محیط‌های چندرسانه‌ای

۱۳-۱۱-۰۸۰-۰۱

(بخش پنجم)

تبدیل فوریه ۱

دانشگاه شهید بهشتی

زمستان ۱۳۹۳

احمد محمودی ازناوه

http://faculties.sbu.ac.ir/~a_mahmoudi/

فهرست مطالب

- مروری بر آنالیز فوریه
- سیگنال‌های زمان پیوسته
  - سری فوریه
  - تبدیل فوریه
  - فاز و اندازه
- سیگنال‌های زمان گسسته
  - سری فوریه
  - تبدیل فوریه (DTFT)
  - تبدیل فوریه‌ی گسسته(DFT)

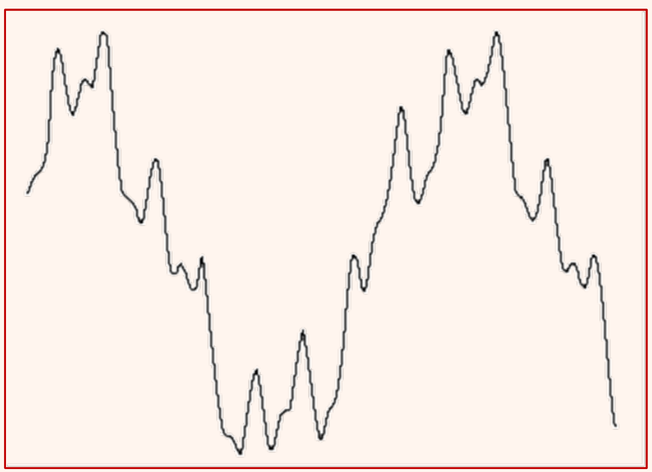
تبدیل فوریه

The profound study of nature is the most fertile source of mathematical discoveries.

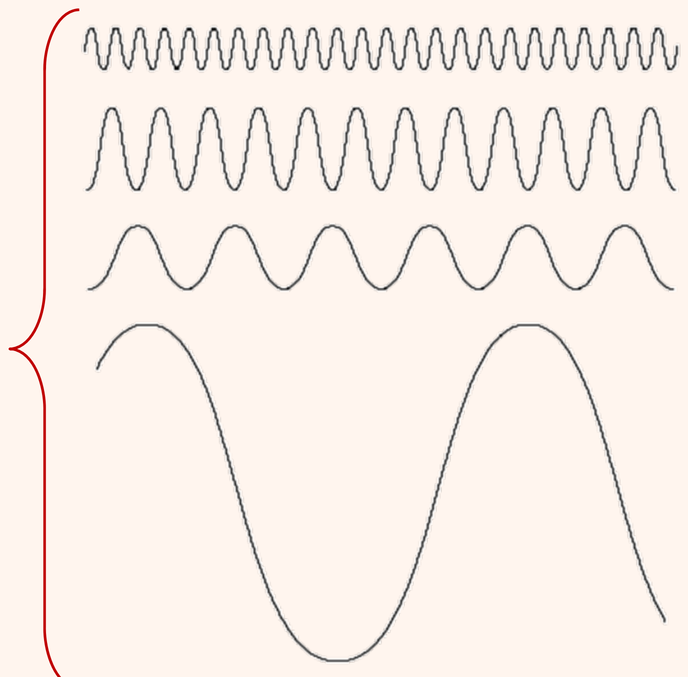
Joseph Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier

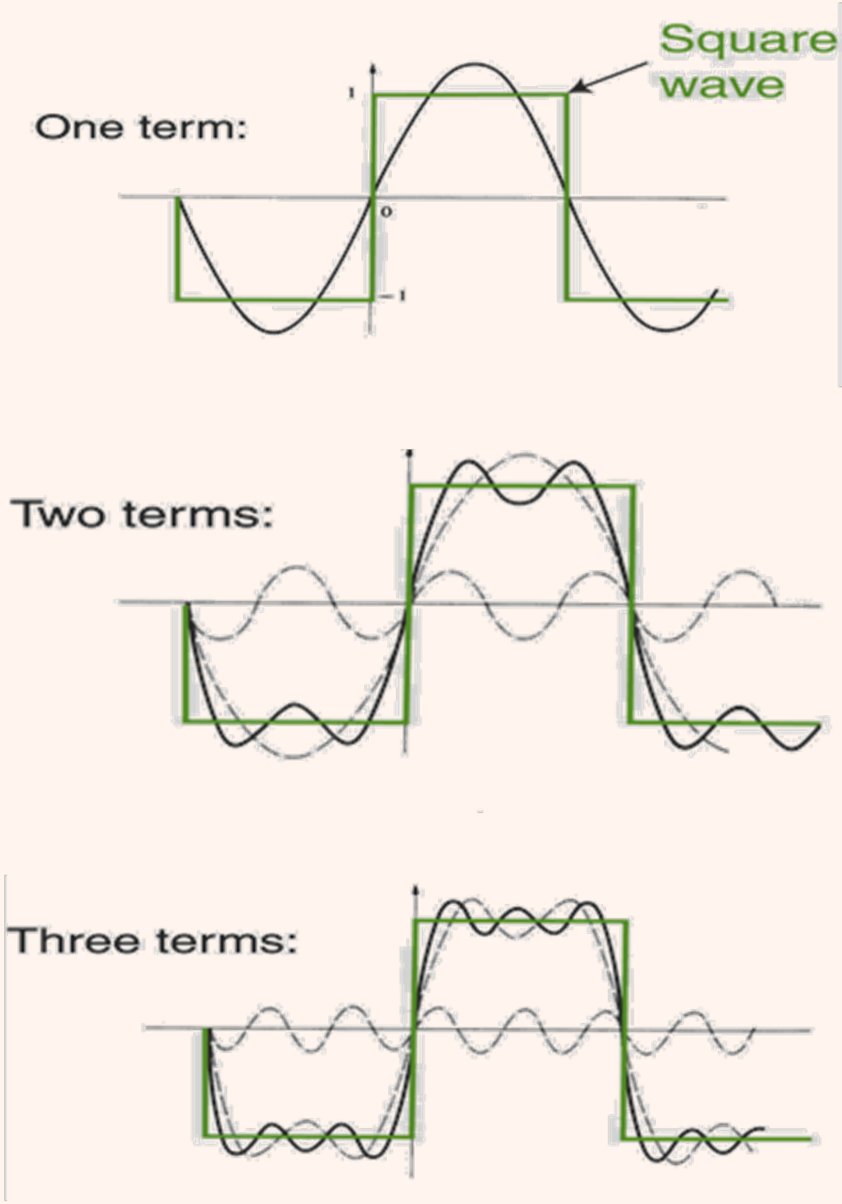
- هر تابع متناوب را می‌توان به وسیله‌ی یک جمع وزن‌دهی شده از توابع سینوسی و کسینوسی نمایش داد.



=



توابع پایه

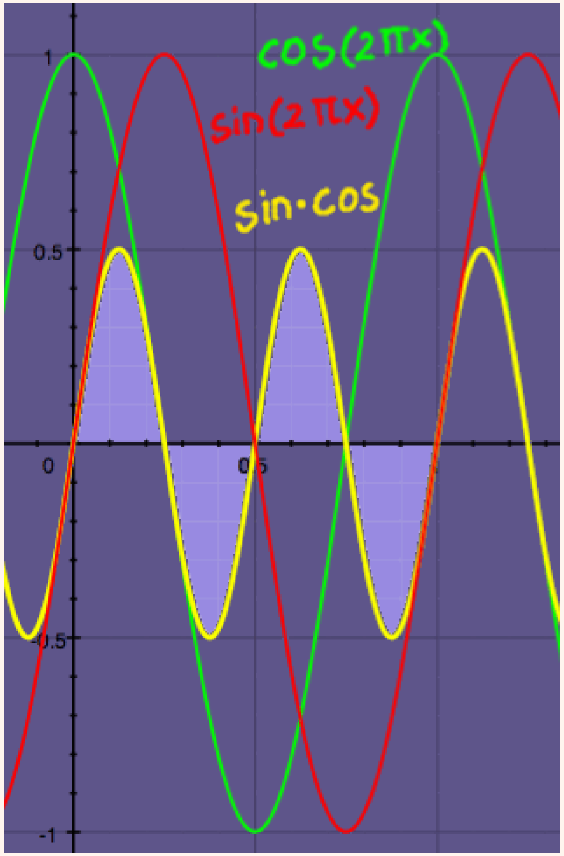


تخمین یک موج مربعی با مجموعه‌ای از توابع سینوسی

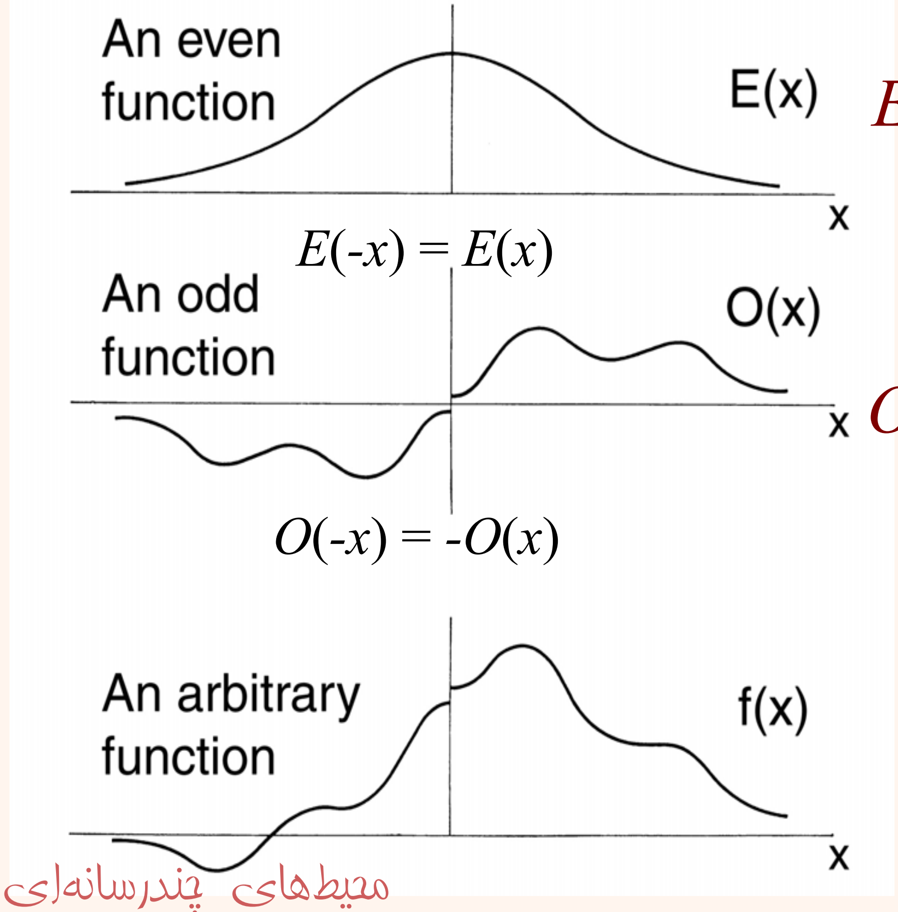
تعامد

- دو تابع را برهم عمود گویند اگر داشته باشیم:

$$\langle f,g\rangle = \int f(x)g^*(x)dx = 0$$



- هر تابعی را می‌توان به صورت مجموعی از توابع زوج و فرد نمایش داد:



$$E(x) \equiv [f(x) + f(-x)]/2$$

$$O(x) \equiv [f(x) - f(-x)]/2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

- چون $\cos(mt)$ یک تابع زوج است، تابع زوج $f(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} F_m \cos(mt)}$$

- اگر فرض شود $f(t)$ در بازه‌ی $(-\pi,\pi)$ واقع شده است، برای محاسبه‌ی F_m خواهیم داشت:

$$\boxed{F_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,dt}$$

- چون $\sin(mt)$ یک تابع فرد است، تابع فرد $f(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} F'_m \sin(mt)$$

- اگر فرض شود $f(t)$ در بازه‌ی $(-\pi,\pi)$ واقع شده است، برای محاسبه‌ی F'_m خواهیم داشت:

$$\boxed{F'_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)\,dt}$$

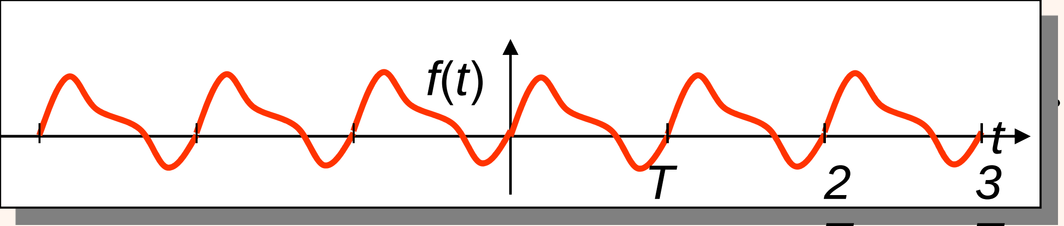
- به صورت کلی برای هر تابع متناوب می‌توان رابطه‌ی زیر را در نظر گرفت:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} F_m \cos(mt) + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} F'_m \sin(mt)}$$

Even component **Odd component**

- که ضرایب آن برابر است با:

$$F_m = \int f(t)\cos(mt)\,dt \qquad F'_m = \int f(t)\sin(mt)\,dt$$



سری فوریه (ادامه..

- به صورت کلی یک تابع متناوب را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$f(t) = d + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

$$= d + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right) \right]$$

$$= d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n)}{2} e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + ib_n)}{2} e^{-int}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

سری فوریه (ادامه...)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

where

$$c_n = \begin{cases} d & , n = 0 \\ (a_n - ib_n)/2 & , n = 1, 2, 3, \ldots \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2 & , n = -1, -2, -3, \ldots \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t)\, dt \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t)\, dt \\ d &= \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \end{aligned}\right\}\ \text{ضرایب سری}$$

n صفر است

$$\boxed{\begin{aligned} c_0 &= d \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-0} f(t)\, dt \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(nt) - i\sin(nt)]\, f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, dt \end{aligned}}$$

n مثبت است

$$\boxed{\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(-nt) + i\sin(-nt)]\, f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, dt \end{aligned}}$$

n منفی است

سری فوریه (ادامه...)

n صفر است

$$
\begin{aligned}
c_0 &= d \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-0} f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

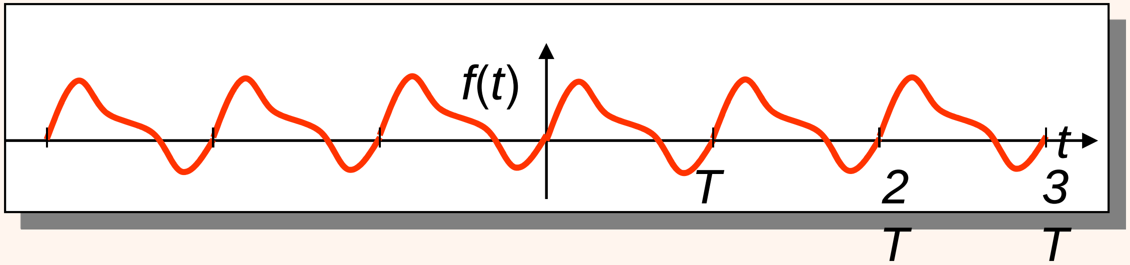
n مثبت است

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(nt) - i\sin(nt)]\, f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

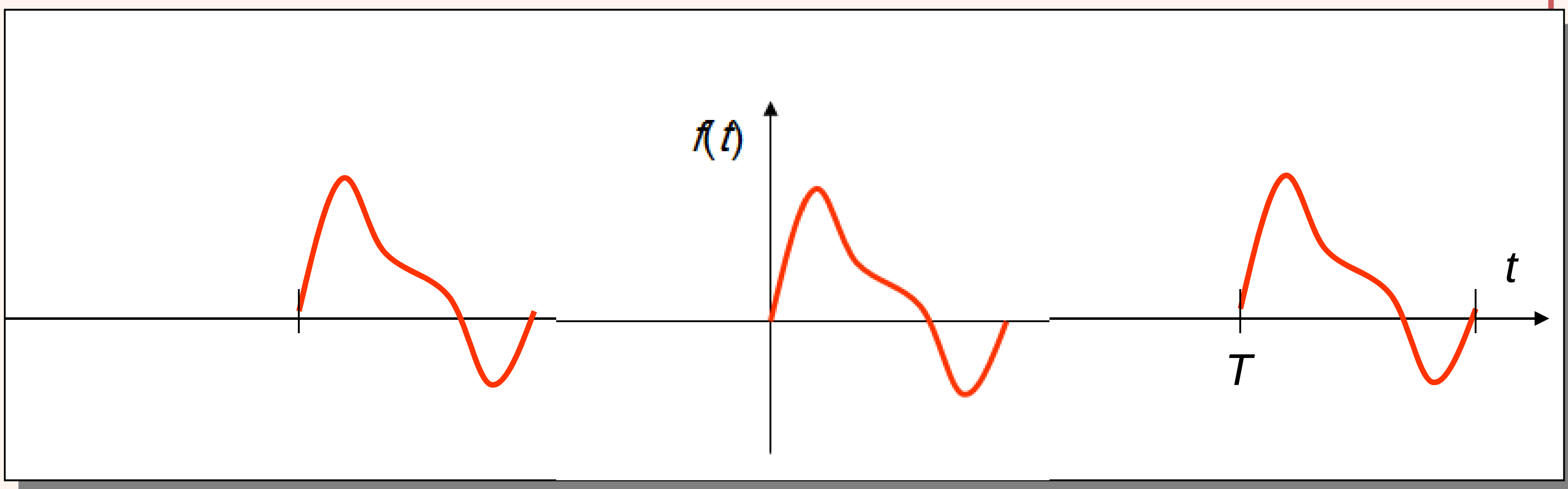
n منفی است

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(-nt) + i\sin(-nt)]\, f(t)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\,dt \\
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}
\end{aligned}
$$



- سری فوریه برای سیگنال‌های **متناوب** به دست می‌آید.
- حال اگر سیگنالی پریودیک نباشد؟

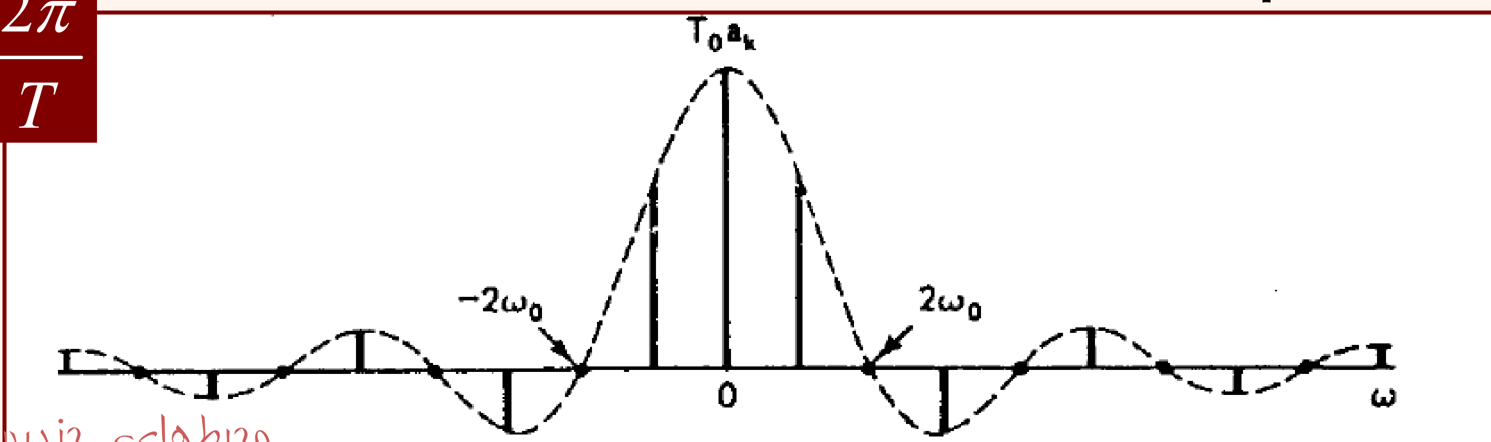


اگر $T\to\infty$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

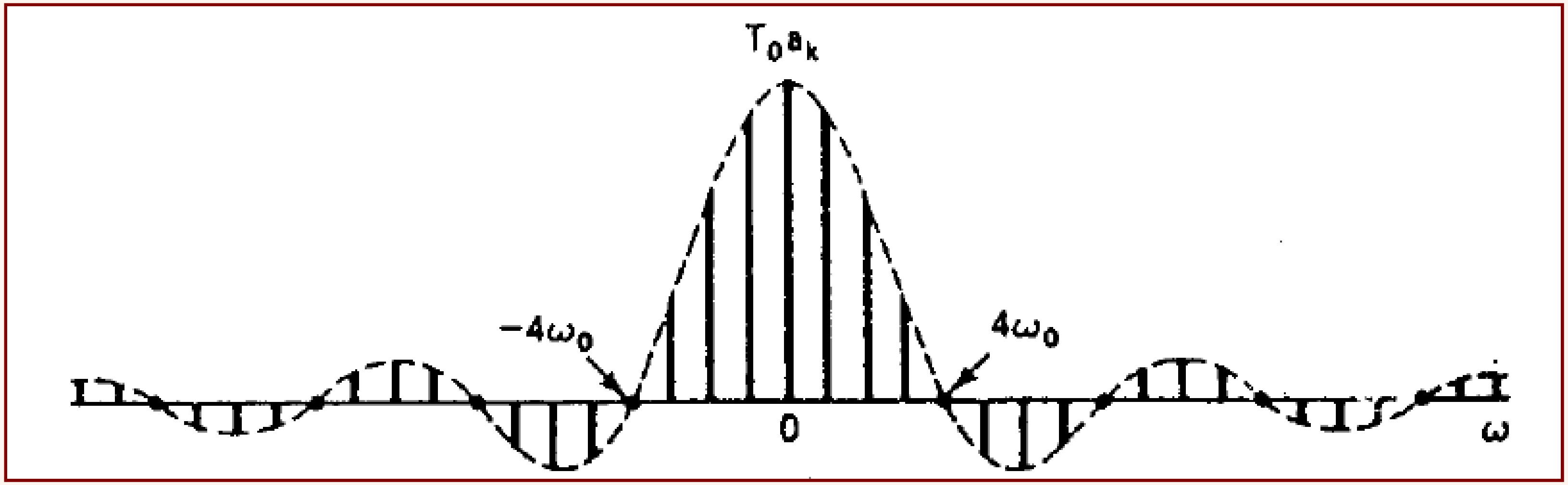
تبدیل فوریه (ادامه...)

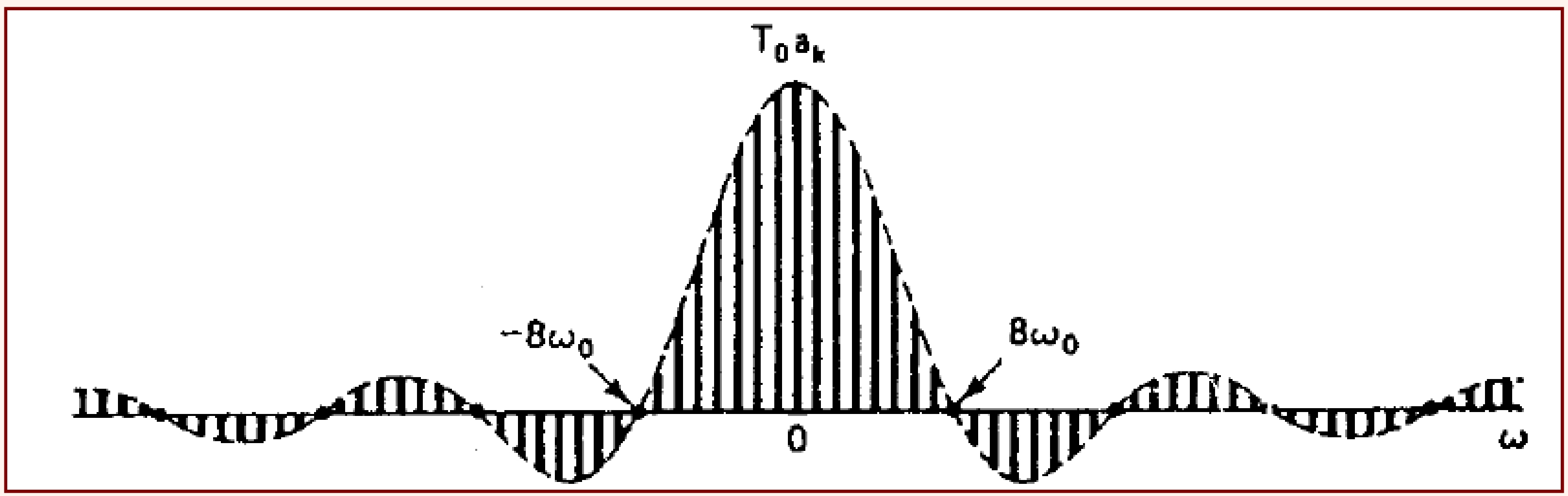
- نه تنها سیگنال‌های پریودیک را می‌توان به صورت جمع برهم نهی شده یک سری سیگنال سینوسی نوشت؛
  - هر سیگنالی (غیر پریودیک) را هم می‌توان این گونه دید.
  - سیگنال را متناوب کرده از آن سری می‌گیریم.
  - پریود را به بی نهایت میل می‌دهیم.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



تبدیل فوریه (ادامه...)





- برای تبدیل مستقیم و معکوس خواهیم داشت:

رابطه آنالیز

$$\boxed{\Im\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt}$$

رابطه سنتز

$$\boxed{\Im\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega}$$

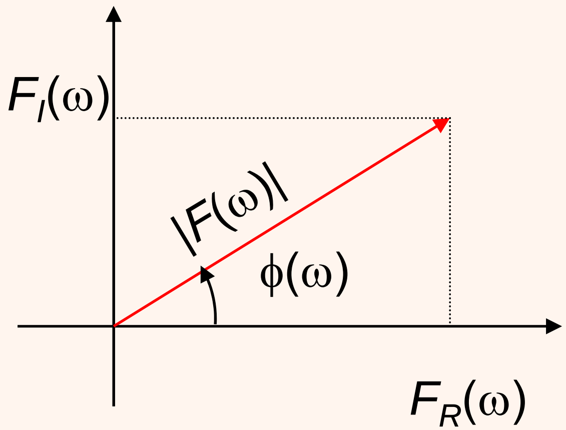
- $F(\omega)$ را تبدیل فوریه $f(t)$ می‌نامند، که در این حالت $f(t)$ در دامنه‌ی زمان و $F(\omega)$ در دامنه‌ی فرکانس خواهد بود.

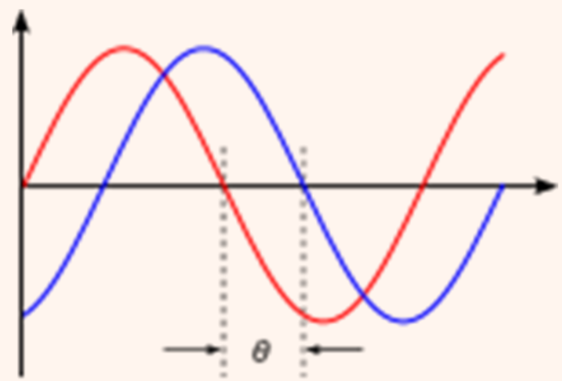
فاز و اندازه

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$F(\omega)=F_R(\omega)+jF_I(\omega)$$

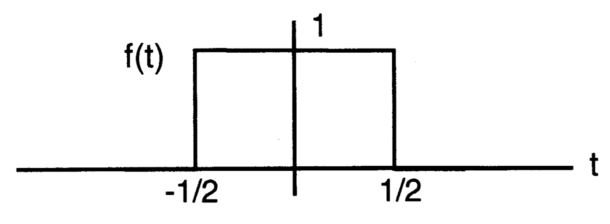
$$=\underbrace{|F(\omega)|}_{\text{Magnitude}}\, e^{\overbrace{j\phi(\omega)}^{\text{Phase}}}$$





$$\Im\{F(\omega)\}=f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

تبدیل فوریه پالس مربعی



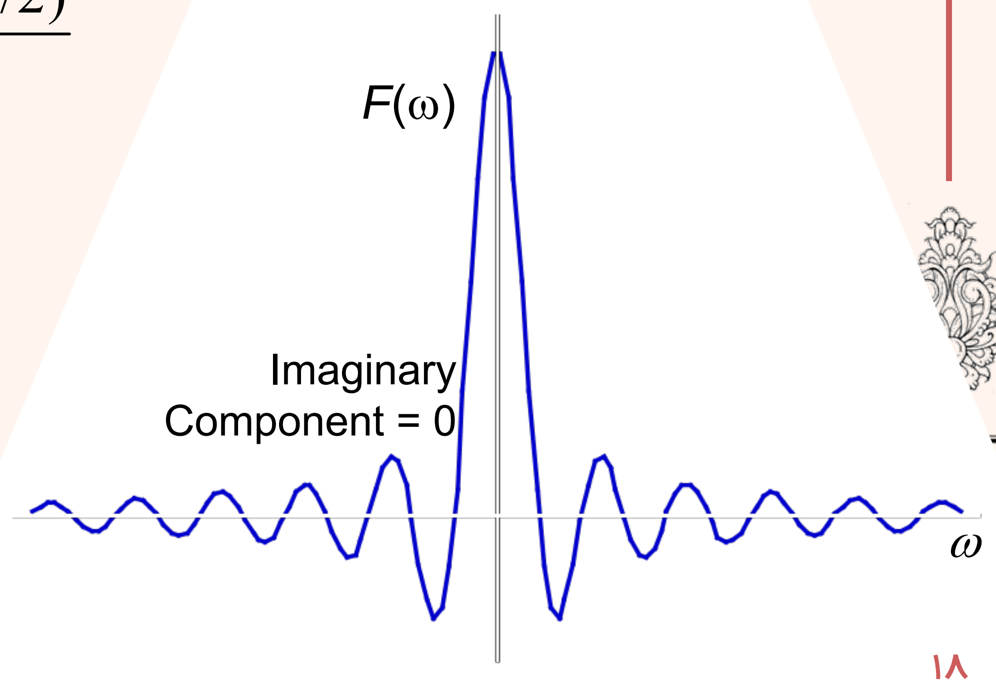
$$F(\omega)=\int_{-1/2}^{1/2}\exp(-i\,\omega t)\,dt=\frac{1}{-i\,\omega}\left[\exp(-i\,\omega t)\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$=\frac{1}{-i\,\omega}\left[\exp(-i\,\omega/2)-\exp(i\,\omega/2)\right]$$

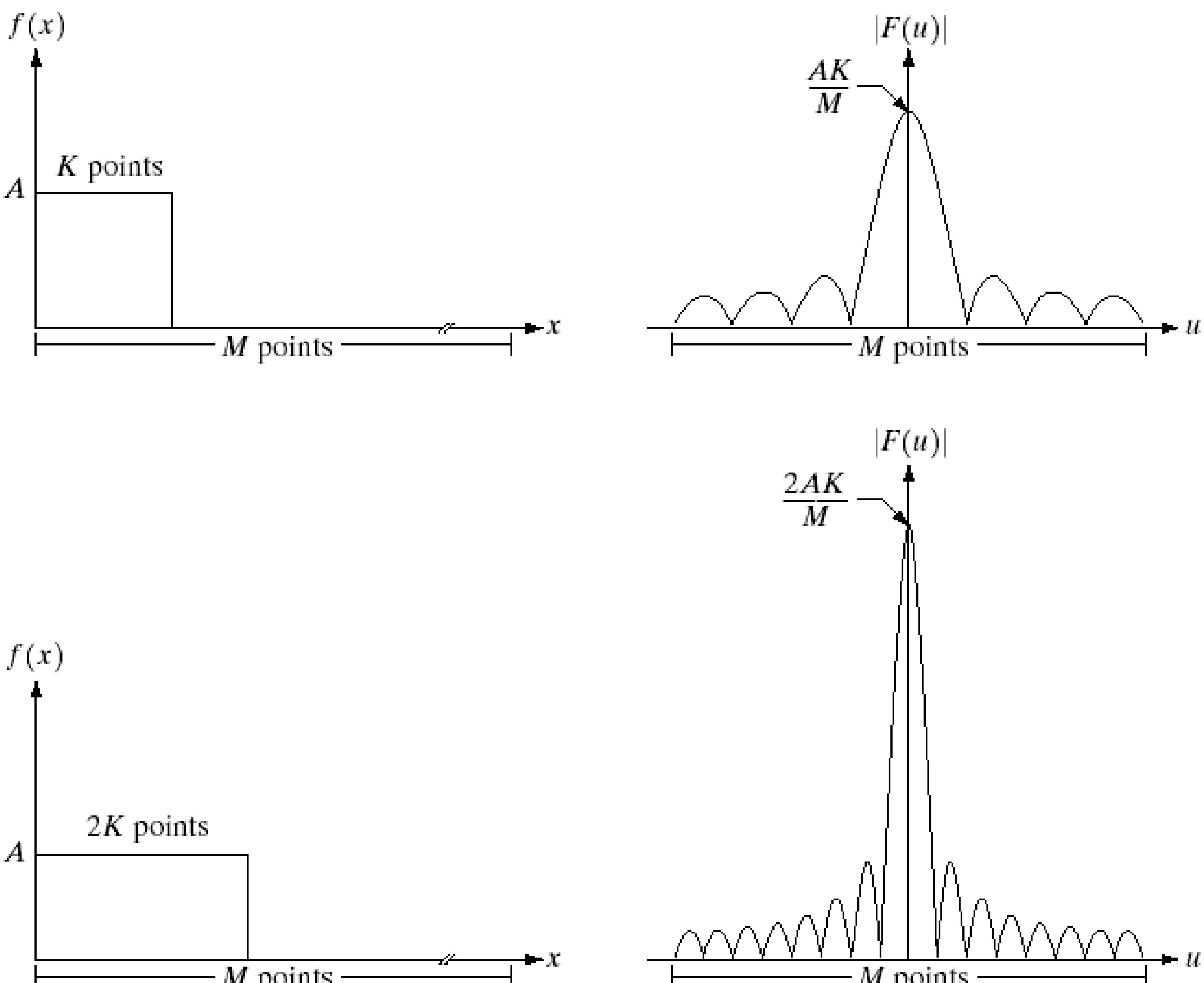
$$=\frac{1}{(\omega/2)}\,\frac{\exp(i\,\omega/2)-\exp(-i\,\omega/2)}{2i}$$

$$=\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}$$

$$\boxed{F(\omega)=\mathrm{sinc}(\omega/2)}$$



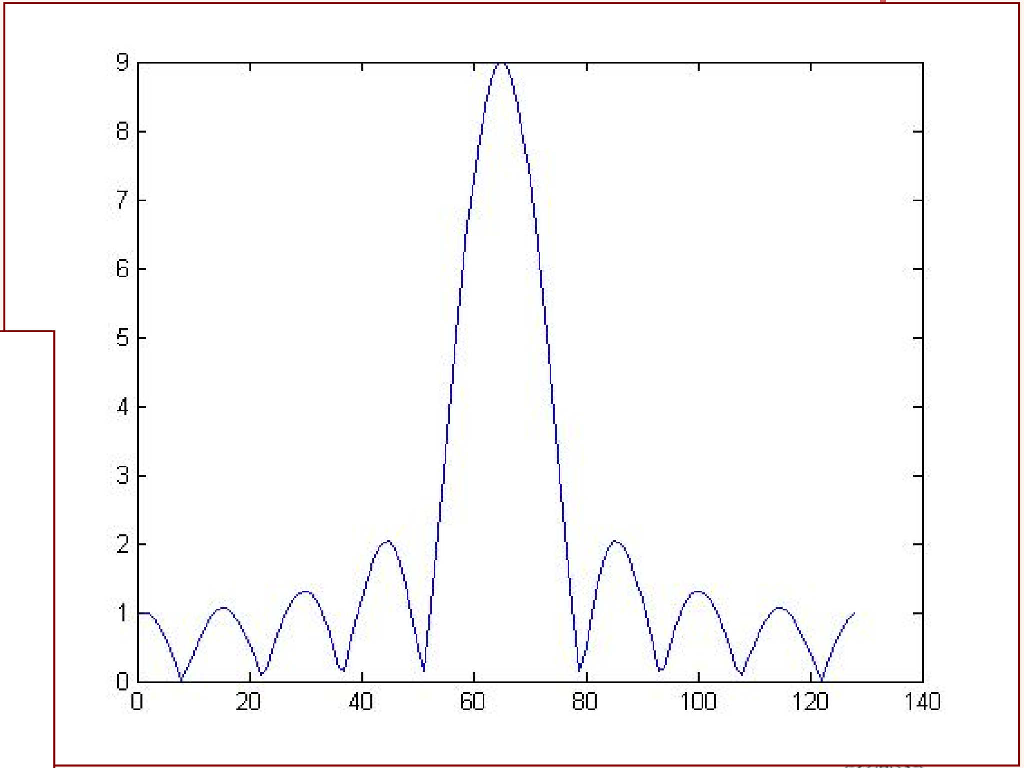
تبدیل فوریه پالس مربعی

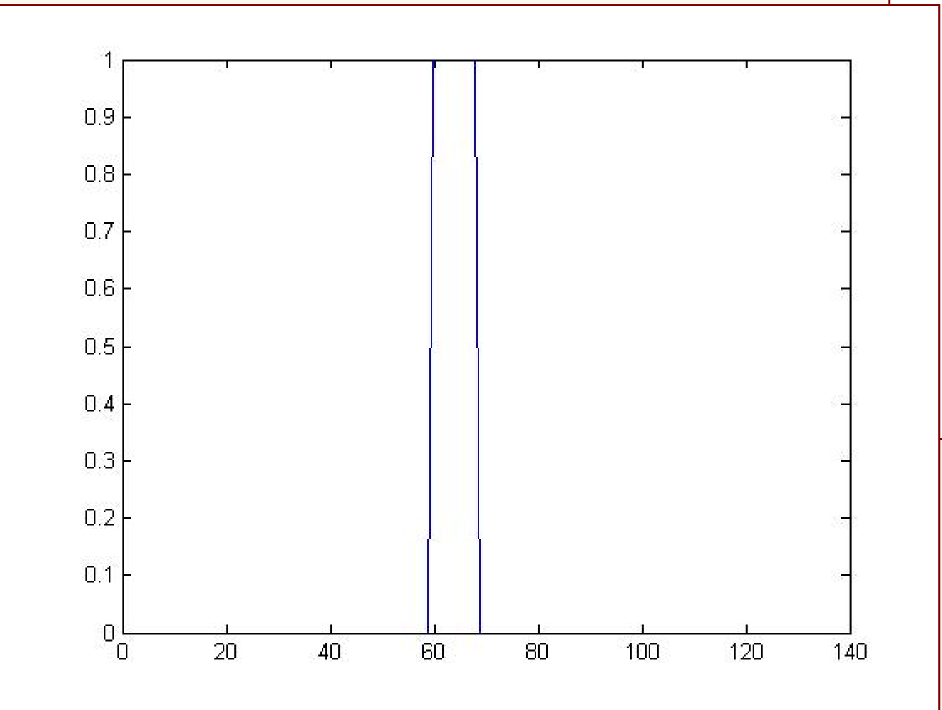


a b
c d

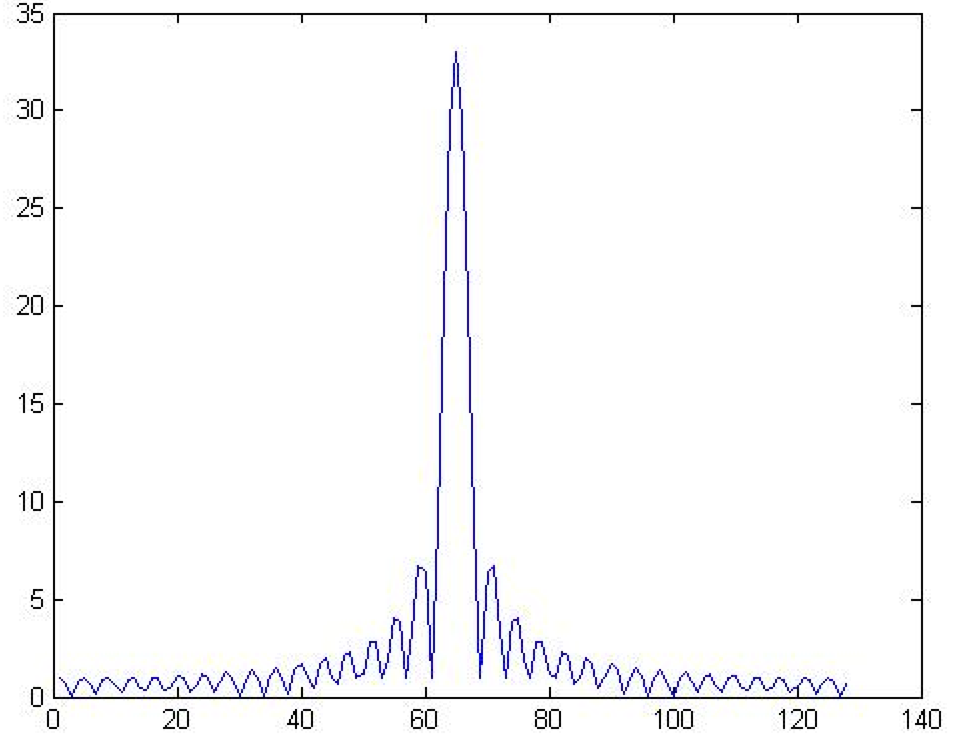
FIGURE 4.2 (a) A discrete function of M points, and (b) its Fourier spectrum. (c) A discrete function with twice the number of nonzero points, and (d) its Fourier spectrum.

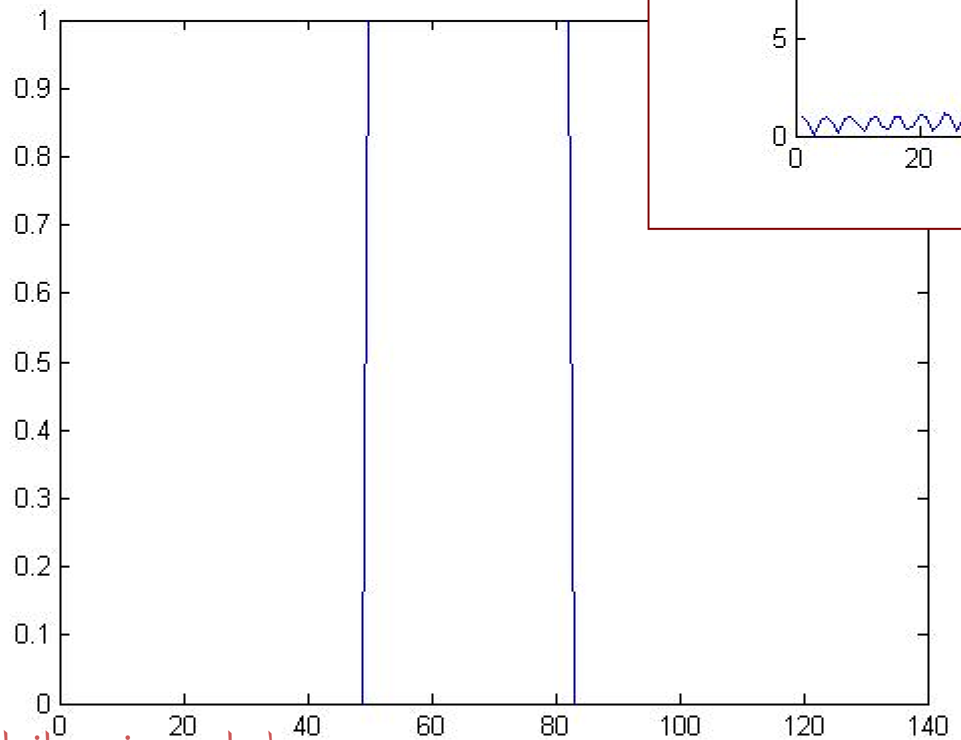
```
x=zeros(1,128);
x(60:68)=1;
k=fft(x,128);
q=fftshift(k)
plot(x);
figure;
plot (abs(q))
```





```
x=zeros(1,128);
x(50:82)=1;
k=fft(x,128);
q=fftshift(k)
plot(x);
figure;
plot (abs(q))
```





تبدیل فوریه دو بعدی و معکوس آن

تبدیل فوریه یک‌بعدی

$$\Im\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

تبدیل معکوس یک‌بعدی

$$\Im\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

تبدیل فوریه دوبعدی

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp(-j(ux+vy))dxdy$$

تبدیل معکوس دوبعدی

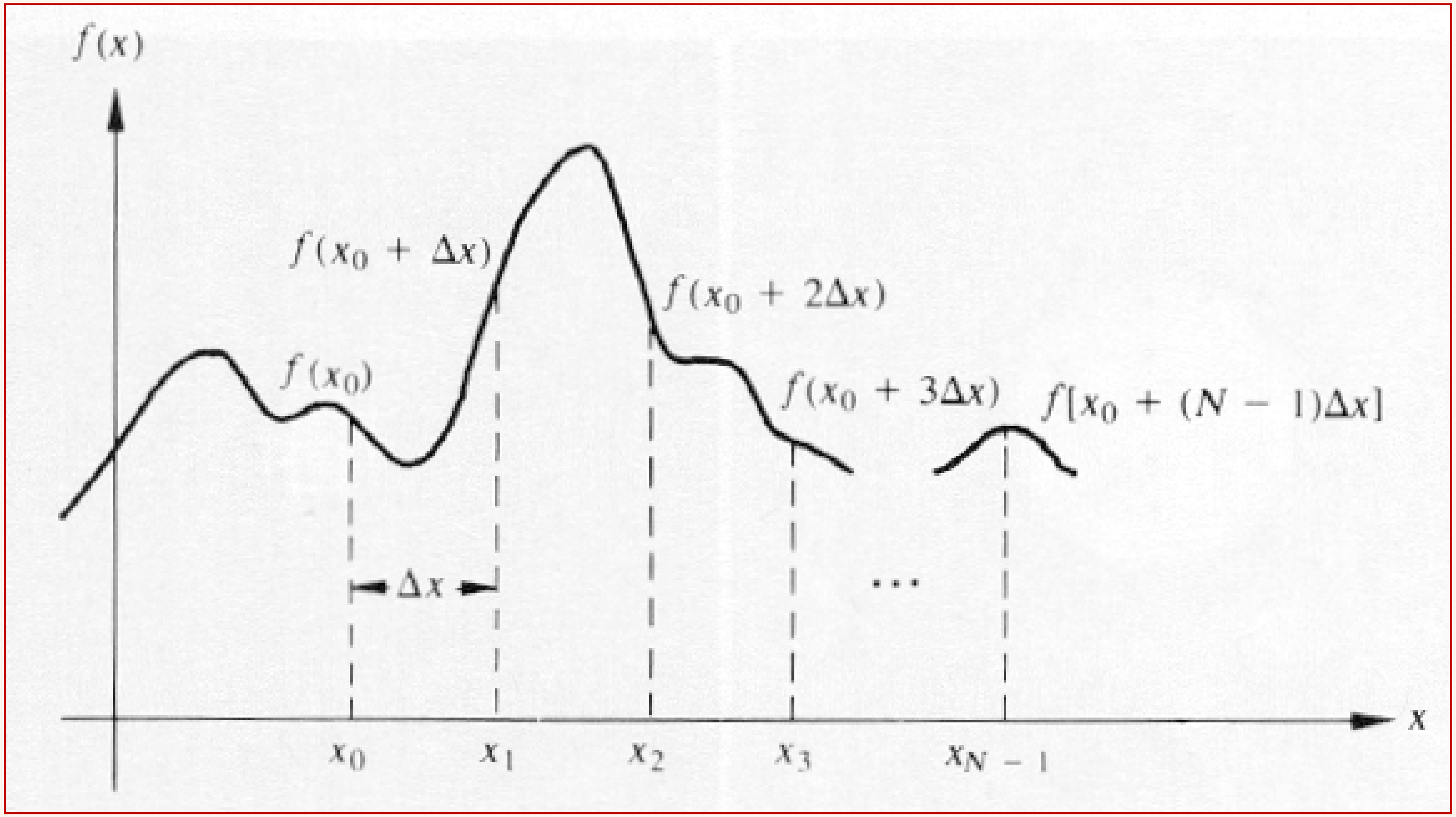
$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\exp(j(ux+vy))dudv$$

نکات

- اگر ورودی تبدیل فوریه (به طور مثال سیگنالی صوتی) در دامنه‌ی زمان-مکان باشد، نمونه‌های سیگنال مذکور به دامنه‌ی فرکانس (شامل دامنه و فاز) نگاشت می‌یابد.
- تبدیل معکوس نیز با دریافت دامنه و فاز، سیگنال اصلی (در دامنه‌ی مکان-زمان) را بازیابی می‌نماید.
- دو نگاشت معکوس یکدیگرند.
- با توجه به کاربرد روزافزون سیگنال‌های دیجیتال استفاده از تبدیل سیگنال پیوسته کارایی لازم را ندارد. نسخه‌ی گسسته‌ی تبدیل لازم است.
  - تبدیلی که روی سیگنال‌های گسسته اعمال شود.

سیگنال‌های گسسته

- تابع پیوسته‌ی $f(x)$ را می‌توان به صورت زیر گسسته در نظر گرفت:



سیگنال‌های گسسته (ادامه...)

- اگرمقادیر x را به صورت صحیح و در بازه‌ی (x=0,1,2,…, M-1) درنظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\{f(x_0), f(x_0+\Delta x), f(x_0+2\Delta x), \ldots, f(x_0+(M-1)\Delta x)\}$$

$$\Downarrow$$

$$\{f(0), f(1), f(2), \ldots, f(M-1)\}$$

- برای سیگنال‌های گسسته‌ی متناوب هم می‌توان سری فوریه را تعریف کرد، البته سری فوریه‌ی سیگنال‌های گسسته با سری فوریه‌ی سیگنال‌های پیوسته تفاوت‌های اساسی دارد:

$$f[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X(K)=\sum_{n=0}^{N_0-1}\alpha(K,n)x(n)$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} f[n]e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} f[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- به نظر شما تبدیل فوریه‌ی سیگنال گسسته چگونه به دست می‌آید؟

مفهوم فرکانس در فضای گسسته

$$f[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_k \times e^{j\omega}\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

$$a_0 \times e^{j0}$$

$$a_1 \times e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

$$a_2 \times e^{j\frac{2\pi\times 2}{N}}$$

$$\ldots\ldots$$

$$a_N \times e^{j\frac{2\pi\times N}{N}},\ e^{j\frac{2\pi\times N}{N}}=e^{j2\pi}=e^{j0}$$

در سیگنال‌های گسسته حداکثر فرکانس π می‌باشد.

تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های گسسته (DTFT)

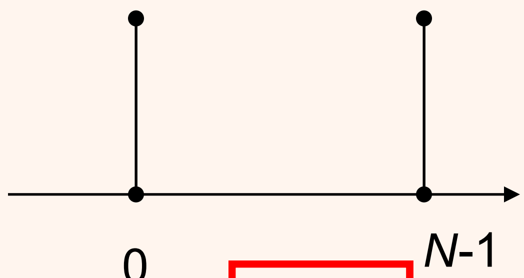
- به طریق مشابه برای سیگنال‌های گسسته، تبدیل فوریه تعریف می‌شود:

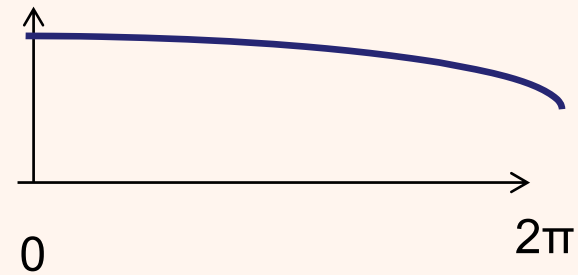
$$\boxed{F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{-j\omega n} \qquad T=2\pi}$$

DTFT (Desecrate Time Fourier Transform)

- چنان‌چه ملاحظه می‌شود، حاصل تبدیل پیوسته است!
  - جهت کاربردهای مختلف(استفاده از قابلیت‌های رایانه‌های دیجیتال) عموما تبدیل پیوسته مفید نبوده، نیاز به اعمال نسخه‌ی گسسته از تبدیل است.
- بدین منظور از سیگنال گسسته تبدیل فوریه گرفته در فرکانس‌های ($2k\pi/N$) نمونه برداری می‌کنیم.

تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های گسسته (DTFT)





$f(n)$ $\qquad$ $F(\omega)$

$$F(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\omega n} \qquad \mathrm{T}=2\pi$$

$$F(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2k\pi}{N}} \Rightarrow F(K)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\frac{2k\pi}{N}n} \qquad K=0,\ldots,N-1$$

DFT (Discrete Fourier Transform)

- برای تبدیل فوریه‌ی گسسته که از نمونه‌برداری تبدیل فوریه‌ی سیگنال به دست می‌آید، خواهیم داشت:

$$\boxed{F(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\exp(-j2\pi kn/N)}\qquad k=0,1,2,\ldots,N\text{-}1$$

$$\boxed{f(n)=\sum_{k=0}^{N-1} F(k)\exp(j2\pi kn/N)}\qquad n=0,1,2,\ldots,N\text{-}1$$

در **DFT**، $\omega = 2\pi k / N$ در نظر گرفته می‌شود، یعنی به ازای **N-1**<-۰ می‌باید **N** نمونه‌ی متمایز وجود داشته باشد.

فرآیند محاسبه‌ی DFT

به گونه‌ای دیگر می‌توان به **DFT** نگاه کرد:
سیگنال در دامنه‌ی مکان را به صورت متناوب درآمده و سپس از آن تبدیل فوریه گرفته می‌شود.

$f(n)$ → $\tilde{f}(n)$ → $\tilde{F}(K)$ → $F(K)$

$f(n)$: تابع ورودی غیر پریودیک

$\tilde{f}(n)$: تابع ورودی پریودیک

$\tilde{F}(K)$: تبدیل یافته‌ی پریودیک

$F(K)$: انتخاب N نمونه

تبدیل فوریه گسسته(ادامه...)

- برای محاسبات کامپیوتری از تبدیل گسسته‌ی فوریه (DFT) استفاده می‌شود.
- به همین جهت برای پردازش تصویر دیجیتال هم خواهیم داشت:
  – همانند تبدیل گسسته‌ی یک بعدی می‌باید ماتریس تصویر ابتدا متناوب گردد.