Machine Learning

Nonparametric Methods

Instance Based Learning

یادگیری ماشین

(۱۳-۱۱-۸۰۵-۰۱)

فصل هشتم

دانشگاه شهید بهشتی

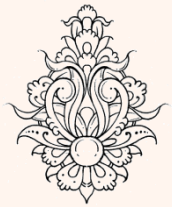
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

پاییز ۱۳۹۴

احمد محمودی ازناوه

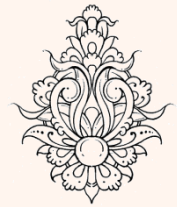
فهرست مطالب

- روش‌های ناپارامتری
  - تخمین چگالی
  - دسته‌بندی
  - رگرسیون



پیش‌گفتار

- «روش‌های پارامتری»: یک مدل برای تمام داده‌های ورودی در نظر گرفته می‌شود.
  - در رگرسیون خطی فرض می‌شود برای تمام ورودی‌ها، خروجی از یک تابع خطی یکسان تبعیت می‌کند.
  - هر چند تقلیل مسأله به یافتن چند پارامتر محدود، مطلوب است، اما ممکن است این فرض صحیح نباشد و باعث ایجاد خطا شود.
- «روش‌های نیمه‌پارامتری»: داده‌های هر دسته ترکیبی از مدل‌های مختلف تلقی می‌شوند.
- «روش‌های ناپارامتری»: ورودی‌های مشابه، خروجی‌های مشابه دارند.
  - «نمونه‌های مشابه» به معنای «چیزهای مشابه» هستند.
  - توابع، هموار هستند، تغییرات آن نرم است.



یادگیری بر مبنای نمونه

- الگوریتم‌های ناپارامتری، شامل یافتن نمونه‌های نزدیک (بر اساس یک تابع فاصله‌ی مناسب) و سپس درون‌یابی برای یافتن خروجی درست است.
  - تفاوت‌های روش‌های ناپارامتری به انتخاب تابع فاصله و روش درون‌یابی بستگی دارد.
- در مدل‌های پارامتری کل داده‌های آموزشی بر مدل نهایی اثرگذار هستند، در حالی که در روش‌های ناپارامتری یک مدل محلی بر اساس نمونه‌های همسایه تخمین زده می‌شود.
- نیاز به حافظه و محاسبات بالا از عیب‌های این دسته از روش‌هاست.

lazy/memory-based/case-based/instance-based learning

تخمین چگالی در حالت یک بعدی

- داده‌های آموزشی $X=\{x^t\}_{t=1}^N$ به صورت مستقل از یک توزیع تصادفی یکسان $p(x)$ استخراج شده‌اند.
- تخمین ناپارامتری «تابع توزیع تجمعی» به صورت زیر محاسبه می‌شود:

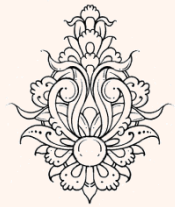
$$\hat{F}(x)=\frac{\#\{x^t \le x\}}{N}$$

- و به همین‌ترتیب برای تابع چگالی احتمال

$$\hat{p}(x)=\frac{1}{h}\left[\frac{\#\{x^t \le x+h\}-\#\{x^t \le x\}}{N}\right]$$

- h طول بازه‌ای است که داده‌های آن به اندازه‌ی کافی به هم نزدیک(شبیه) هستند.

$$x \le x^t \le x+h$$

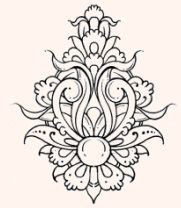


تخمین هیستوگرام(بافت‌نگار)

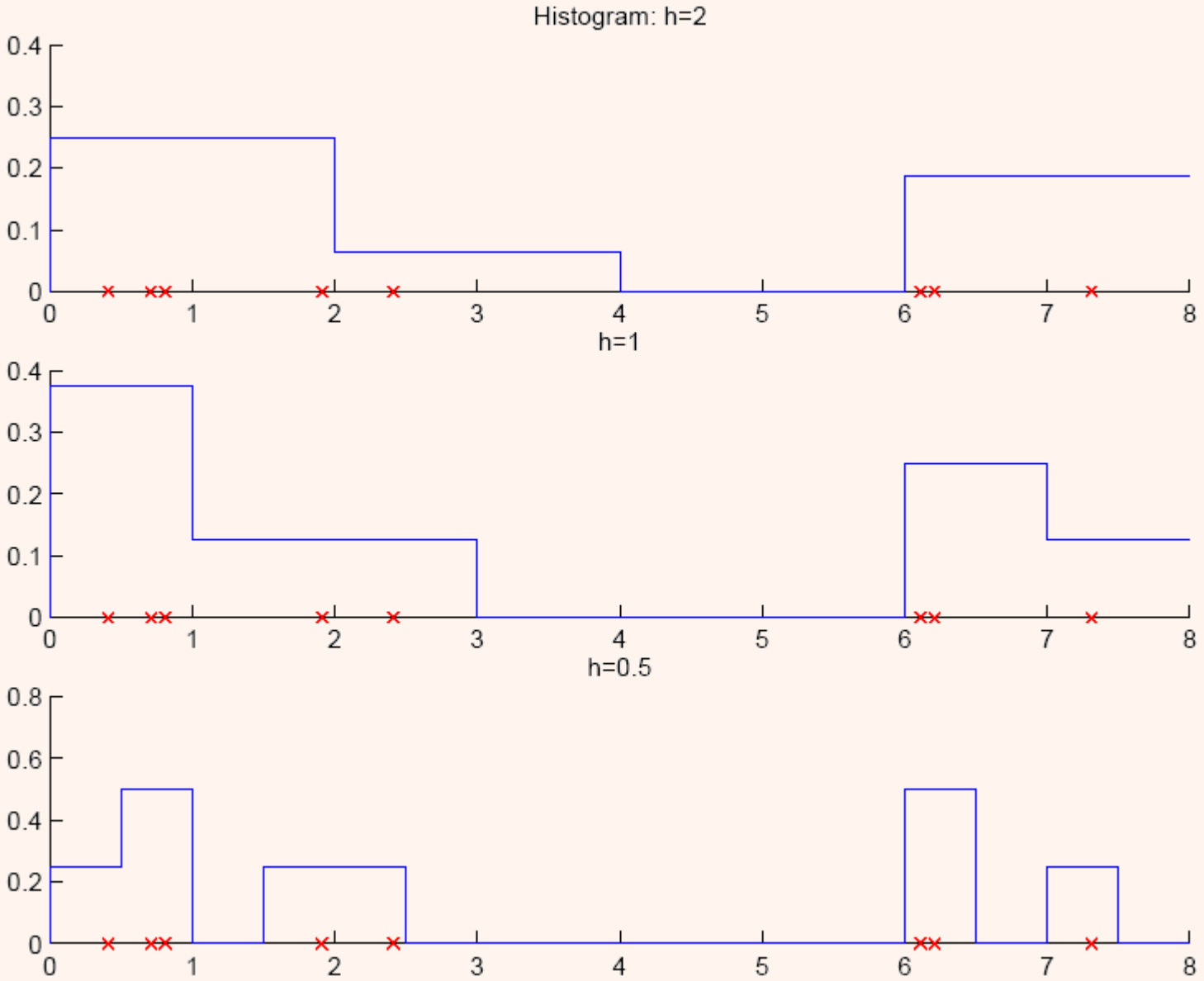
- تخمین هیستوگرام یکی از قدیمی‌ترین و متداول‌ترین روش‌هاست، داده‌ها به یک سری نوار(bin) با عرض h تقسیم می‌شوند:

$$\hat{p}(x)=\frac{\#\left\{x^t \text{ in the same bin as } x\right\}}{Nh}$$

- تغییر عرض نوارها و مبدأ آن‌ها بر روی تخمین به دست‌آمده اثرگذار است.
- در مرز نوارها گسستگی دیده می‌شود.
- نیازی به ذخیره کردن نمونه‌ها نیست.



مثال



Naive estimator

- در این روش نیازی به مشخص کردن مبدأ نوارها وجود ندارد:

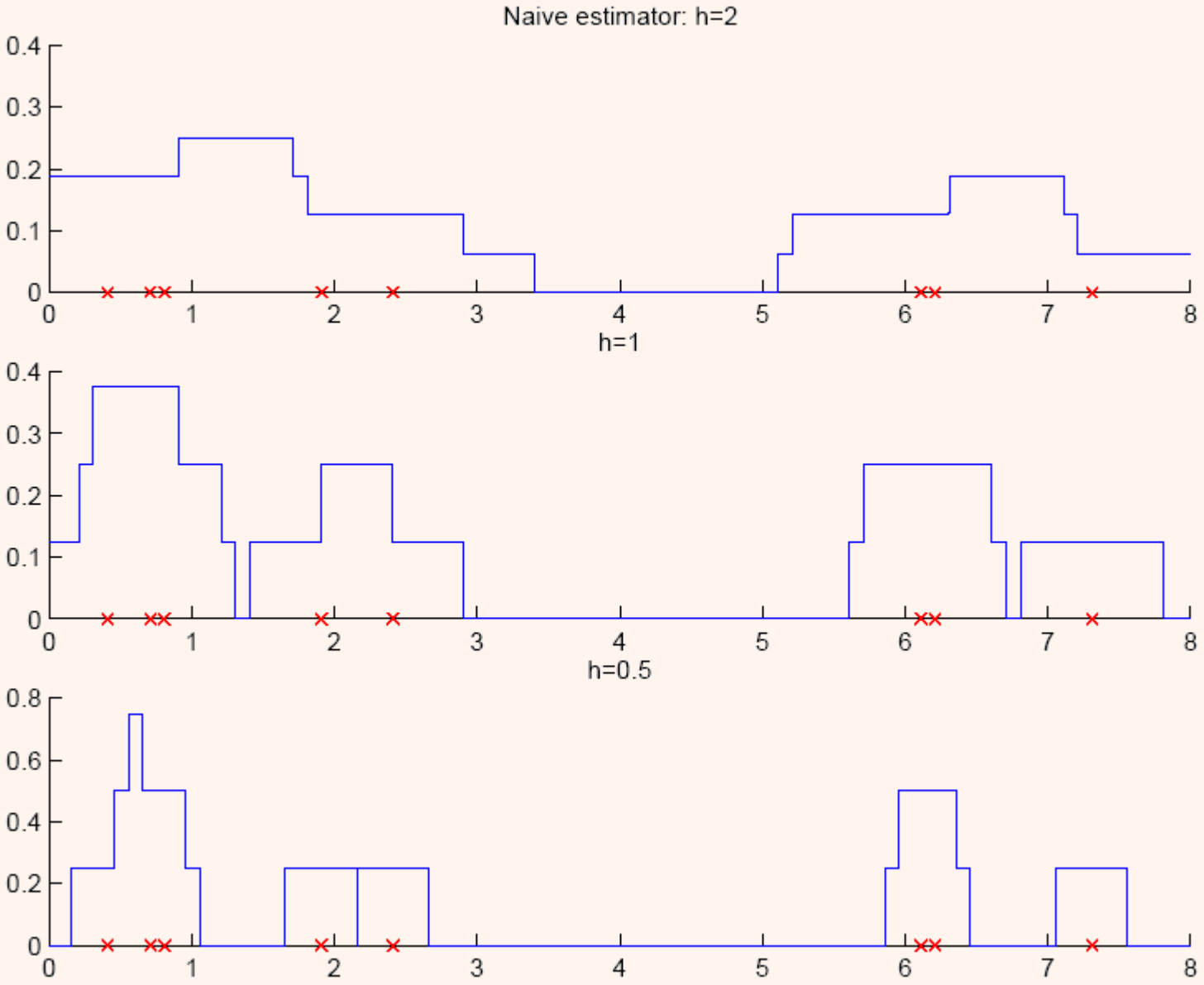
$$\hat{p}(x)=\frac{\#\left\{x-h<x^t\le x+h\right\}}{2Nh}$$

- یا با تعریف یک تابع وزن‌دهی:

$$\hat{p}(x)=\frac{1}{Nh}\sum_{t=1}^{N}w\left(\frac{x-x^t}{h}\right) \quad w(u)=\begin{cases}1/2 & \text{if } |u|<1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

- با توجه به ناحیه‌ی تحت تأثیر(hard)، تخمین به دست آمده، در نواحی مرزی دارای پرش می‌باشد.

مثال



Kernel Estimator

Parzen windows

استفاده از کرنل

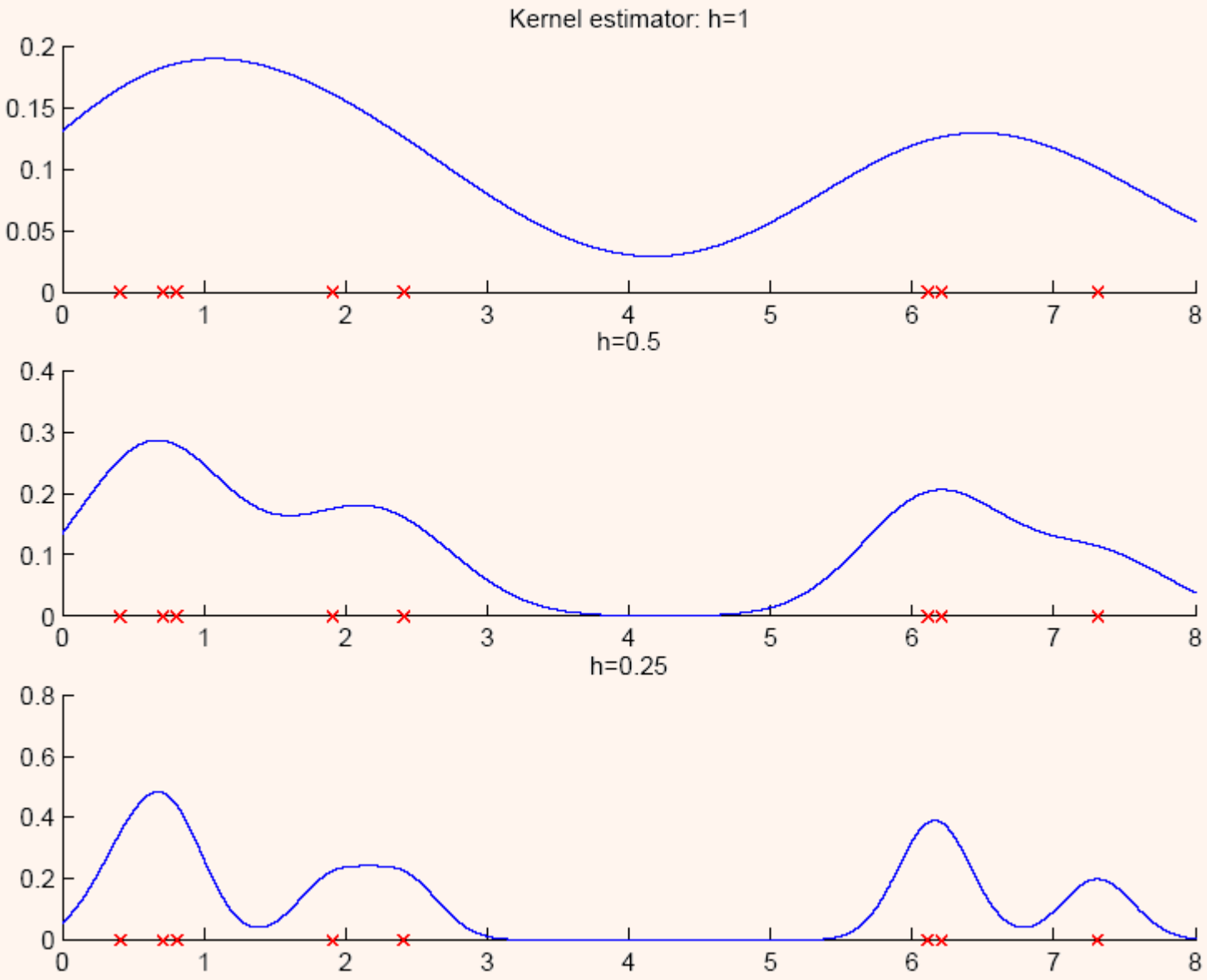
- برای به دست آوردن تخمینی هموارتر می‌توان از یک تابع وزن‌دهی هموار (کرنل) بهره برد، یکی از معروف‌ترین کرنل‌ها، تابع گاوسی است.

$$K(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{u^2}{2}\right]$$

$$\hat{p}(x)=\frac{1}{Nh}\sum_{t=1}^{N}K\left(\frac{x-x^t}{h}\right)$$

- هر تابع نامنفی و متقارن حول صفر که دارای سطح یک باشد، را می‌توان به عنوان کرنل استفاده کرد.

مثال



k-Nearest Neighbor Estimator

- در این روش بازه‌ی به صورت وفقی در نظر گرفته می‌شود. بازه‌ای که k همسایه‌ی نزدیک در آن واقع هستند. در واقع به جای ثابت در نظر گرفتن نوار، تعداد نمونه‌های واقع در نوار ثابت در نظر گرفته می‌شود.

$$\hat{p}(x)=\frac{k}{2Nd_k(x)}$$

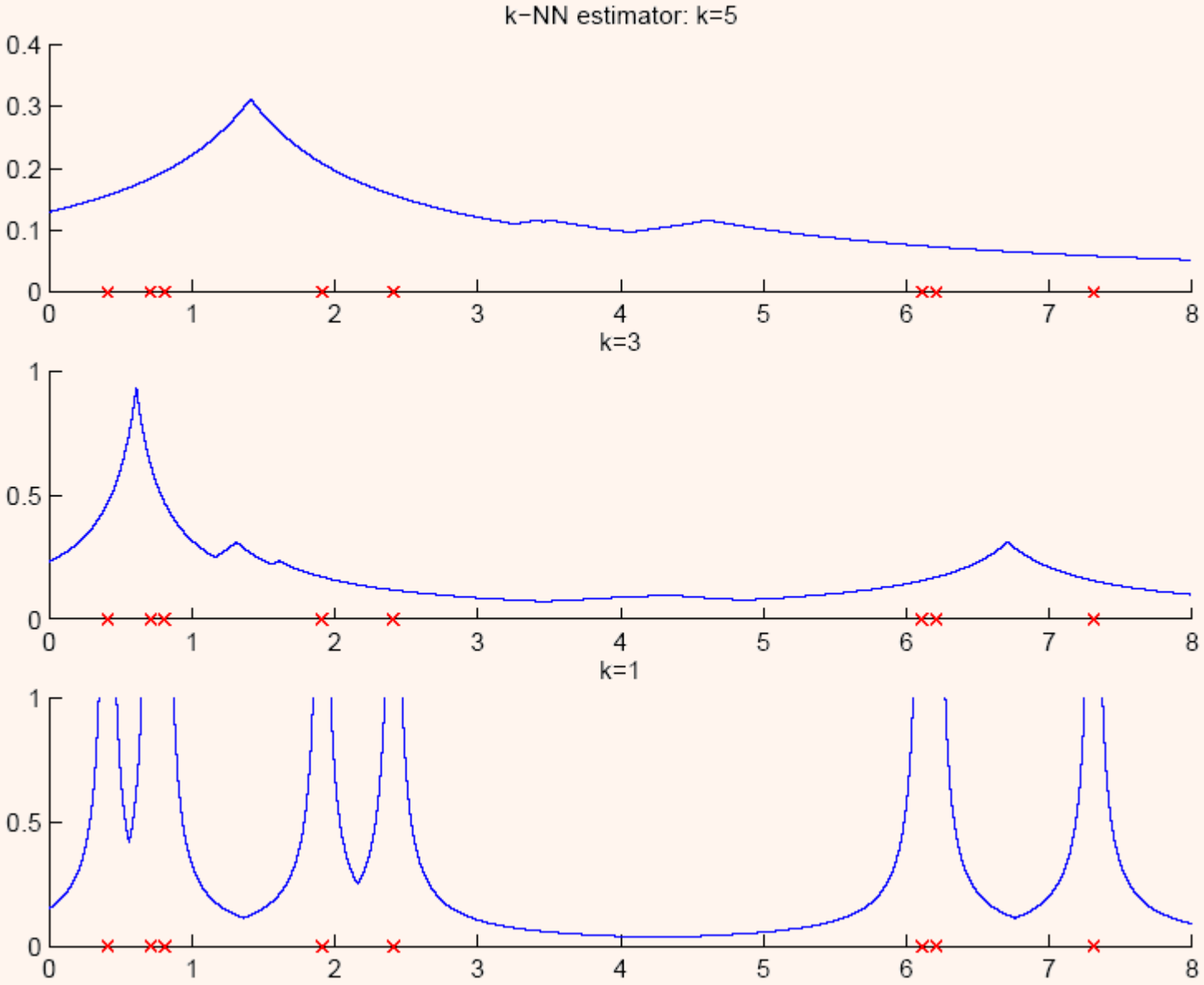
$$\hat{p}(x)=\frac{\#\left\{x-h<x^t\le x+h\right\}}{2Nh}$$

- $d_k(x)$ فاصله‌ی k–امین همسایه‌ی نزدیک است.
- در چگالی تخمین زده شده، شکستگی(گسستگی در مشتق) وجود دارد، برای به دست آوردن تقریب هموارتر می‌توان از کرنل استفاده کرد:

$$\hat{p}(x)=\frac{1}{Nd_k(x)}\sum_{t=1}^{N}K\left(\frac{x-x^t}{d_k(x)}\right)$$

$$\hat{p}(x)=\frac{1}{Nh}\sum_{t=1}^{N}K\left(\frac{x-x^t}{h}\right)$$

مثال



تعمیم به داده‌های چندبعدی

- تخمین چگالی به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \frac{1}{Nh^d} \sum_{t=1}^{N} K\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}^t}{h} \right)$$

مشروط به

$$\int_{R^d} K(x)\,dx = 1$$

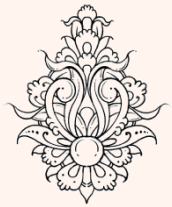
- در این حالت تابع کرنل به صورت‌های زیر خواهد بود:

$$K(\mathbf{u}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^d \exp\left[-\frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} \right]$$

spheric

$$K(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2} |\mathbf{S}|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{u} \right]$$

ellipsoid



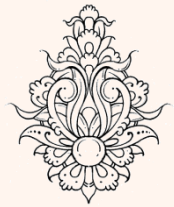
تعمیم به داده‌های چندبعدی(ادامه...)

- برای تخمین هیستوگرام یک مجموعه‌ی هشت‌بعدی در صورتی که برای هر بعد تنها ده نوار در نظر گرفته شود:

Curse of dimensionality

  - به 10^8 بخش نیاز خواهیم داشت.
- برای داده‌های گسسته می‌توان از فاصله‌ی همینگ نیز استفاده کرد.

$$HD\left(\mathbf{x},\mathbf{x}^t\right)=\sum_{j=1}^{d}1\left(x_j\neq x_i\right)$$



دسته‌بندی ناپارامتری

- برای دسته‌بندی ابتدا چگالی احتمال هر کلاس $p(\boldsymbol{x}|C_i)$ محاسبه می‌شود:

$$\hat{p}(\mathbf{x}|C_i)=\frac{1}{N_i h^d}\sum_{t=1}^{N}K\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}^t}{h}\right)r_i^t$$

- و جداساز به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$$g_i(\mathbf{x})=\hat{p}(\mathbf{x}|C_i)\hat{P}(C_i)\qquad \hat{P}(C_i)=\frac{N_i}{N}$$

$$g_i(\mathbf{x})=\hat{p}(\mathbf{x}|C_i)\hat{P}(C_i)=\frac{1}{Nh^d}\sum_{t=1}^{N}K\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}^t}{h}\right)r_i^t$$

- x متعلق به کلاسی است که جداساز آن بیشترین مقدار را داشته باشد، از بخش مشترک جداساز می‌توان چشم‌پوشید.

دسته‌بندی ناپارامتری (ادامه...)

$$g_i(\mathbf{x}) = \sum_{t=1}^{N} K\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}^t}{h}\right) r_i^t$$

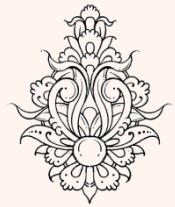
- هر نمونه‌ی آموزشی متعلق به کلاس i–ام به ورودی یک «رأی» می‌دهد. رأی توسط تابع کرنل مشخص می‌شود.
- در حالتی که از k-nn استفاده کنیم:

$$\hat{p}(\mathbf{x}|C_i) = \frac{k_i}{N_i V^k(\mathbf{x})}$$

– k_i تعداد بخشی از k همسایه است که به کلاس i–ام تعلق دارند و V ابرکره‌ای است به مرکز $\mathbf{x}$ و با شعاع $\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_{(k)}\right\|$ نزدیک‌ترین همسایه‌ی k–ام

– و

$$V^k = r^d c_d, \quad c_1 = 2, c_2 = \pi, c_3 = 4\pi/3, \cdots$$



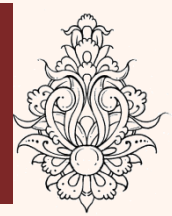
دسته‌بندی ناپارامتری (ادامه...)

$$\hat{P}(C_i|\mathbf{x}) = \frac{\hat{p}(\mathbf{x}|C_i)\hat{P}(C_i)}{\hat{p}(\mathbf{x})}$$

$$\hat{p}(\mathbf{x}|C_i) = \frac{k_i}{N_i V^k(\mathbf{x})} \qquad \hat{P}(C_i) = \frac{N_i}{N} \qquad \hat{p}(\mathbf{x}) = \frac{k}{V^d(\mathbf{x})N}$$

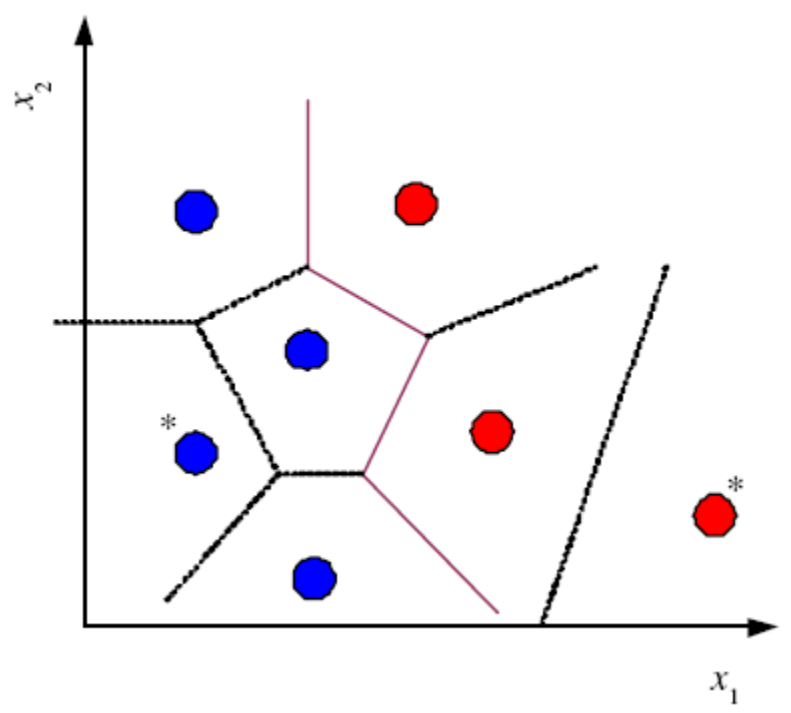
$$\hat{P}(C_i|\mathbf{x}) = \frac{\hat{p}(\mathbf{x}|C_i)\hat{P}(C_i)}{\hat{p}(\mathbf{x})} = \frac{k_i}{k}$$

در دسته‌بندی k-nn ورودی به کلاسی نسبت داده می‌شود که در بین k همسایه‌ی نزدیک بیشترین عضو را داشته باشد.



Nearest neighbor classifier

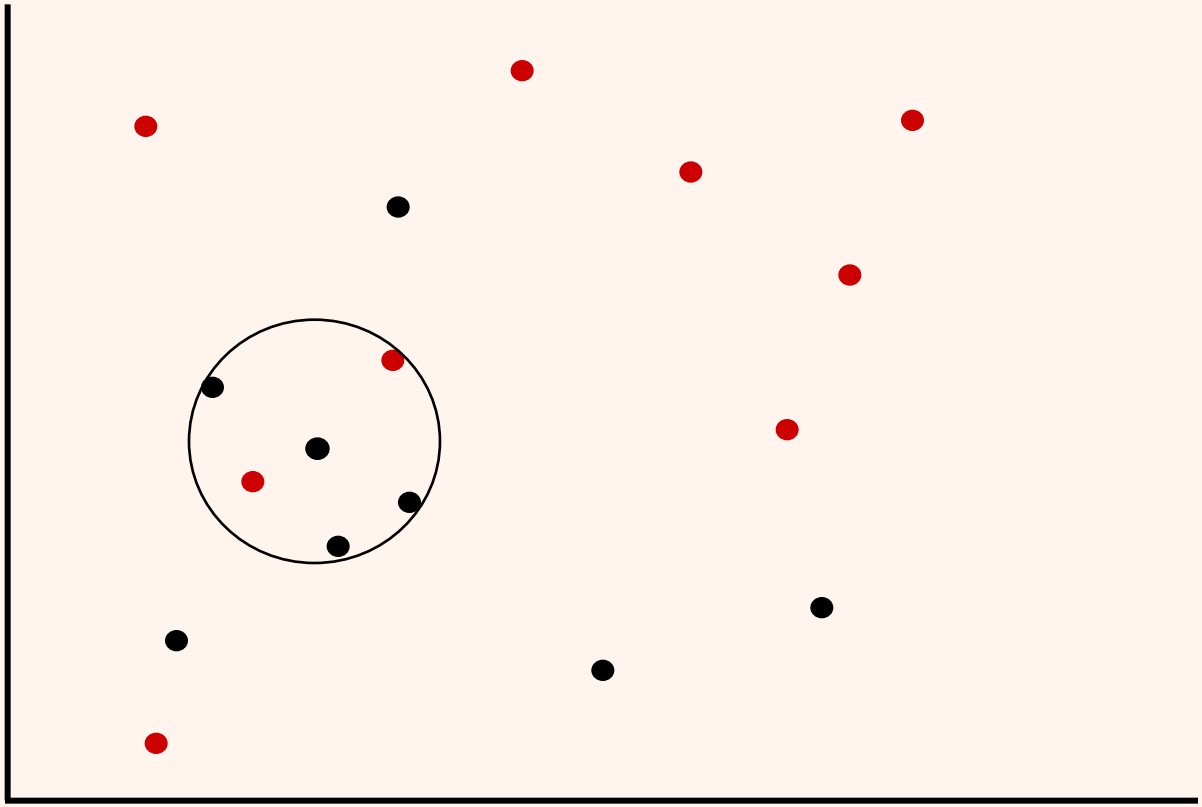
- در حالت خاص که k=1 در نظر گرفته شود، ورودی به کلاسی نسبت داده می‌شود که نزدیک‌ترین نمونه به ورودی متعلق به آن است:



Voronoi tessellation

5-Nearest Neighbor

مثال



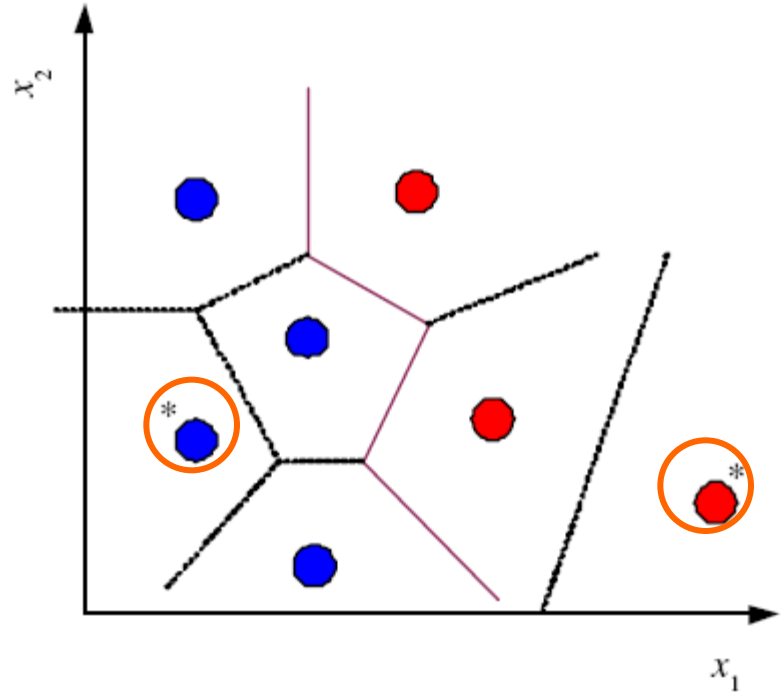
Condensing methods

Condensed Nearest Neighbor (C.N.N.)

- پیچیدگی مکانی و زمانی روش‌های ناپارامتری به تعداد نمونه‌های آموزشی (N) بستگی دارد.
- روش‌هایی ارائه شده است که هدف آن کاهش نمونه‌های ذخیره شده بدون افت کارایی است.
- در این روش‌ها یک زیر مجموعه‌ی کوچک (Z) از نمونه‌های آموزشی (X) به نحوی انتخاب می‌شود که ضمن کاهش داده‌های ذخیره شده خطا افزایش چندانی نیابد.
- در C.N.N. برای دسته‌بندی از 1-nn استفاده می‌شود.

Condensed Nearest Neighbor (C.N.N.)

- در 1-nn جداساز به صورت خطی تکه‌ای تقریب زده می‌شود و تنها نمونه‌هایی که در تشکیل جداساز نقش دارند، لازم است، نگهداری شوند. به چنین مجموعه‌ای consistent می‌گویند.



Incremental algorithm

$\mathcal{Z} \leftarrow \emptyset$
Repeat
  For all $\boldsymbol{x} \in \mathcal{X}$ (in random order)
    Find $\boldsymbol{x}' \in \mathcal{Z}$ s.t. $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'\| = \min_{\boldsymbol{x}^j \in \mathcal{Z}} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^j\|$
    If class($\boldsymbol{x}$)≠class($\boldsymbol{x}'$) add $\boldsymbol{x}$ to $\mathcal{Z}$
Until $\mathcal{Z}$ does not change

- پاسخ نهایی به ترتیب اعمال ورودی‌ها بستگی دارد.
- با تعریف تابع هزینه‌ی زیر می‌توان بین پیچیدگی و خطای مدل بسته به مقدار λ نوعی مصالحه برقرار کرد:

$$E'(\mathcal{Z} \mid \mathcal{X}) = E(\mathcal{X} \mid \mathcal{Z}) + \lambda |\mathcal{Z}|$$

Outlier Detection

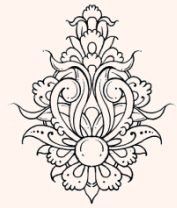
تشخیص داده‌های پرت

- داده‌ی پرت(ناهنجار)، داده‌ای است که با سایر نمونه‌ها تفاوت زیادی دارد.
- چنین نمونه‌ای بیانگر یک رفتار غیرعادی است:
  - تراکنش‌های کارت اعتباری، سوءاستفاده از کارت
  - در تصاویر پزشکی، وجود تومور
  - در ترافیک شبکه، نفوذ در شبکه
  - در پرونده‌ی پزشکی، بروز بیماری
  - بروز خطا در یک سیستم، خراب شدن یک سنسور
- معمولا به عنوان یک مسأله‌ی دو کلاسه با نظارت تلقی نمی‌شوند.
  - داده‌های پرت، نسبت به داده‌های نرمال بسیار اندک هستند و معمولا بدون برچسب هستند.

تشخیص داده‌های پرت(ادامه...)

one-class classification problem

- در واقع، مسأله یک دسته‌بندی کننده‌ی تک‌کلاسه است.
- در این حالت داده‌های نرمال مدل می‌شوند؛ توزیع داده‌های نرمال به دست می‌آید.
- در این حالت هرچند می‌توان از شیوه‌های پارامتری و نیمه‌پارامتری استفاده کرد، اما با توجه به حساسیت روش‌های پارامتری به داده‌های پرت، روش‌های ناپارامتری ترجیح داده می‌شود.
  - یک داده‌ی پرت مدل را تحت تأثیر قرار می‌دهد.

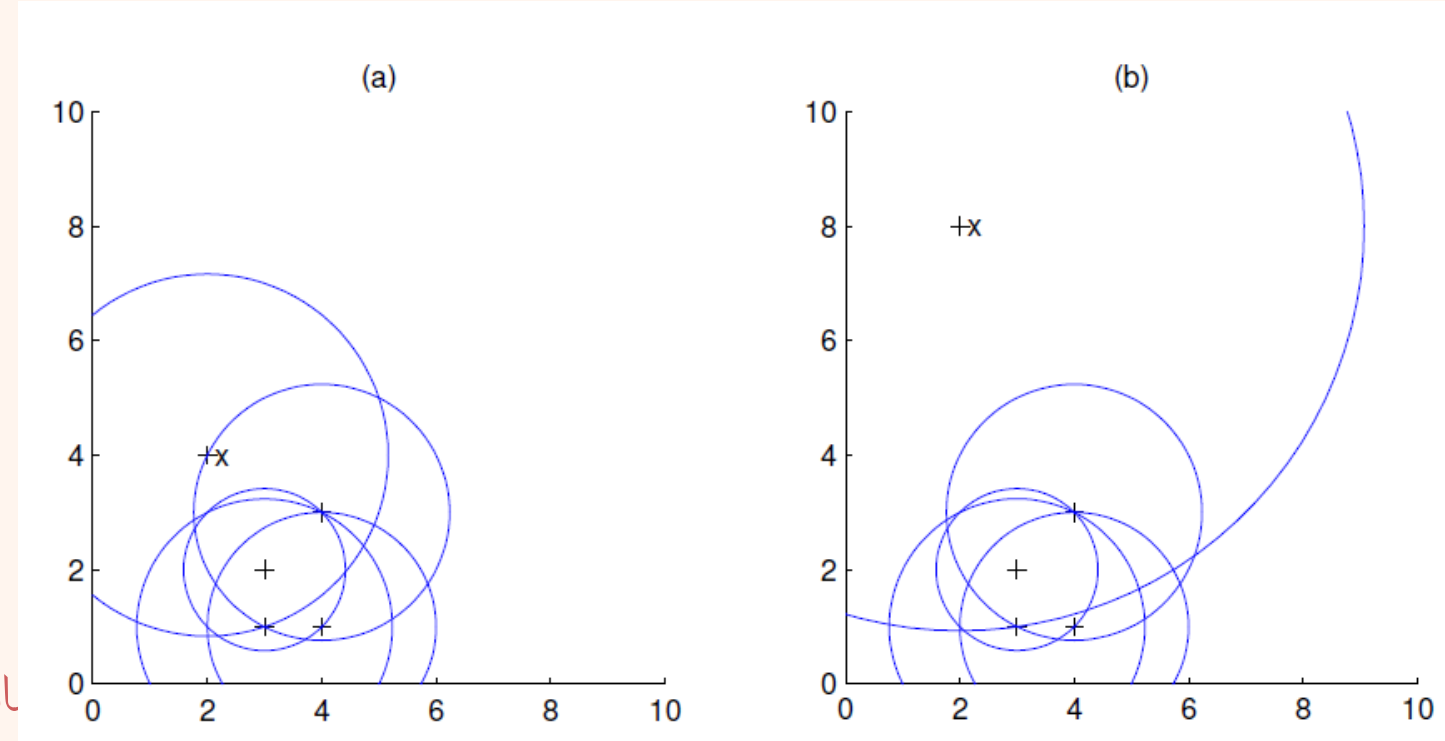


تشخیص داده‌های پرت(ادامه...)

Local Outlier Factor

- در روش‌های ناپارامتری در صورتی که یک نمونه از سایر نمونه‌ها دور باشد، پرت تشخیص داده می‌شود.

$$\mathrm{LOF}(\boldsymbol{x}) = \frac{d_k(\boldsymbol{x})}{\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathcal{N}(\boldsymbol{x})} d_k(\boldsymbol{s}) / |\mathcal{N}(\boldsymbol{x})|}$$

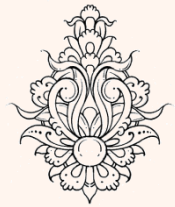


رگرسیون ناپارامتری(تک متغیره)

Nonparametric Regression | **smoothing models(smoother)**

$$\mathcal{X}=\left\{\mathbf{x}^t,r^t\right\},\qquad r^t=g\left(\mathbf{x}^t\right)+\varepsilon$$

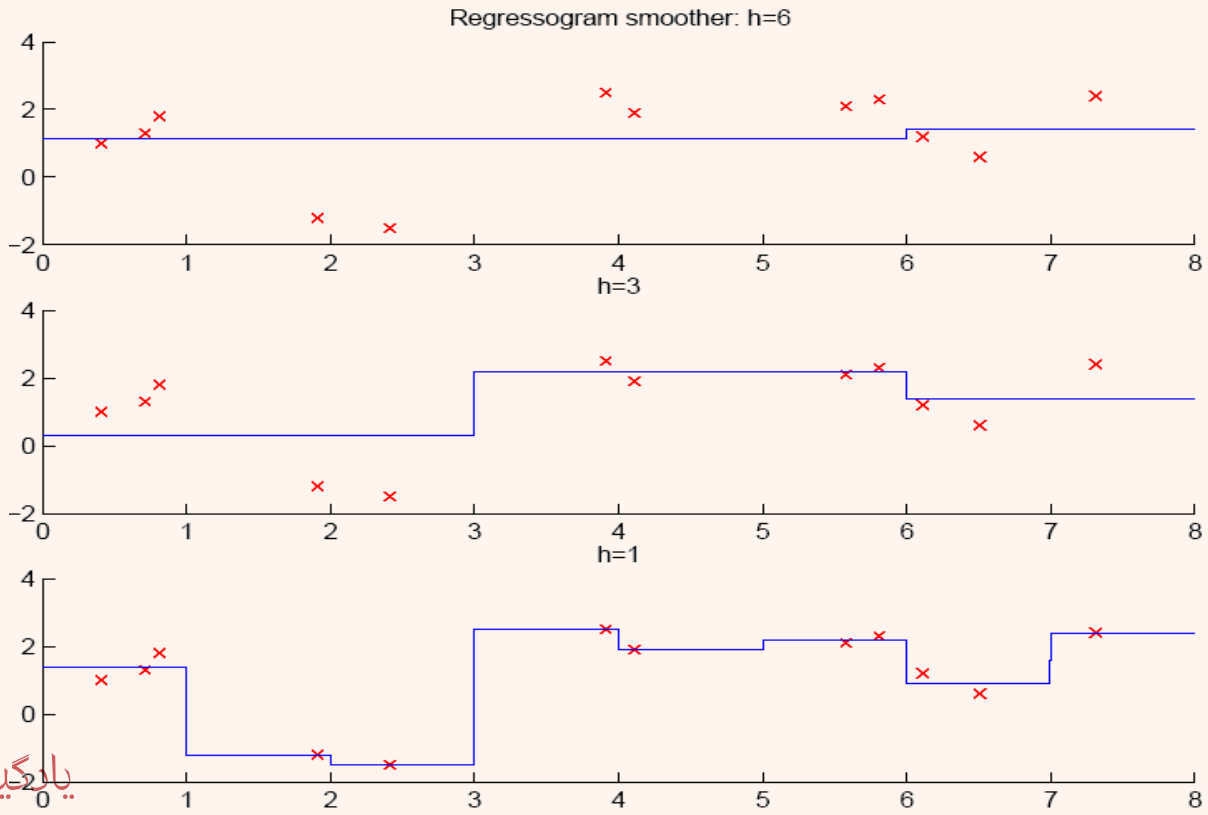
- رگرسیون ناپارامتری زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که نتوان یک مدل کلی برای داده‌ها در نظر گرفت.
- در این حالت فرض می‌شود که داده‌های نزدیک به x، مقادیر نزدیک به $g(x)$ خواهند داشت.
- در این حالت رویکرد یافتن همسایه‌های x و میانگین گرفتن از مقادیر r مربوط به آن‌هاست.



Regressogram

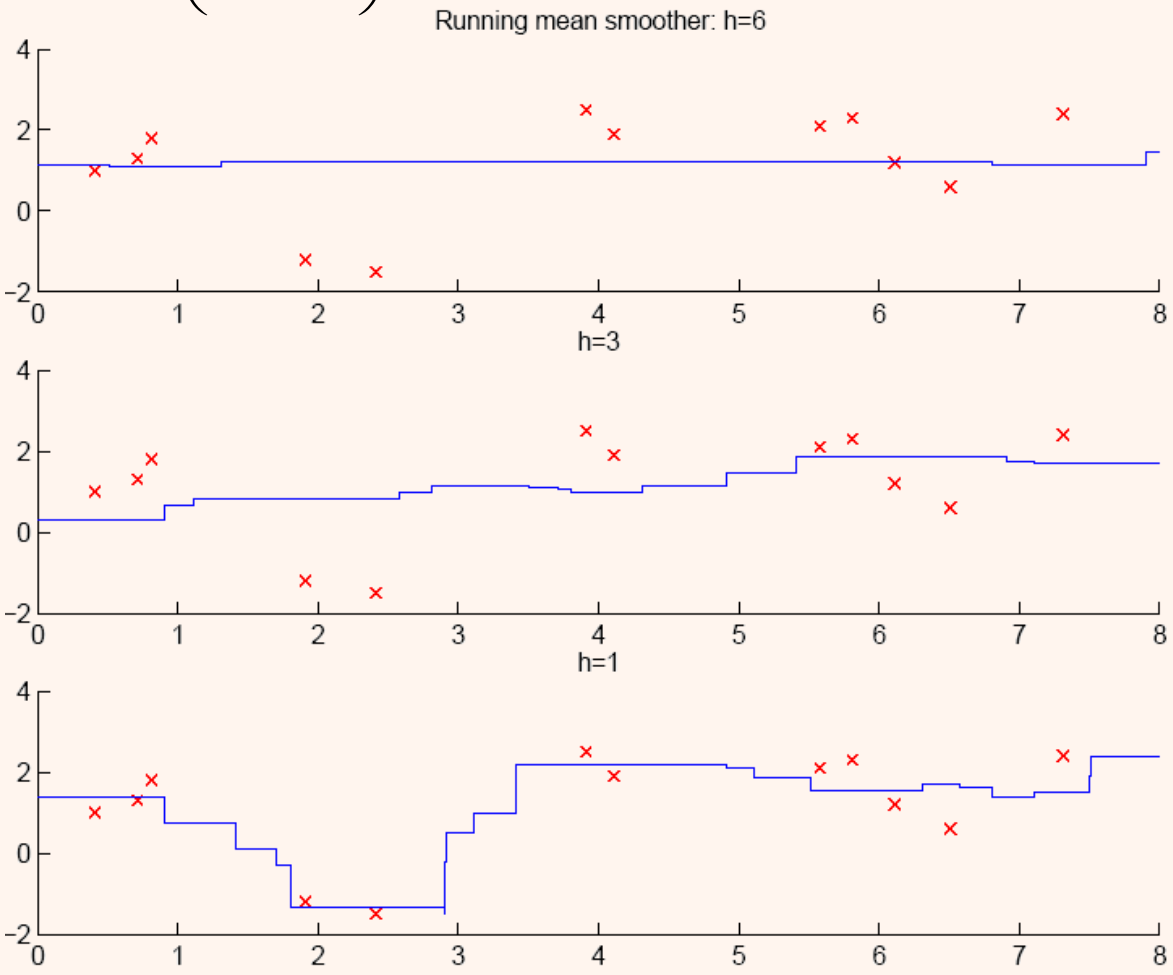
این واژه در سال ۱۹۶۱ توسط شخصی به نام Tukey مطرح شد
تا شباهت آن را به هیستوگرام نشان دهد.

$$\hat{g}(x)=\frac{\sum_{t=1}^{N} b\left(x, x^{t}\right) r^{t}}{\sum_{t=1}^{N} b\left(x, x^{t}\right)} \quad \text{where} \quad b\left(x, x^{t}\right)=\begin{cases}1 & \text{if } x^{t} \text{ is in the same bin with } x\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$



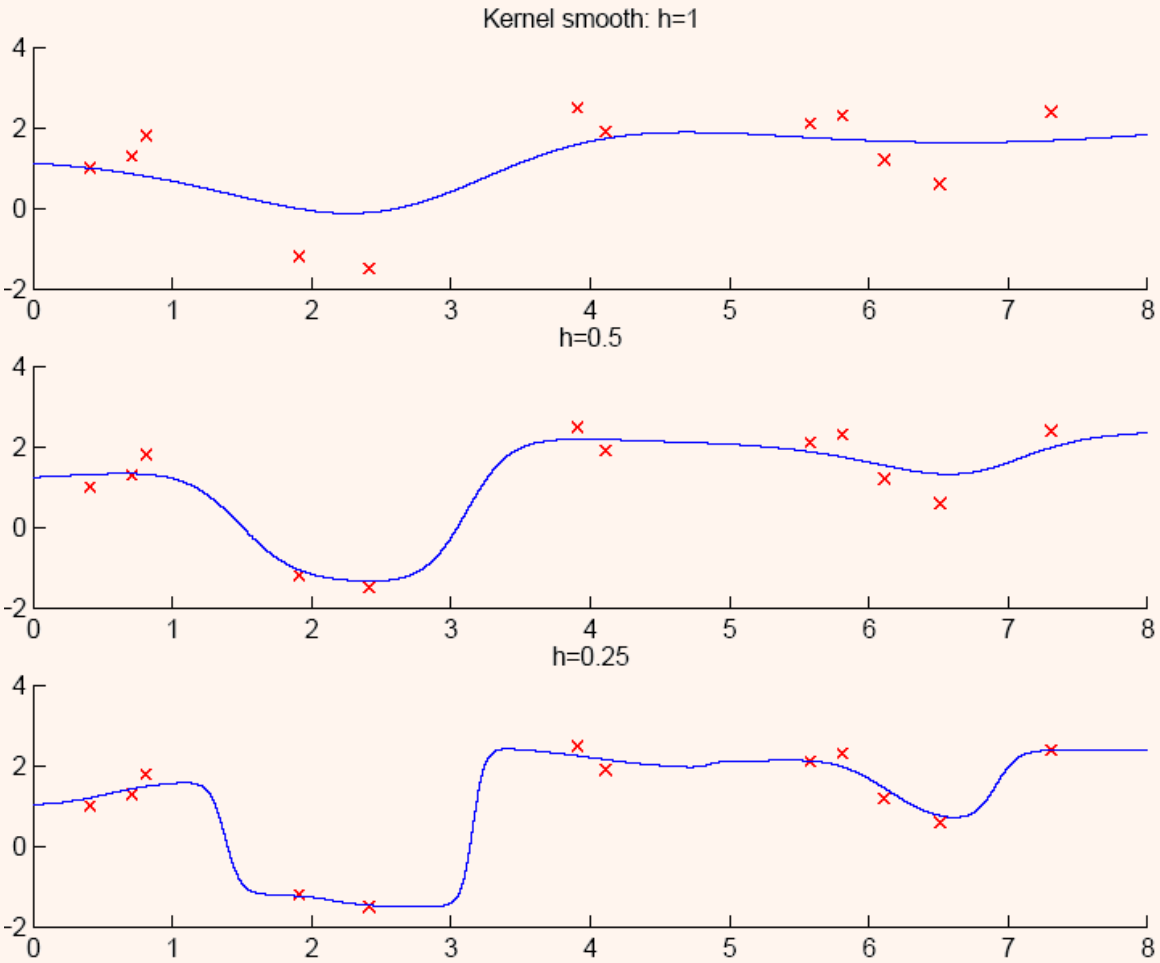
Running Mean Smoother

$$\hat{g}(x)=\frac{\sum_{t=1}^{N} w\left(\frac{x-x^t}{h}\right) r^t}{\sum_{t=1}^{N} w\left(\frac{x-x^t}{h}\right)} \quad \text{where} \quad w(u)=\begin{cases}1 & \text{if } |u|<1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$



Kernel Smoother

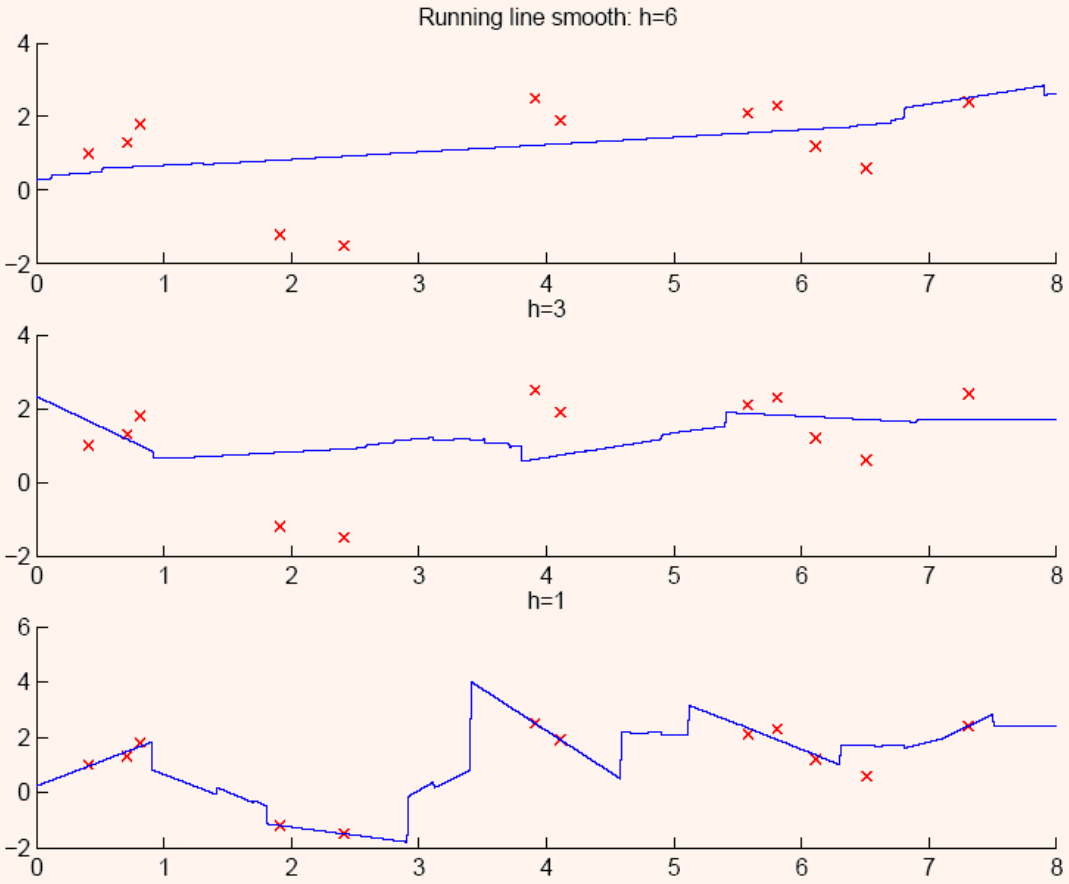
$$\hat{g}(x) = \frac{\sum_{t=1}^{N} K\left(\frac{x - x^t}{h}\right) r^t}{\sum_{t=1}^{N} K\left(\frac{x - x^t}{h}\right)}$$



K( ) is Gaussian

Running line smoother

- در این حالت برای هر همسایگی، یک رگرسیون خطی به صورت محلی در نظر گرفته می‌شود.



تعیین پارامتر هموارسازی

smoothing parameter

- در صورتی که k یا h کوچک در نظر گرفته شوند (به عنوان مثال زمانی که تنها خود نمونه در نظر گرفته شود)، میزان بایاس کم است، اما واریانس بالا خواهد بود (پیچیدگی زیاد).

undersmoothing

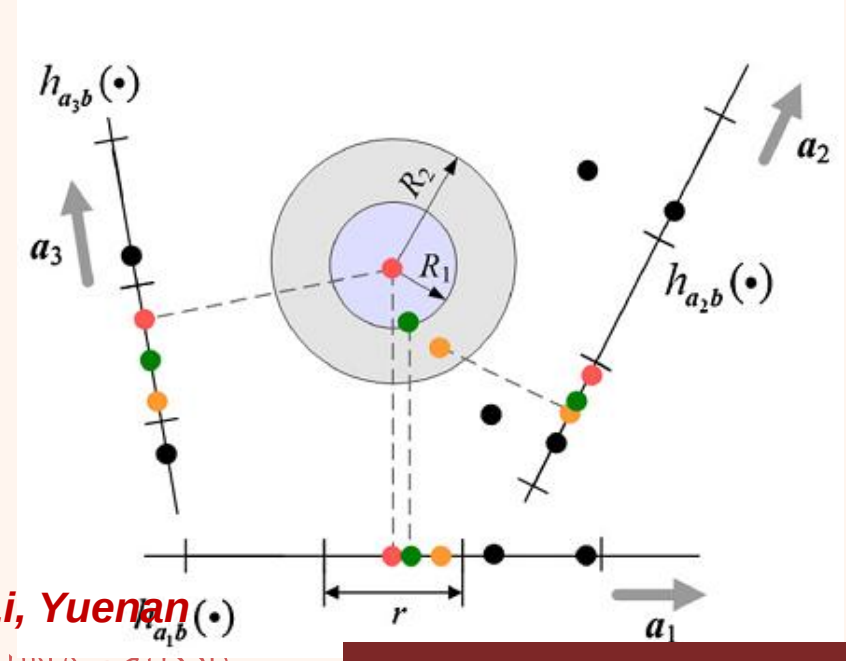
- در صورت افزایش دامنه‌ی هموارسازی، واریانس کاهش یافته، اما بایاس افزایش می‌یابد (پیچیدگی کم).

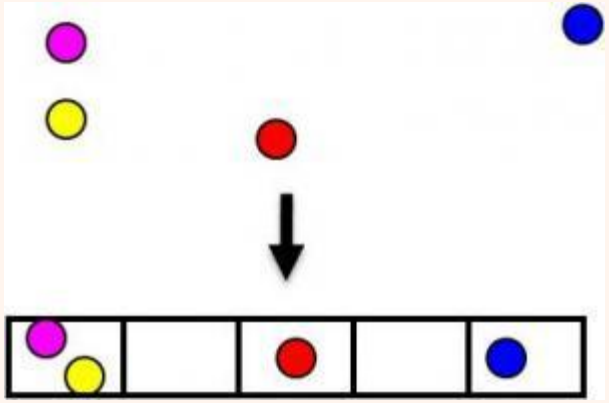
oversmoothing

- می‌توان از cross validation نیز برای تنظیم پارامتر هموارسازی استفاده کرد.

روش‌های جستجو

- یافتن «نزدیک‌ترین همسایه» به صورت جستجوی خطی به ویژه زمانی که تعداد نمونه‌های آموزشی بالاست، به صرفه نیست.
- در این شرایط عموما از درخت kd استفاده می‌شود.
- همچنین روش‌های درهم‌سازی نظیر (LSH) استفاده می‌شود.





http://bigdata.csail.mit.edu/node/17

Li, Yuenan

یادگیری ماشین

Locality Sensitive Hashing