فضای تبدیل

محیط‌های چندرسانه‌ای

۱۳-۱۱-۰۸۰-۰۱

(بخش چهارم)

دانشگاه شهید بهشتی

زمستان ۱۳۹۳

احمد محمودی ازناوه

http://faculties.sbu.ac.ir/~a_mahmoudi/

فهرست مطالب

- پردازش تصویر در فضای تبدیل(فرکانسی)
  - بردارهای متعامد یکه
  - تبدیل‌های یکانی
- تبدیل‌های دوبعدی
- تصاویر پایه

چرا تبدیل؟

- سیگنال اصلی در حوزه‌ی زمانی-مکانی دارای همبستگی بین نمونه‌ها (پیکسل‌ها) می‌باشد.
- برای محاسبه و پردازش نیاز به روابطی چون کانولوشن است که پیچیدگی بالایی دارد.
- هدف از تبدیل
  - از میان بردن همبستگی میان نمونه‌ها
  - تبدیل روابطی چون کانولوشن به ضرب در حوزه‌ی تبدیل
  - استفاده از داده‌ی تبدیل یافته در سنجش برخی کمیت‌ها

- یک فضای برداری شامل مجموعه‌ای بردار «مستقل خطی» است.
- بردارهای فضای مذکور توسط «ترکیب خطی» از آن مجموعه قابل ساخت است.
- مثال:

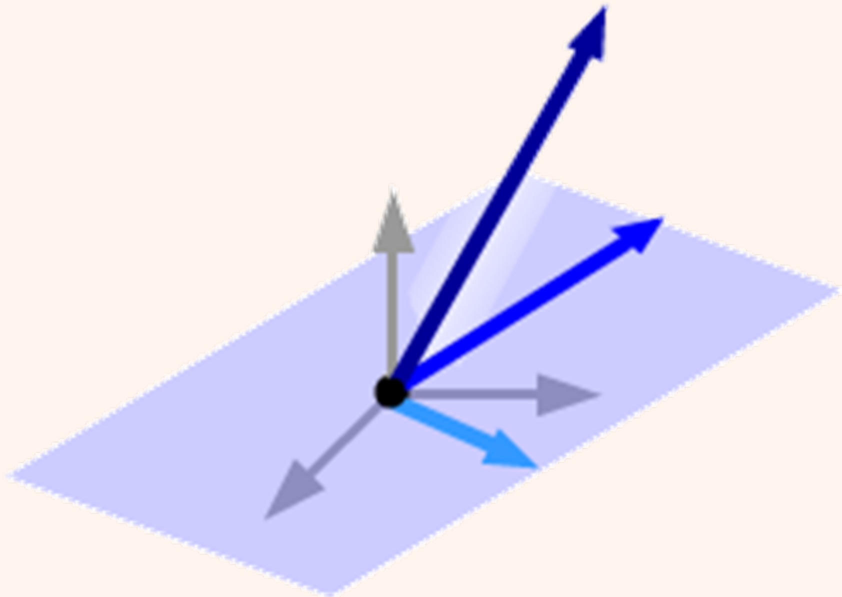
$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

بردارهای یکه

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

- اگر v_iها بردارهای یک فضا در نظر گرفته شوند، در صورتی که «مستقل خطی» باشند، خواهیم داشت:

$$\sum_i a_i v_i = 0, \quad iff \quad a_i = 0 \quad , \forall i$$



- اگر v_iها «بردارهای پایه» باشند، هر برداری مانند υ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\forall \upsilon \neq 0, \quad \sum_i b_i v_i = \upsilon \quad , \exists b_i \neq 0$$

- اگر بردارهای پایه متعامد باشد، فضای برداری را متعامد گویند: **orthogonal**

$$\langle v_i , v_j \rangle = \begin{cases} 0 & for\ i \neq j \\ \|v_j\|^2 & for\ i = j \end{cases}$$

اگر اندازه‌ی بردارها به مقدار یک نرمالیزه گردد، یک فضای متعامد نرمال ایجاد می‌شود. **orthonormal**

برای سادگی بیشتر، نخست به بررسی تبدیل‌ها در فضای یک‌بعدی خواهیم پرداخت:

$$x(n) \rightarrow X(K)$$

$$0 \le n \le N_0 - 1 \qquad 0 \le K \le N_0 - 1$$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N_0-1} \alpha(K,n)\, x(n)$$

$$0 \le K \le N_0 - 1$$

تبدیل در فضای یک‌بعدی (ادامه...)

$$X(K)=\sum_{n=0}^{N_0-1}\alpha(K,n)x(n) \qquad 0\le K\le N_0-1$$

$$\begin{bmatrix} X(0)\\ X(1)\\ .\\ .\\ X(N_0-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & . & \alpha_{0,N_0-1}\\ \alpha_{1,0} & . & . & . & .\\ \alpha_{2,0} & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ \alpha_{N_0-1,0} & \alpha_{N_0-1,1} & . & . & \alpha_{N_0-1,N_0-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0)\\ x(1)\\ .\\ .\\ x(N_0-1)\end{bmatrix}$$

$$X_{N\times 1}=A_{N\times N}\,x_{N\times 1}$$

تبدیل معکوس

- اگر داشته باشیم:

$$X = Ax$$

- می‌توان ماتریس B را به گونه‌ای در نظر گرفت که بتوان بردار x را از X تخمین زد:

$$\tilde{x} = B.X$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{K=0}^{N_0-1} b(n,K)X(K) \quad 0 \le n \le N_0 - 1$$

- چنان‌چه ماتریس A وارون‌پذیر باشد، $B=A^{-1}$، می‌توان با تبدیل وارون به مقدار اصلی x دست یافت.

ویژگی‌های ماتریس تبدیل

- اگر A ماتریسی مختلط باشد، مزدوج- ترانهاده‌ی A را به صورت زیر نشان می‌دهند:
- مثال:

$$\boxed{A^{*T}}$$

- اگر A را به صورت زیر داشته باشیم مزدوج- ترانهاده‌ی آن‌را محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 3+7i & 0 \\ 2i & 4-i \end{bmatrix}. \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} \overline{3+7i} & \overline{0} \\ \overline{2i} & \overline{4-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-7i & 0 \\ -2i & 4+i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-7i & -2i \\ 0 & 4+i \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های ماتریس تبدیل (ادامه...)

$$X(K)=\sum_{n=0}^{N_0-1}\alpha(K,n)x(n)$$

- در ماتریس‌های متعامد، ترانهاده و معکوس یک ماتریس چه ارتباطی با هم دارند؟

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N_0-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdot & \alpha_{0,N_0-1} \\ \alpha_{1,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{N_0-1,0} & \alpha_{N_0-1,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N_0-1,N_0-1} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N_0-1) \end{bmatrix}$$

$$AA^T=?$$

ویژگی‌های ماتریس تبدیل (ادامه...)

• در ماتریس‌های متعامد، ترانهاده و معکوس یک ماتریس چه ارتباطی با هم دارند؟

$$A^T = A^{-1}$$

• ماتریس یکانی

• هنگامی که A^{*T} و معکوس یک ماتریس با هم برابر باشد یک «ماتریس یکانی» خواهیم داشت.

Unitary

$$A^{*T} = A^{-1}$$

نکته:

$$A^{*T} \triangleq A^H$$

Unitary and Hermitian

مثال

- نشان دهید ماتریس A یکانی است.

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$A\,A^{*T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = I_2$$

- پس $\boxed{A^{*T} = A^{-1}}$ و ماتریس یکانی است.

معکوس تبدیل یکانی

- اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد، با در نظر گرفتن $B=A^{-1}$ به گونه‌ی یکتا به ماتریس B و تبدیل معکوس دست یافت.
- اگر ماتریس A ماتریسی یکانی باشد، در این حالت تبدیل به‌دست آمده یکانی است.
- روابط تبدیل و معکوس آن به صورت زیر است:

$$X(K)=\sum_{n=0}^{N_0-1}\alpha(K,n)x(n)$$

$$x(n)=\sum_{K=0}^{N_0-1}b(n,K)X(K)$$

$$A^{*T}=A^{-1}$$

$$x(n)=\sum_{K=0}^{N_0-1}a^{*}(K,n)X(K)$$

تبدیل

$$X(K)=\sum_{n=0}^{N_0-1}\alpha(K,n)x(n)$$

$$\begin{bmatrix} X(0)\\ X(1)\\ .\\ .\\ X(N_0-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & . & \alpha_{0,N_0-1}\\ \alpha_{1,0} & . & . & . & .\\ \alpha_{2,0} & . & . & . & .\\ & & & & \\ \alpha_{N_0-1,0} & \alpha_{N_0-1,1} & . & . & \alpha_{N_0-1,N_0-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0)\\ x(1)\\ .\\ .\\ x(N_0-1)\end{bmatrix}$$

$$x(n)=\sum_{K=0}^{N_0-1}b(n,K)X(K)$$

$$x(n)=\sum_{K=0}^{N_0-1}a^{*}(K,n)X(K)$$

$$\begin{bmatrix} x(0)\\ x(1)\\ .\\ .\\ x(N_0-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \alpha_{2,0} & . & \alpha_{N_0-1,0}\\ \alpha_{0,1} & . & . & . & .\\ \alpha_{0,2} & . & . & . & .\\ . & . & . & . & .\\ \alpha_{0,N_0-1} & \alpha_{1,N_0-1} & . & . & \alpha_{N_0-1,N_0-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(0)\\ X(1)\\ .\\ .\\ X(N_0-1)\end{bmatrix}$$

خصوصیات تبدیل یکانی

- تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A دارای اندازه‌ی یک هستند.
- انرژی بردار اصلی و تبدیل یافته یکسان است.

$$\left\|X\right\|^2 = (A.x)^H.A.x = x^H.A^H.A.x = \left\|x\right\|^2$$

- مقادیر اصلی همبستگی بالا و مقادیر تبدیل یافته ناهم‌بسته‌اند.

تبدیل دو بعدی

$$f(n_1,n_2) \quad ----> \quad F(K_1,K_2)$$

$$0 \le n_1,n_2 \le N-1 \qquad 0 \le K_1,K_2 \le N-1$$

$$F(K_1,K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1,n_2) t_{f_{K_1,K_2}}(n_1,n_2)$$

$$0 \le K_1,K_2 \le N-1$$

تبدیل معکوس

$$f(n_1,n_2)=\sum_{K_1=0}^{N-1}\sum_{K_2=0}^{N-1}F(K_1,K_2)t_{b_{n_1,n_2}}(K_1,K_2)$$

$$0\le n_1,n_2\le N-1$$

T_f و T_b نشان‌دهنده‌ی تبدیل رو به جلو و رو به عقب هستند، که به تمامی ضرایب K_1, K_2, n_1, n_2 وابسته‌اند.

- اگر بتوان تبدیلی را به صورت زیر نوشت، آن را «جدایی‌پذیر» می‌گویند:

$$t_{f_{K_1,K_2}}(n_1,n_2)=t_{1\,f_{K_1}}(n_1).t_{2\,f_{K_2}}(n_2)$$

- اگر دو بخش با هم برابر باشند، تبدیل را «متقارن» گویند.
- اگر تبدیلی جدایی‌پذیر و متقارن باشد، نحوه‌ی نمایش ماتریسی را به‌گونه‌ی زیر خواهیم داشت:

$$F=T_f.f.T_f^T$$

- برای معکوس تبدیل(حقیقی) نیز خواهیم داشت:

$$f=T_bFT_b^T$$

تبدیل جدایی‌پذیر متقارن

$$F(K_1,K_2)=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1,n_2)\,t_{f_{K_1,K_2}}(n_1,n_2)$$

$$t_{f_{K_1,K_2}}(n_1,n_2)=t_{1\,f_{K_1}}(n_1).t_{2\,f_{K_2}}(n_2)$$

$$F(K_1,K_2)=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1,n_2)\,t_{1\,f_{K_1}}(n_1).t_{2\,f_{K_2}}(n_2)$$

$$F(K_1,K_2)=\boxed{\sum_{n_1=0}^{N-1} t_{1\,f_{K_1}}(n_1)\underbrace{\sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1,n_2).t_{2\,f_{K_2}}(n_2)}_{\text{اعمال تبدیل روی سطرها}}}$$

اعمال تبدیل روی ستون‌ها

تبدیل جدایی‌پذیر

- اگر داشته باشیم:

$$F = T_f f T_f^T \qquad T_f^{-1} = T_f^{*T}$$

- تبدیل دو بعدی یکانی خواهیم داشت، در این حالت با صرفنظر کردن از اندیس‌های f و b داریم:

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$

$$0 \le K_1, K_2 \le N-1$$

$$f(n_1, n_2) = \sum_{K_1=0}^{N-1} \sum_{K_2=0}^{N-1} F(K_1, K_2) t^*_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$

$$0 \le n_1, n_2 \le N-1$$

تبدیل معکوس

$$F = TfT^{T} \quad T^{-1} = T^{*T}$$

$$T^{*T}.F.T^{T^{*T}} = T^{*T}.T.f.T^{T}.T^{T^{*T}}$$

$$T^{*T}.F.T^{*} = f$$

$$F = T.f.T^{T} \Rightarrow f = T^{*T}.F.T^{*}$$

انرژی در حوزه‌ی تبدیل

- مقدار انرژی در ماتریس اصلی و ماتریس انتقال یافته یکسان است.

$$\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\left\| f(n_1,n_2)\right\|^2=\sum_{K_1=0}^{N-1}\sum_{K_2=0}^{N-1}\left\|F(K_1,K_2)\right\|^2$$

- توزیع انرژی در ماتریس نتیجه‌شده بسته به نوع انتقال می‌تواند متفاوت باشد.
- به بیانی دیگر تمرکز انرژی بسته به تبدیل در محدوده‌ی خاصی قرار می‌گیرد.

تصاویر پایه

Basis Images

2	-1
5	6

$$2\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + -1\times\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + 5\times\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} + 6\times\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

بردار یکه محور اول

بردار یکه محور دوم

بردار یکه محور سوم

بردار یکه محور چهارم

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$

$$0 \le K_1, K_2 \le N-1$$

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{K_1,K_2}(n_1, n_2)$$

$$0 \le K_1, K_2 \le N - 1$$

- اگر مقادیر K_1 و K_2 را ثابت در نظر بگیریم برای تمامی مقادیر n_1 و n_2 جمع صورت می‌پذیرد.

$$A_{n_1,n_2} = t_{K_1,K_2}(n_1, n_2)$$
$$= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} (f(n_1, n_2) . A_{n_1,n_2})$$

- نتیجه‌ی به دست آمده همان ضرب داخلی دو ماتریس است که حاصلی اسکالر دارد.

$$F(K_1,K_2)=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\left(f(n_1,n_2)\times A_{K_1,K_2}(n_1,n_2)\right)=\left\langle f,A_{K_1,K_2}\right\rangle$$

$$0\le K_1,K_2\le N-1$$

$$\boxed{F=T.f.T^T}$$

- ماتریس A به دست آمده نتیجه‌ی ضرب خارجی K_1 امین ستون ماتریس T^T در ترانهاده‌ی K_2 امین ستون T^T است:

$$A_{K_1,K_2}=\tau_{K_1(N\times 1)}\times\tau^T_{K_2(1\times N)}$$

مثال

$$F(0,0) = \langle f \;, A_{0,0} \rangle$$

$$F(5,6) = \langle f \;, A_{5,6} \rangle$$

هر عنصر از F را می‌توان با محاسبه‌ی ضرب داخلی ماتریس f در ماتریس متناظر A محاسبه نمود.

A_{K_1,K_2} تصاویر پایه نامیده می‌شوند.

مثال

- اگر f را تصویر اصلی و T را ماتریس انتقال در نظر بگیریم:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad T^{-1}=T^{H} \qquad f=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$F=T\,.f\,T^{T}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}10 & -2\\ -4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

تصاویر پایه

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad T^{-1}=T^{H}\Rightarrow T^{*T}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$f=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$A_{0,0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad A_{0,1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A_{1,0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \qquad A_{1,1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix}\langle f, A_{0,0}\rangle & \langle f, A_{0,1}\rangle\\ \langle f, A_{1,0}\rangle & \langle f, A_{1,1}\rangle\end{bmatrix}$$

مثال

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad T^{-1}=T^{H} \qquad f=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

- اگر f را تصویر اصلی و T را ماتریس انتقال در نظر بگیریم:

$$A_{0,0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad A_{0,1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \quad A_{1,0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \quad A_{1,1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$F_{0.0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=(1+2+3+4)/2=5$$

$$F_{0.1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=(1+3-2-4)/2=-1$$

$$F_{1.0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=(1+2+-3-4)/2=-2$$

$$F_{1.1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=(1+4-2-3)/2=0$$

$$F=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$