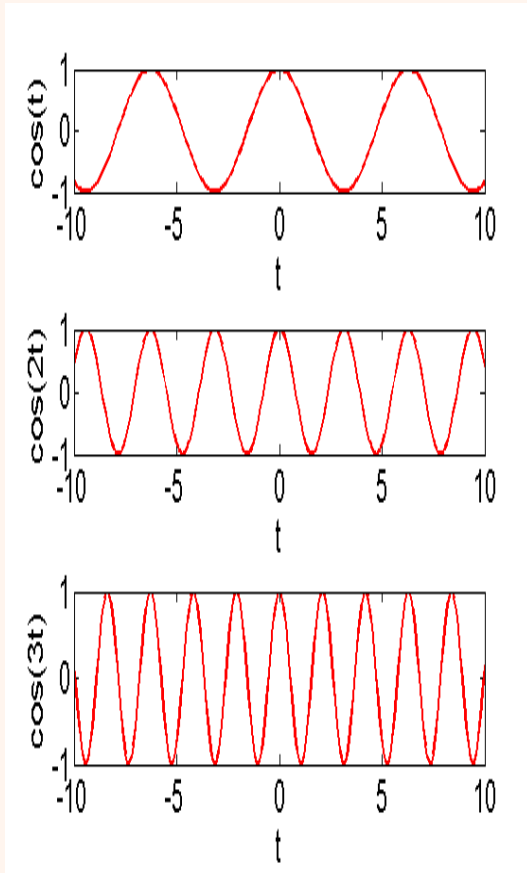
دانشگاه  
تهران  
پیشرو



# هارمونیک

$$\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- در تحلیل سیگنال‌ها این دسته از توابع نقش مهمی ایفا می‌کنند.
- توابع فوق دارای یک دوره‌ی تناوب مشترک هستند.  $2\pi/\omega_0$



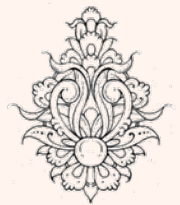
# سیگنال‌های سینوسی گسسته

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

$$e^{j\omega_0 n} = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n$$

$$A \cos(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$$

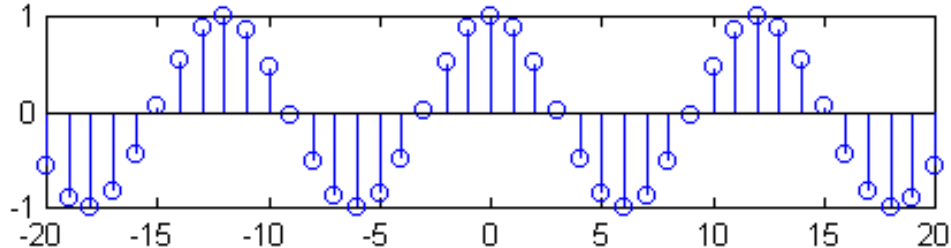
$$A \sin(\omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2j} e^{j\phi} e^{j\omega_0 n} - \frac{A}{2j} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 n}$$



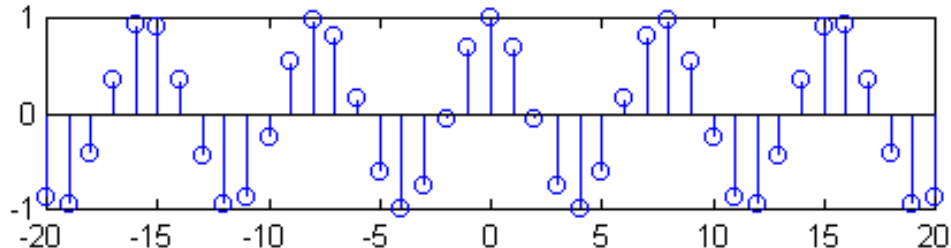
# مثال

دوره‌ی تناوب سیگنال‌های زیر چیست؟

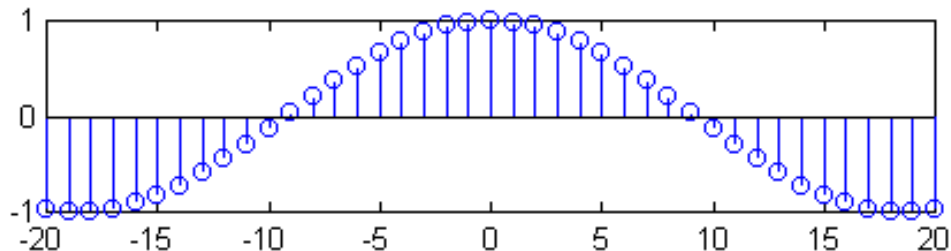
$$x[n] = \cos(2\pi n / 12)$$



$$x[n] = \cos(8\pi n / 31)$$



$$x[n] = \cos(n / 6)$$



# تناوب در سیگنال‌های گسسته سینوسی

- در سیگنال‌های سینوسی پیوسته  $e^{j\omega_0 t}$ 
  - هر چه مقدار  $\omega_0$  افزایش یابد، نرخ تغییرات بیشتر خواهد شد.

- به ازای هر  $\omega_0$  سیگنال متناوب است.

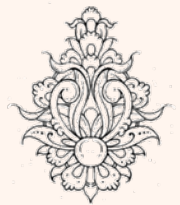
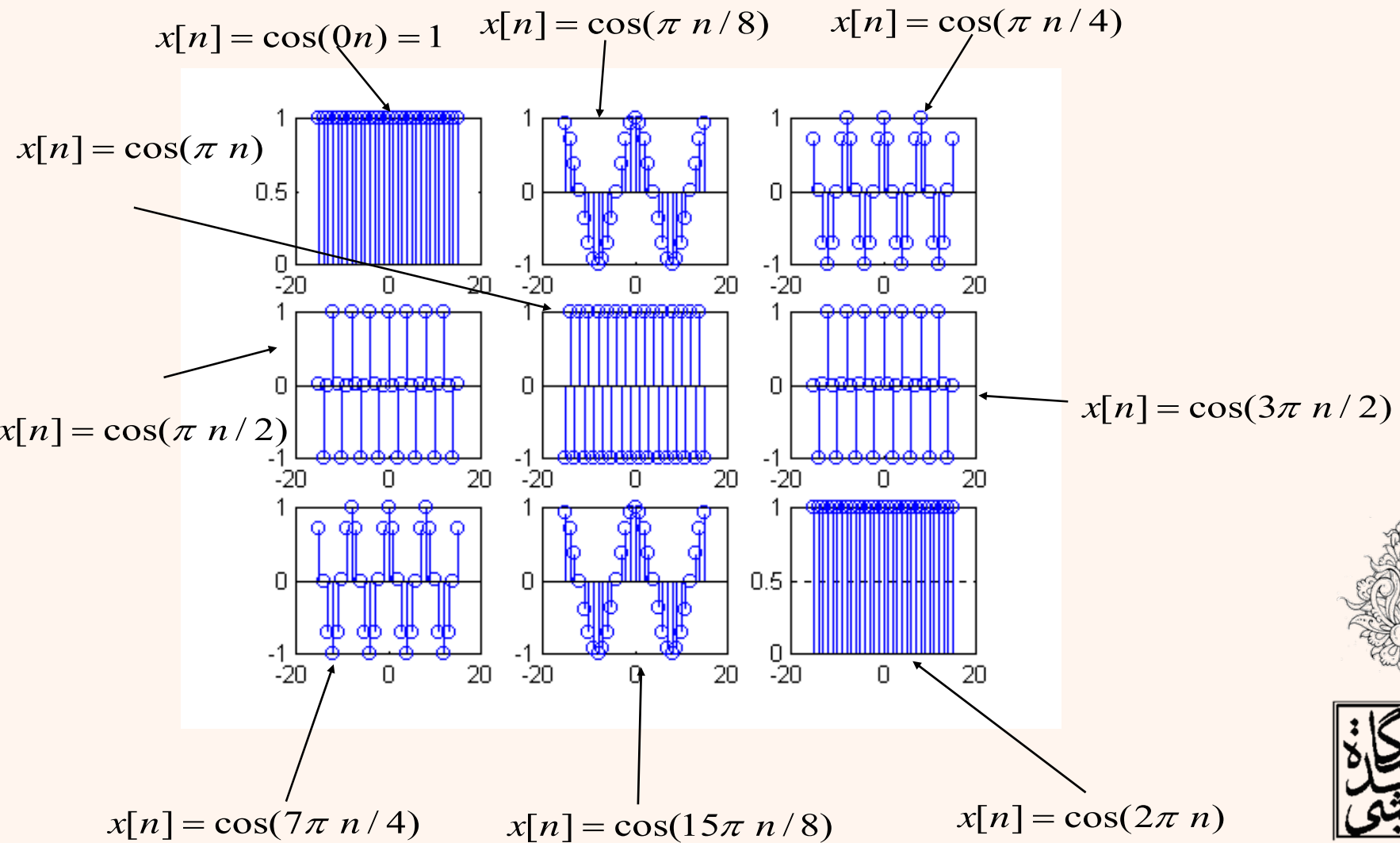
- در سیگنال‌های سینوسی گسسته  $e^{j\omega_0 n}$

$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

- یعنی دو فرکانس  $\omega_0$  و  $\omega_0 + 2\pi$  در عمل با هم برابر هستند!



# تناوب در توابع گسسته سینوسی



# تناوب در توابع گسسته سینوسی

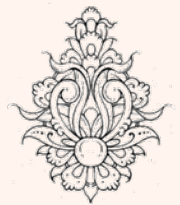
$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

$$e^{j\omega_0 N} = 1$$

$$e^{j\omega_0(n+N)} = e^{j\omega_0 n}$$

$$\omega_0 N = 2\pi m$$

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$



# تناوب در توابع گسسته سینوسی

$$x[n] = \cos(2\pi n / 12)$$

periodic because  $\omega_0 = 2\pi / 12$ ,

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{12}$$

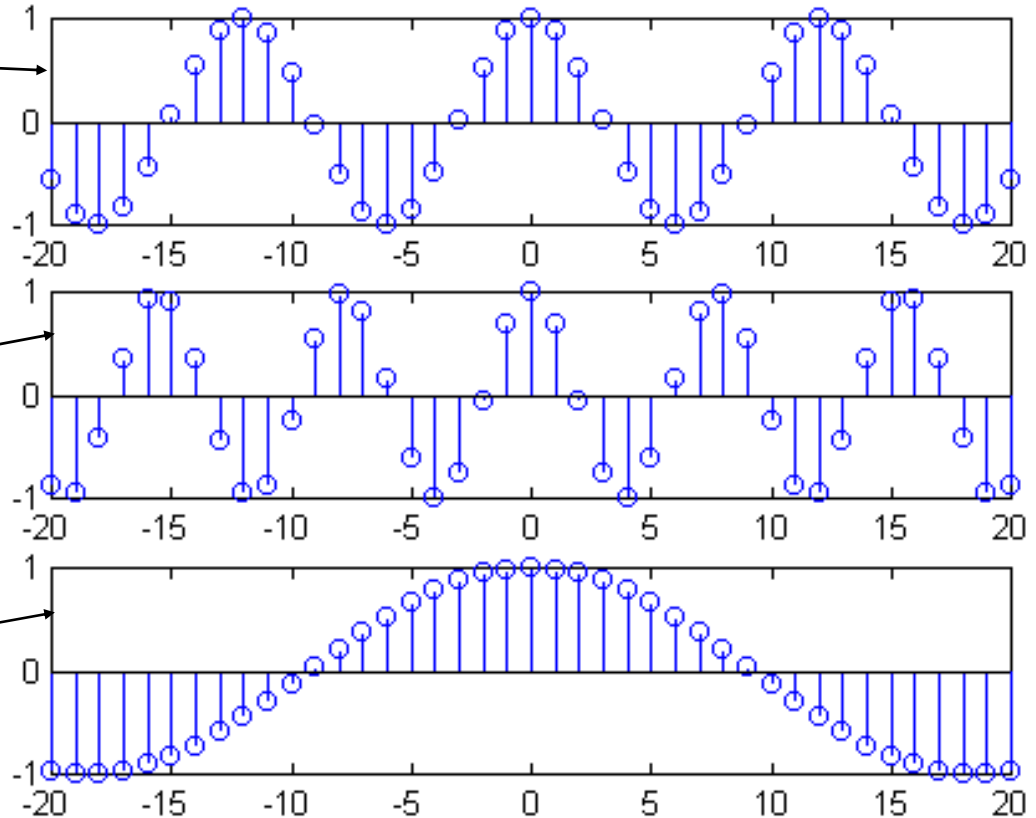
$$x[n] = \cos(8\pi n / 31)$$

periodic because  $\omega_0 = 8\pi / 31$ ,  $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{4}{31}$

$$x[n] = \cos(n / 6)$$

not periodic because  $\omega_0 = 1/6$ ,

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \neq \text{rational number}$$



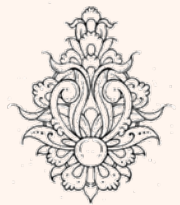
## Harmonically related periodic exponential sequence

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \text{ for } k = 0, \pm 1, \dots$$

$$\begin{aligned}\phi_{k+N}[n] &= e^{j(k+N)(2\pi/N)n} \\ &= e^{jk(2\pi/N)n} e^{j2\pi n} = \phi_k[n]\end{aligned}$$

$$\phi_0[n] = 1, \phi_1[n] = e^{j2\pi n/N}, \phi_2[n] = e^{j4\pi n/N},$$

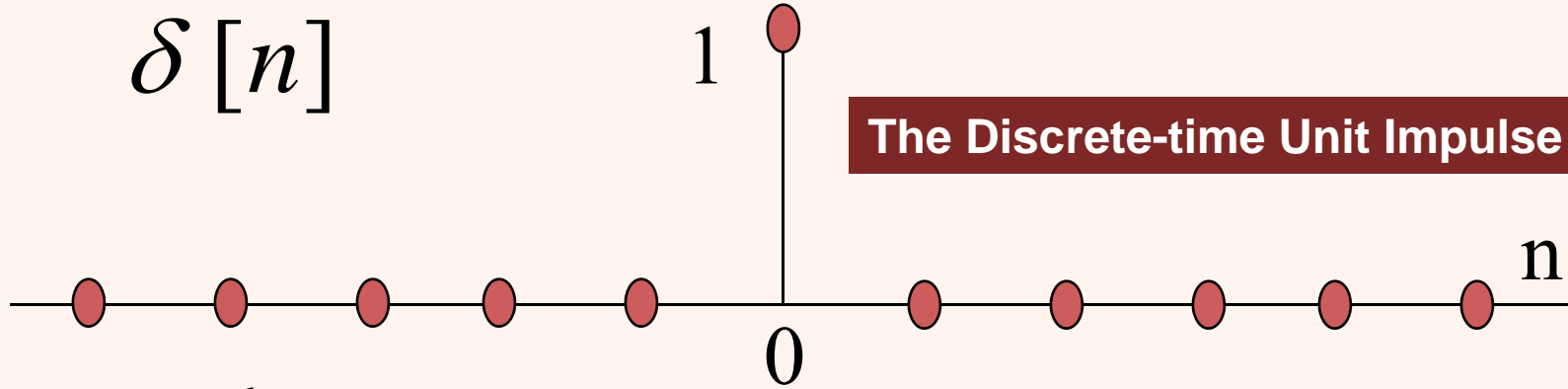
$$\dots\dots\phi_{N-1}[n] = e^{j2\pi(N-1)n/N}$$





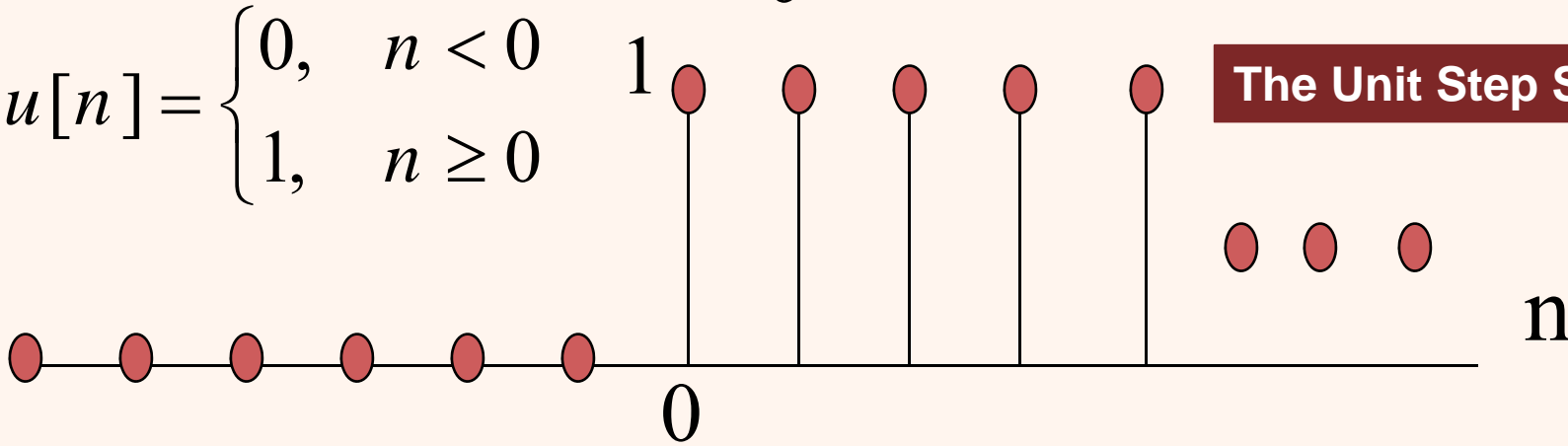
# سیگنال‌های زمان گسسته

$\delta[n]$



The Discrete-time Unit Impulse Sequence

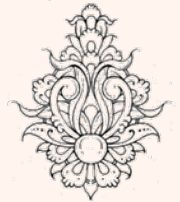
$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



The Unit Step Sequence

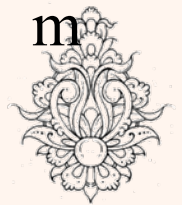
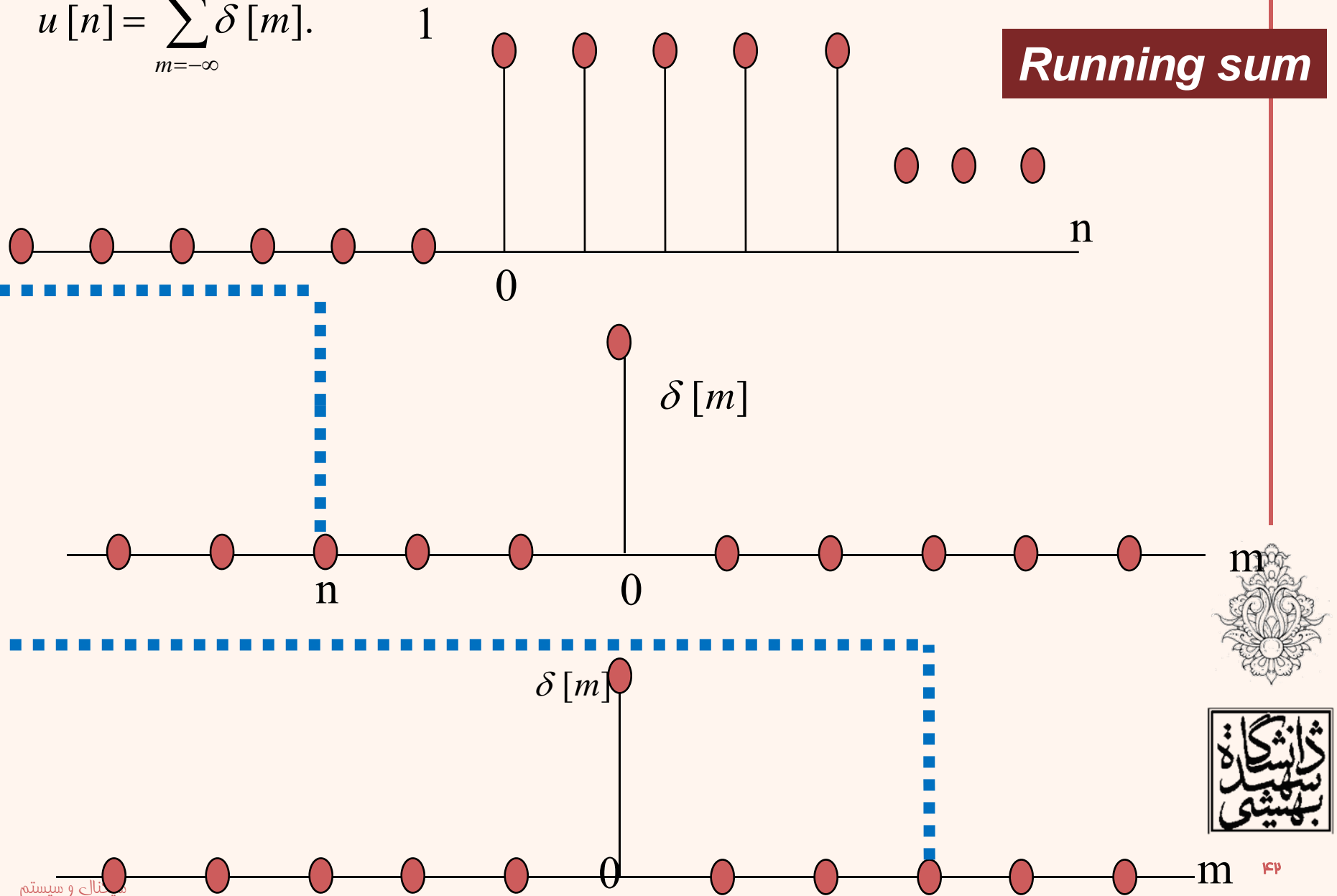
$$\delta[n] = u[n] - u[n-1].$$

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m].$$



# سیگنال‌های زمان گسسته

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m].$$



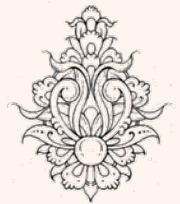
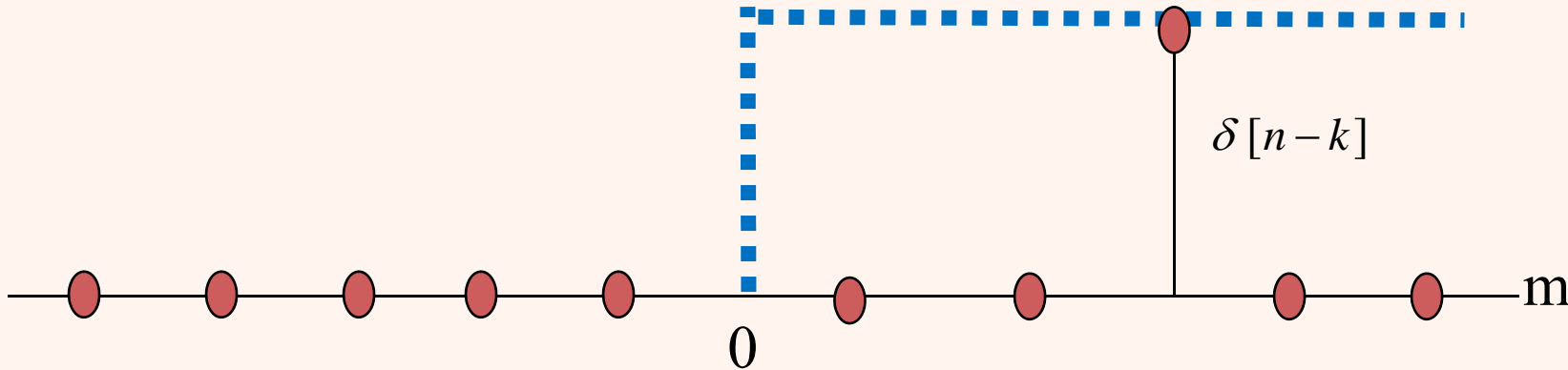
# سیگنال‌های زمان گسسته

$$k = n - m,$$

$$m = n - k.$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^0 \delta[n - k],$$

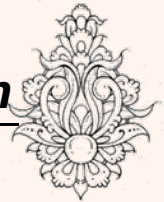
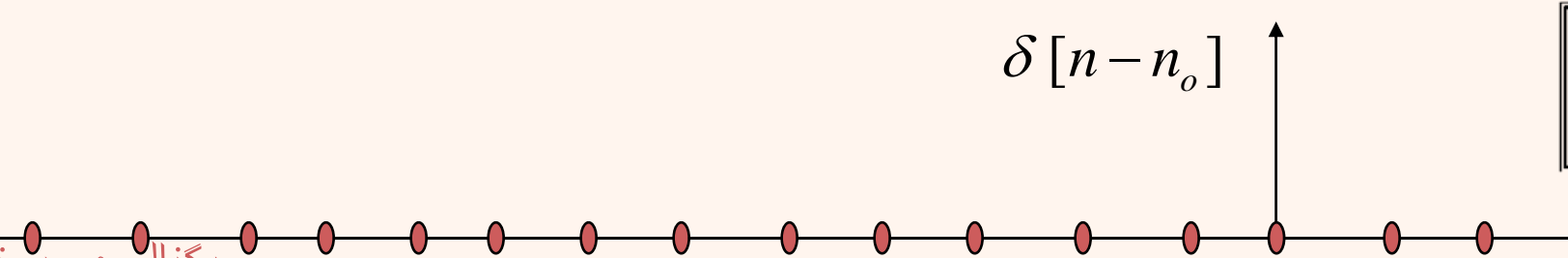
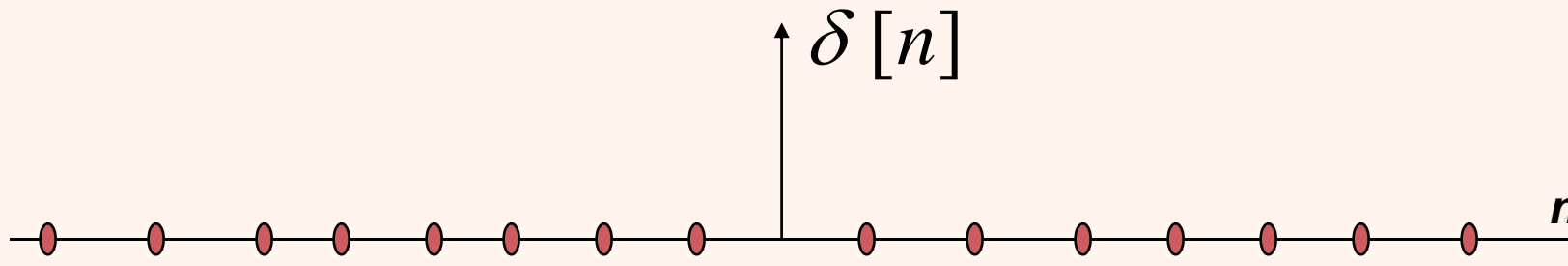
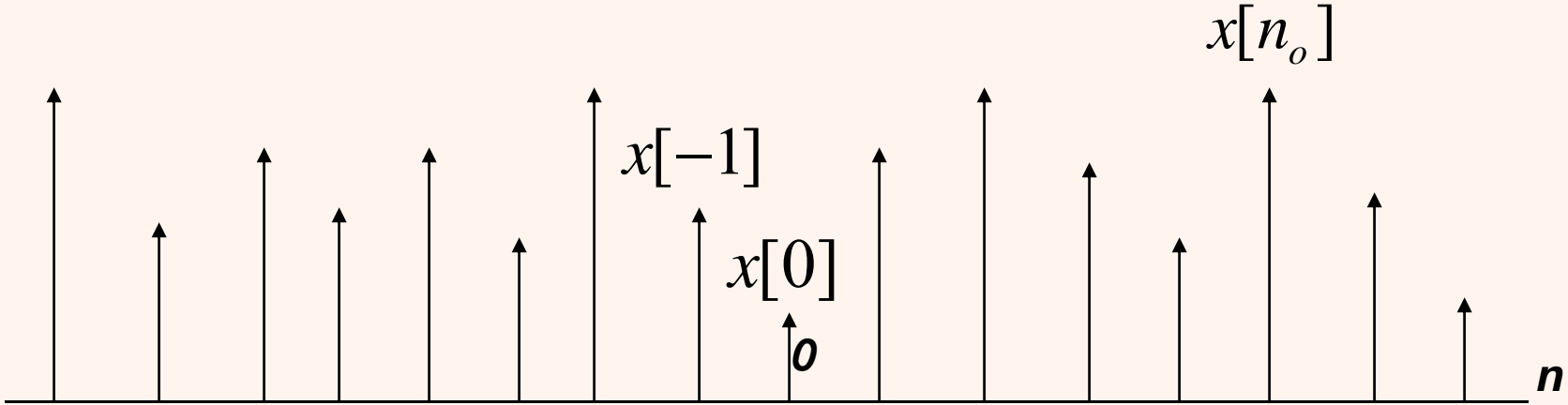
$$\text{or } u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k].$$



# غریب الگیری (نمونه برداری)

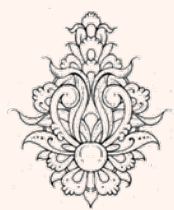
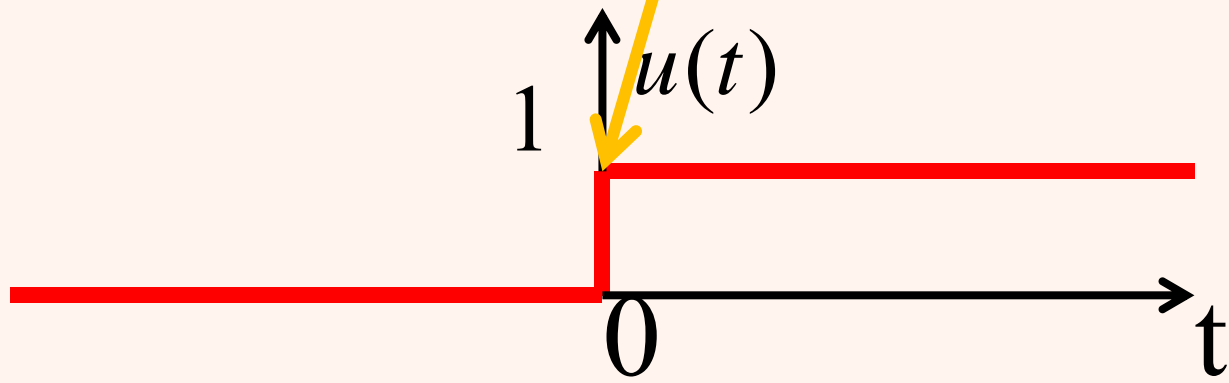
$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n - n_o] = x[n_o]\delta[n - n_o]$$



$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

در  $t=0$  گسستگی وجود دارد



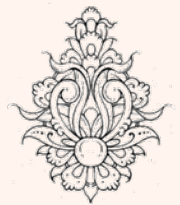
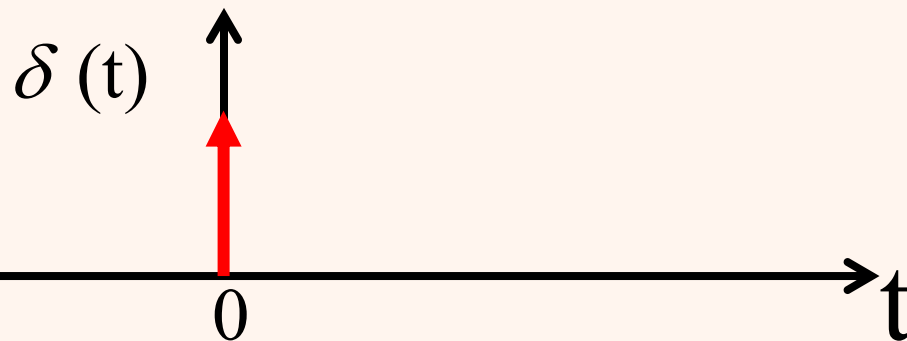
# سیگنال ضربیه واحد

## The Continuous-time Unit Impulse Function

- یکی از تابع‌های پرکاربرد، سیگنال ضربیه است که مرتبط با سیگنال پله است.

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad \delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ 1(\text{area}), & t = 0, \end{cases}$$

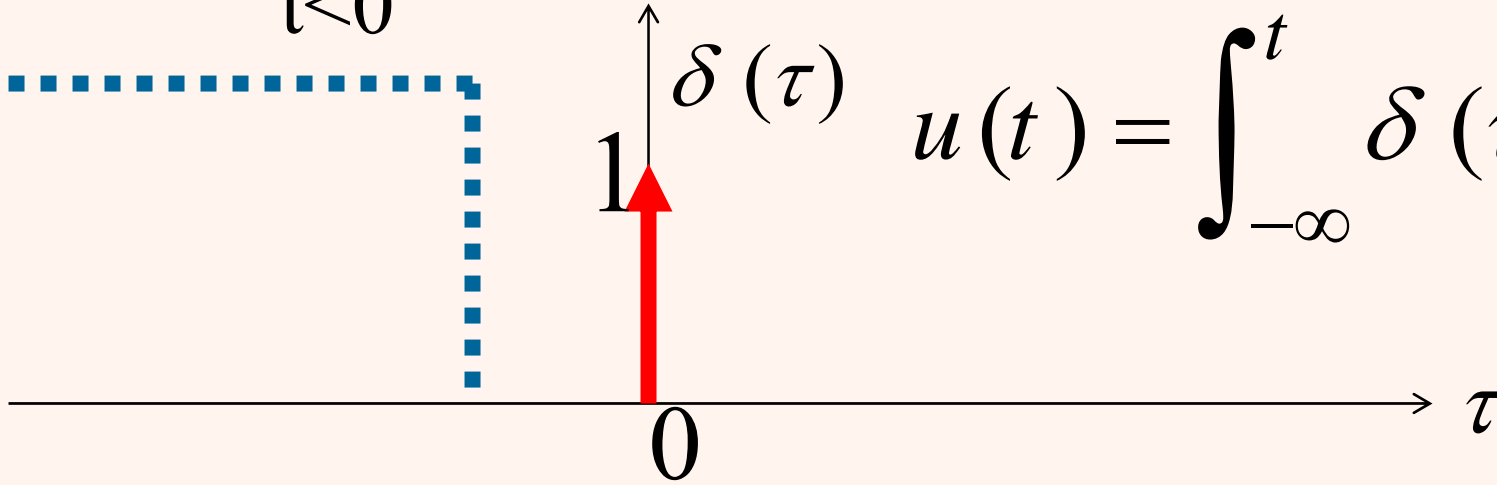
$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$



# سیگنال ضربیه واحد (ادامه...)

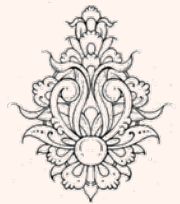
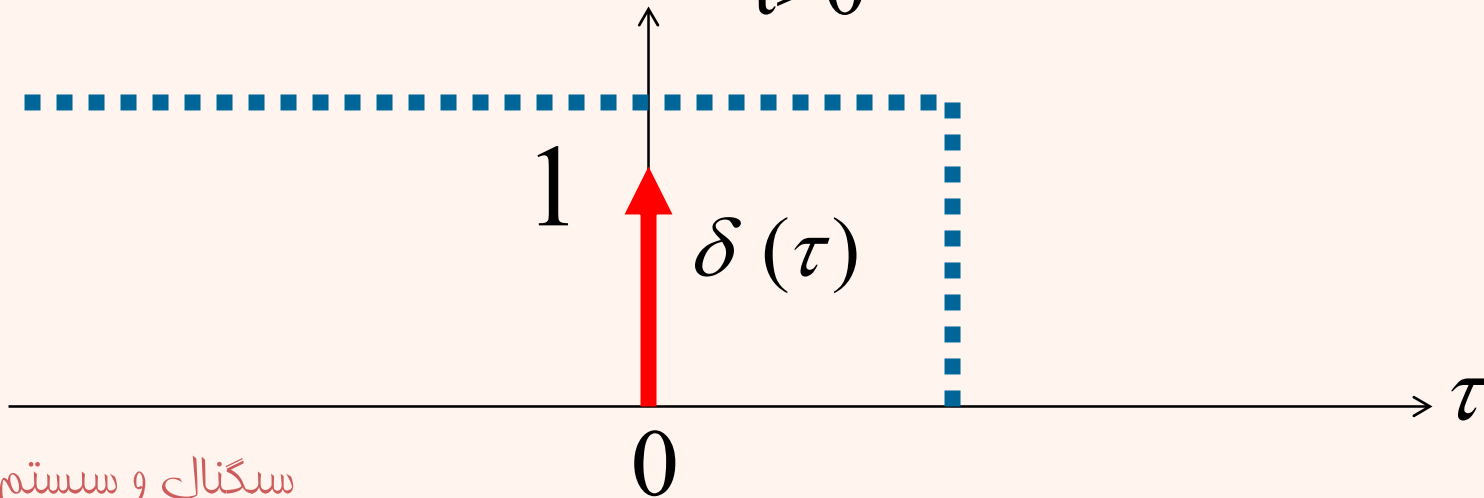
بازهی انتگرال گیری

$t < 0$



$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

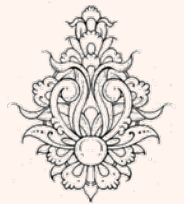
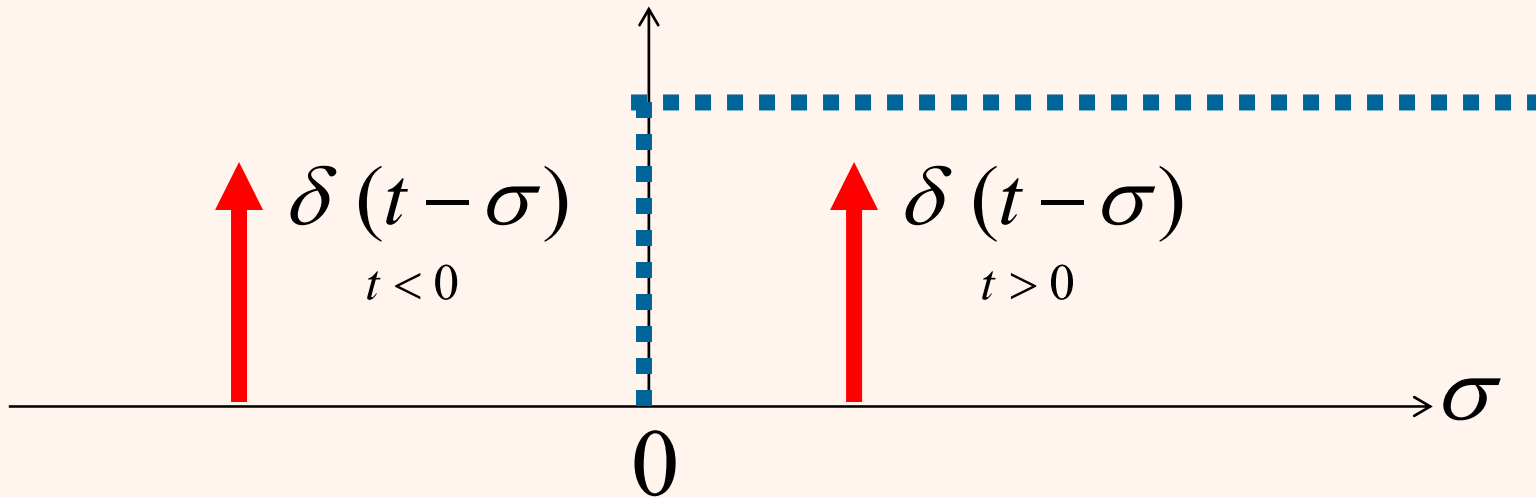
$t > 0$



# سیگنال ضربیه واحد (ادامه...)

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{\infty}^0 \delta(t - \sigma)(-d\sigma),$$

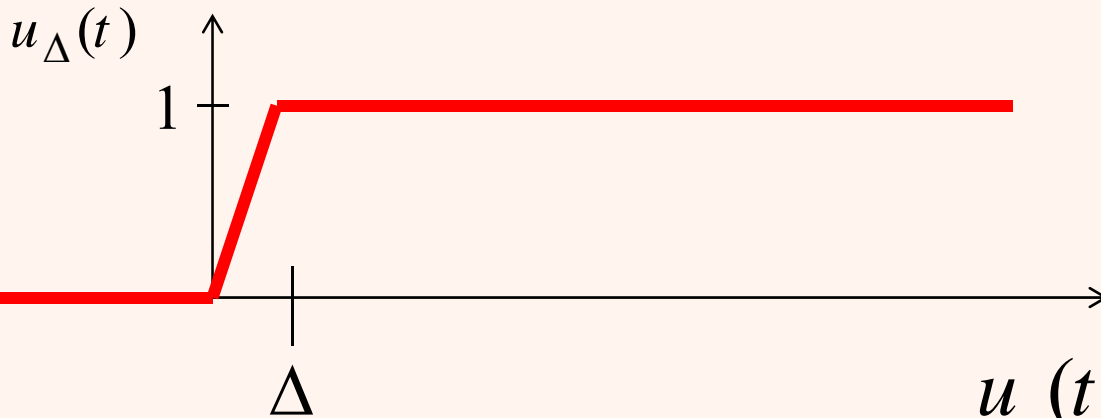
$$u(t) = \int_0^{\infty} \delta(t - \sigma) d\sigma$$





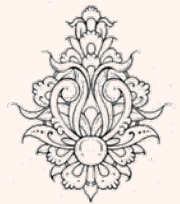
# توابع پایه (ادامه...)

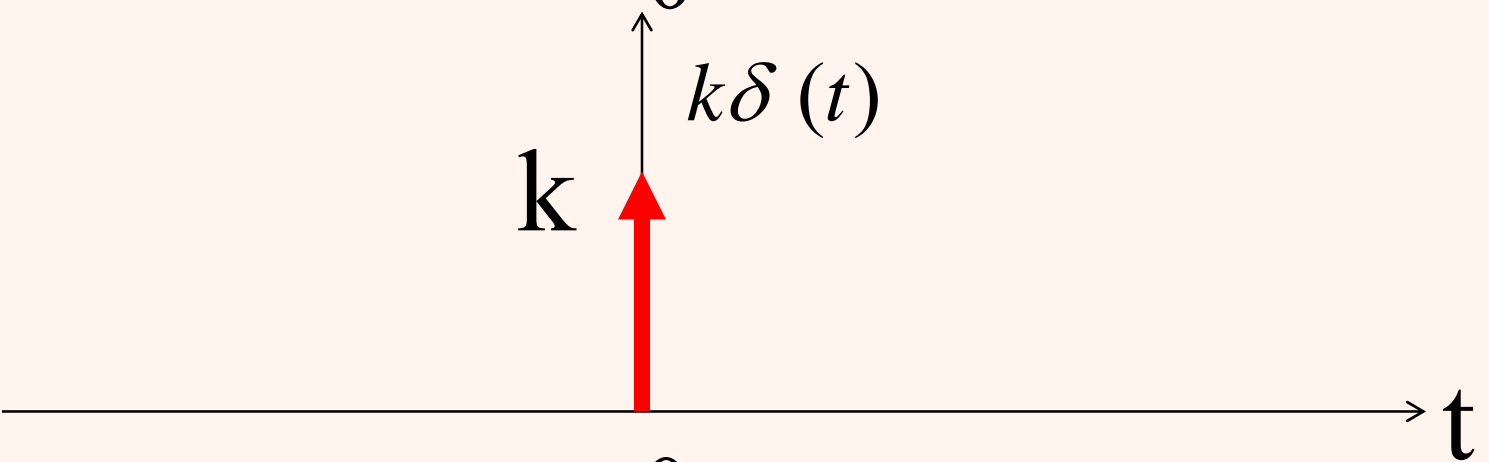
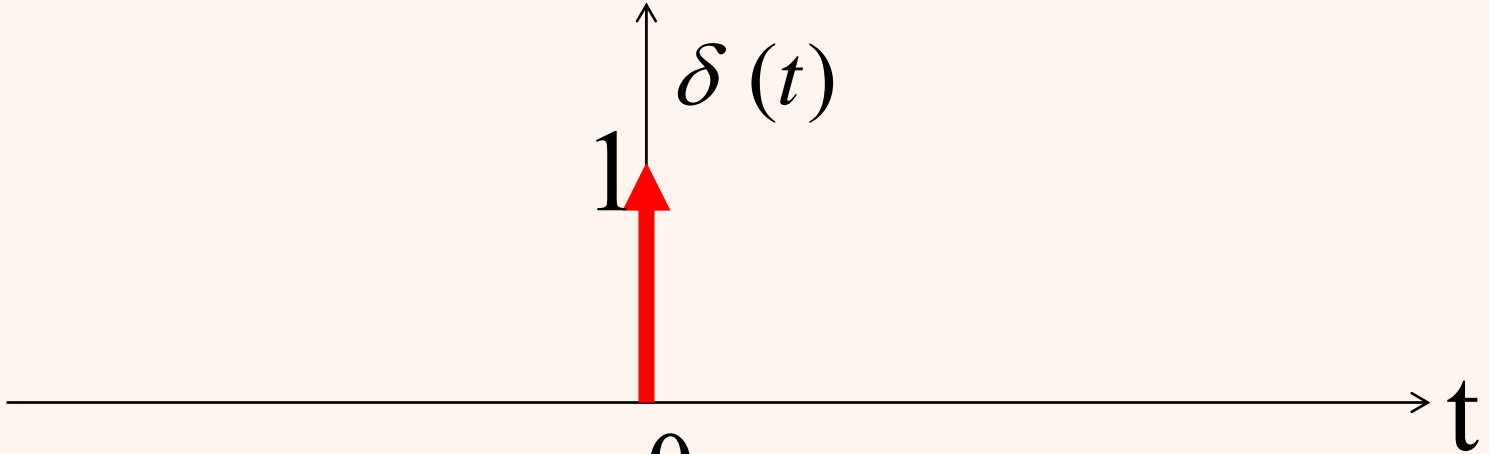
- برای درک بهتر می‌توان به گونه‌ای دیگر مساله را دید:



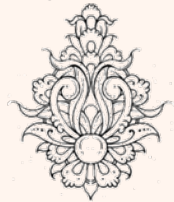
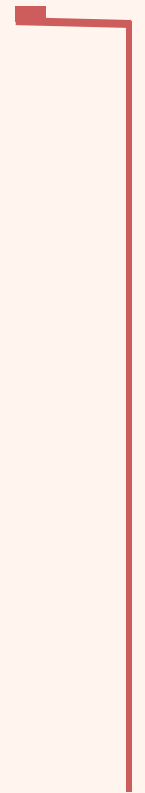
$$u(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} u_{\Delta}(t)$$

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt}, \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$



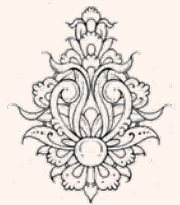
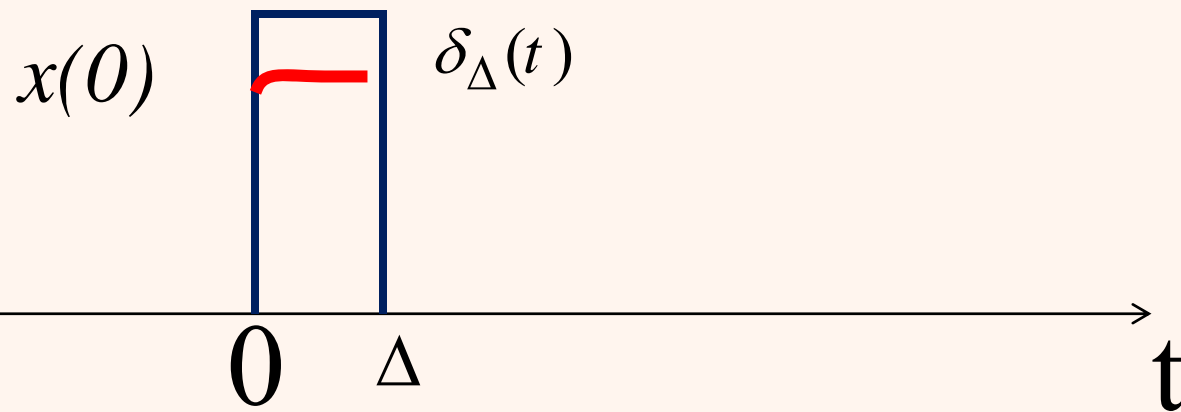
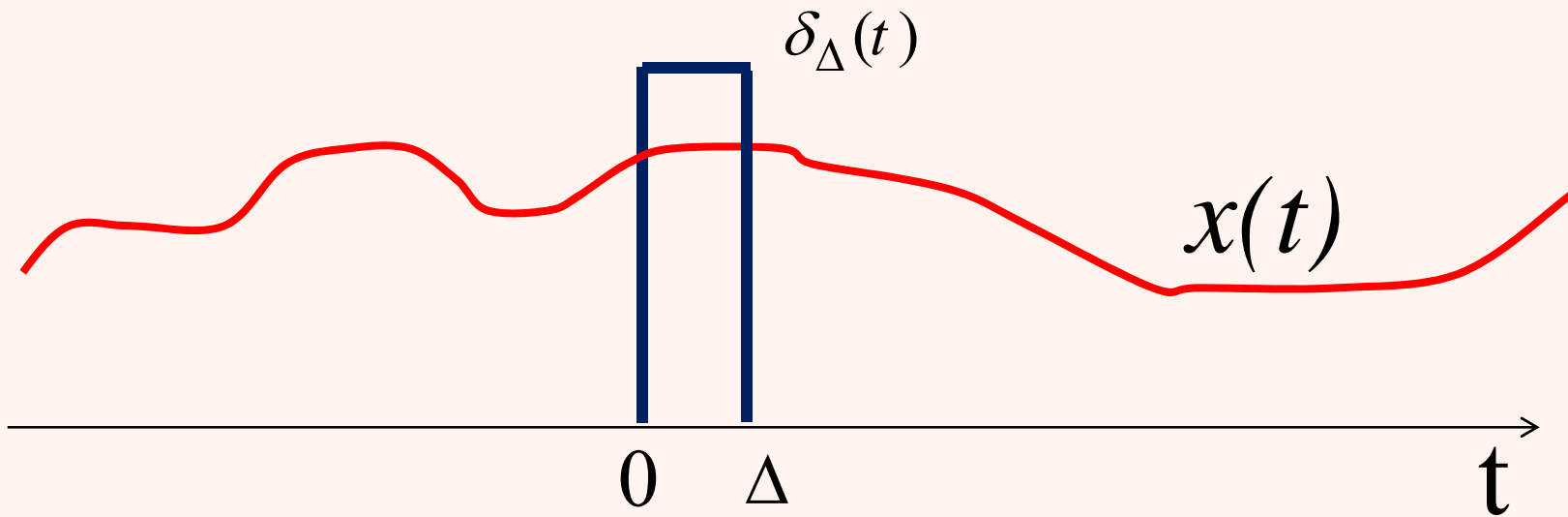


$$\int_{-\infty}^t k \delta(\tau) d\tau = ku(t)$$



# ضربه (ادامه...)

• عبارت زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1(t) = x(t) \delta_{\Delta}(t)$$


## ضربه (ادامه...)

- اگر  $\Delta$  به اندازه‌ی کافی کوچک در نظر گرفته شود:

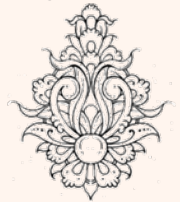
$$x(t)\delta_{\Delta}(t) \approx x(0)\delta_{\Delta}(t)$$

*Since*  $\delta(t) = \delta_{\Delta}(t)$  as  $\Delta \rightarrow 0$ .

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

- به صورت مشابه:

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

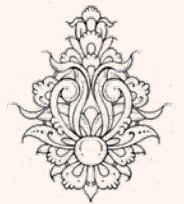


# مثال

$$\int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = tu(t)$$

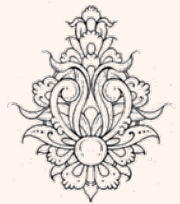
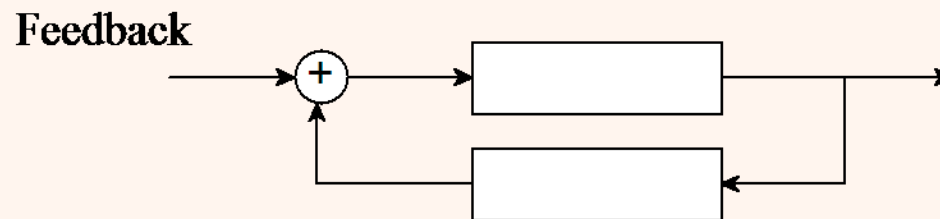
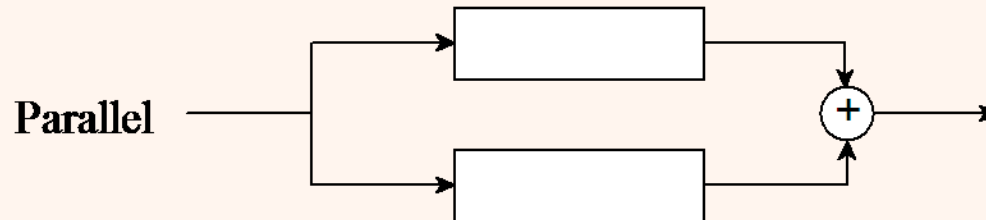
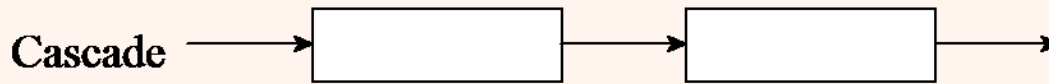


# سیستم‌ها و خصوصیات آن



# اتصال بین سیستم‌ها

- یکی از مباحث مهم، در واقع تحلیل اتصال سیستم‌های مختلف است.
- ساختن سیستم‌های پیچیده، با اتصال زیر سیستم‌های ساده‌تر



# ۱- سیستم با حافظه-بی حافظه

## Systems without memory -with memory

- سیستمی «بی حافظه» است که خروجی آن در هر زمان تنها به ورودی در آن زمان وابسته باشد.  
- مثال:

$$- y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$$

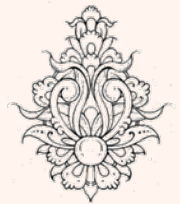
\_ مقاومت یک عنصر بدون حافظه است.

- سیستم «با حافظه» است که خروجی به زمانی جز زمان حاضر بستگی داشته باشد.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

$$y[n] = x[n-1]$$

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau,$$





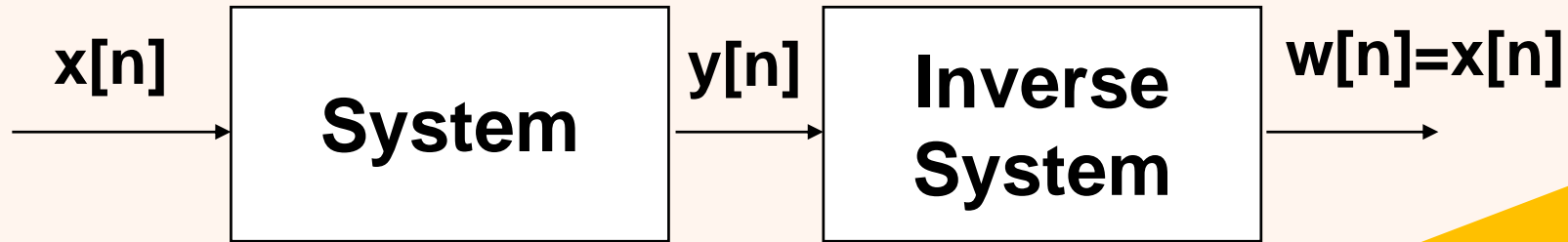
- سیستمی «معکوس پذیر» است که هر ورودی خاص آن یک خروجی خاص تولید کند.

سیستم اصلی

$$- y(t) = 2x(t)$$

سیستم معکوس

$$- w(t) = y(t)/2$$



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

آیا سیستم روبرو معکوس پذیر است؟

نوبت شما

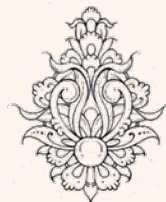
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k] + x[n], \quad y[n] = y[n-1] + x[n], \quad x[n] = y[n] - y[n-1]$$

$$w[n] = x[n] = y[n] - y[n-1]$$



- سیستمی «علی» (causal) است که فروچی آن به ورودی‌های زمان گذشته تاکنون بستگی دارد، در واقع سیستم غیرعلی به نوعی ورودی‌های آینده را پیش‌بینی می‌کند.
- تمام سیستم‌های فیزیکی، علی هستند. چون زمان به سمت جلو حرکت می‌کند.
- تصور کنید، یک سیستم پیش‌بینی قیمت سکه، که به داده‌های روزهای آینده وابسته باشد!
- چنین مفهومی در مورد سیگنال‌های مکانی مطرح نمی‌شود، همچنین در مورد سیگنال‌های ذخیره شده مطرح نمی‌شود. به عنوان مثال در پردازش تصویر، علیت اهمیت ندارد، چرا که متخیر مستقل سیگنال از جنس زمان نیست.

non-anticipative



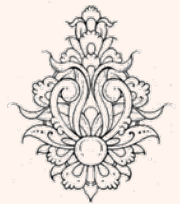
# سیستم‌های علی- تعریف ریاضی

• یک سیستم  $(x(t) \rightarrow y(t))$  علی است، اگر

when  $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$      $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$   
and  $x_1(t) = x_2(t)$     for all  $t \leq t_0$

Then  $y_1(t) = y_2(t)$     for all  $t \leq t_0$

چنین سیستمی از قانون علیت تبعیت می‌کند



# مثال

کدام یک از سیستم‌های زیر علی هستند؟

$$y(t) = x^2(t - 1)$$



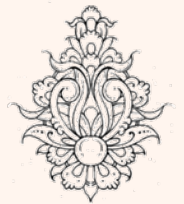
$$y(t) = x(t + 1)$$



$$y[n] = x[-n]$$



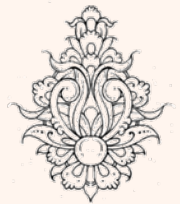
$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n - 1]$$



- سیستمی «پایدار» است که پاسخ آن به یک ورودی محدود واگرا نباشد.
- به عبارت دیگر ورودی محدود منجر به خروجی محدود می‌شود.

BIBO(Bounded Input, Bounded Output)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$



# ۵- سیستم‌های تخییرناپذیر با زمان

## TIME-INVARIANCE (TI)

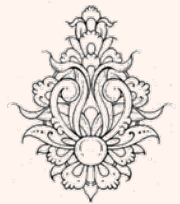
- یک سیستم «تخییرناپذیر با زمان» است، چنانچه عملکرد آن وابسته به زمان نباشد. پاسخ سیستم به ورودی یکسان مستقل از زمان خروجی ثابتی باشد.

- یک سیستم زمان گسسته  $(x[n] \rightarrow y[n])$  تخییرناپذیر با زمان است،

If  $x[n] \rightarrow y[n]$   
then  $x[n - n_0] \rightarrow y[n - n_0]$ .

- برای زمان پیوسته

If  $x(t) \rightarrow y(t)$  then  $x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$ .



# مثال

$$y(t) = x^2(t + 1)$$



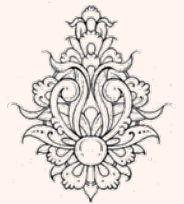
$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} x^3[n - 1]$$



$$y(t) = \sin[x(t)]$$



$$y[n] = nx[n]$$



# مثال

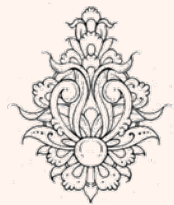
نوبت شما

- خوب، نوبت شماست!
- اگر ورودی یک سیستم  $T$  متناوب باشد، خروجی چه فرمی خواهد داشت؟

$$\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t) ,$$

$$TI, \quad \begin{array}{l} \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{x}(t + T) \rightarrow \mathbf{y}(t + T) \end{array}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t + T)$$



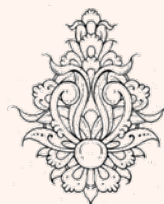


# ۶- سیستم‌های خطی و غیرخطی

## LINEAR AND NONLINEAR SYSTEMS

- بسیاری از سیستم‌های عملکردی غیرخطی دارند، مانند برخی المان‌های مدار (دیود، ترانزیستور) سیستم‌های اقتصادی و دینامیک هواپیما
- با این وجود تمرکز ما بر روی «سیستم‌ها خطی» است.

- بیشتر سیستم‌هایی که با آن‌ها سروکار داریم، خطی هستند. (در مدارهای الکتریکی مقاومت، خازن و سلف)
- پیش‌بینی عملکرد سیستم‌های غیرخطی ساده‌تر است.
- برای تحلیل برخی سیستم‌های غیرخطی، در محدوده‌ای خطی‌سازی انجام می‌شود. (عملکرد سیستم در این محدوده خطی در نظر گرفته می‌شود.)



# سیستم‌های خطی

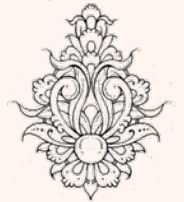
- یک سیستم خطی است در صورتی که دارای خاصیت superposition باشد:  
– (جمع‌پذیری و همگن بودن)

If  $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$  and  $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

then  $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$

$y[n] = x^2[n]$       **Nonlinear, TI, Causal**

$y(t) = x(2t)$       **Linear, not TI, Noncausal**



# خصوصیات سیستم‌های خطی

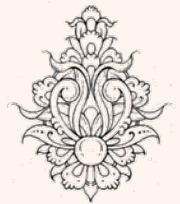
- Superposition

If  $x_k[n] \rightarrow y_k[n]$

Then  $\sum_k a_k x_k[n] \rightarrow \sum_k a_k y_k[n]$

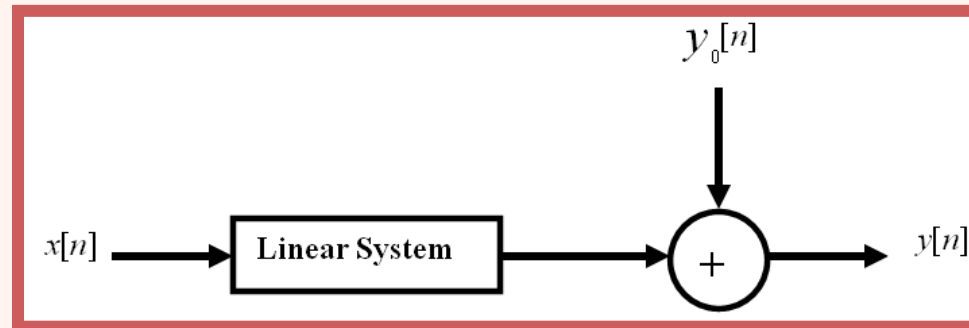
در یک سیستم خطی پاسخ ورودی صفر همواره صفر خواهد بود

$$0 = 0 \times x[n] \rightarrow 0 \times y[n] = 0$$

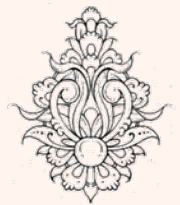


آیا سیستم زیر خطی است؟

$$y[n] = 2x[n] + 3$$



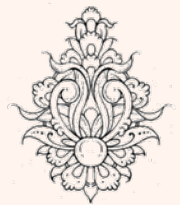
در این سیستم پاسخ به تغییرات خطی خواهد بود



# خصوصیات سیستم‌های خطی (ادامه...)

- یک سیستم خطی، علی‌الاست، اگر و تنها اگر

$$x(t) = 0 \text{ for } t \leq t_0 \rightarrow y(t) = 0 \text{ for } t \leq t_0 (*).$$



# سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

- در بیشترین بخش تره، روی چنین سیستم‌هایی متمرکز خواهیم شد.
  - از لحاظ کاربردی اهمیت بیشتری دارند.
  - برای تحلیل چنین سیستم‌هایی ابزارهایی قدرتمندی وجود دارد.
- در صورت دانستن پاسخ چنین سیستم‌هایی به برخی ورودی‌ها، می‌توان پاسخ سیستم برای بسیاری از ورودی‌ها را دانست.

