یادگیری ماشین
(۱۳-۱۱-۸۰۵-۰۱)
فصل پانزدهم

HMM

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر
پاییز ۱۳۹۳
احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

- زنجیره‌ی مارکوف
- مدل مارکوف قابل مشاهده
- مدل مخفی مارکوف
- چند مثال
- مسائل سه‌گانه
  - ارزیابی
  - یافتن زنجیره‌ی حالات
  - آموزش

پیش‌گفتار

- تاکنون فرض می‌شد که نمونه‌ها «متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان(iid)» هستند.
  - مزیت این فرض سادگی محاسبه‌ی درست‌نمایی است.
  - در عین حال، برای برخی کاربردها که نمونه‌های متوالی وابستگی دارند، این پیش‌فرض پذیرفتنی نیست.
    - به عنوان مثال حروف یک کلمه وابستگی دارند. به عنوان مثال در زبان انگلیسی حرف h با احتمال یکسانی بعد از حرف‌های t و x ظاهر نمی‌شود.
    - بازشناسی صدا نیز مربوط به شناسایی واج‌هایی است که به یکدیگر وابسته هستند و تنها توالی مشخصی از این واج‌ها معتبر هستند، در سطحی بالاتر هر ترتیبی از کلمه‌ها نیز مجاز نیستند.
  - یک «فرآیند تصادفی پارامتری» می‌تواند توالی نمونه‌ها را تولید کند.

Parametric random process

فرآیندهای گسسته‌ی مارکوف

Discrete Markov Process

- سیستمی را در نظر بگیرید که در هر لحظه از زمان در یکی از N حالت مشخص شده باشد:

$$S_1, S_2, \ldots, S_N$$

- حالت سیستم در زمان t با q_t نمایش داده می‌شود:

$q_t=S_i$ ← **در زمان t سیستم در حالت S_i می‌باشد**

- احتمال تغییر حالت سیستم به حالتی دیگر با توجه به حالت‌های قبلی سیستم تعیین می‌شود:

$$P(q_{t+1} = S_j \mid q_t = S_i, q_{t-1} = S_k, \ldots)$$

فرآیندهای گسسته‌ی مارکوف(ادامه...)

- برای حالت خاصی از مدل مارکوف، حالت در زمان t+1 تنها به حالت در زمان t بستگی دارد، که به آن «مدل مارکوف مرتبه‌ی اول» می‌گویند. **First-order Markov Model**

$$\boxed{P(q_{t+1}=S_j \mid q_t=S_i, q_{t-1}=S_k, \ldots) = P(q_{t+1}=S_j \mid q_t=S_i)}$$

- با فرض این که «احتمال گذار» (transition) مستقل از زمان باشد:

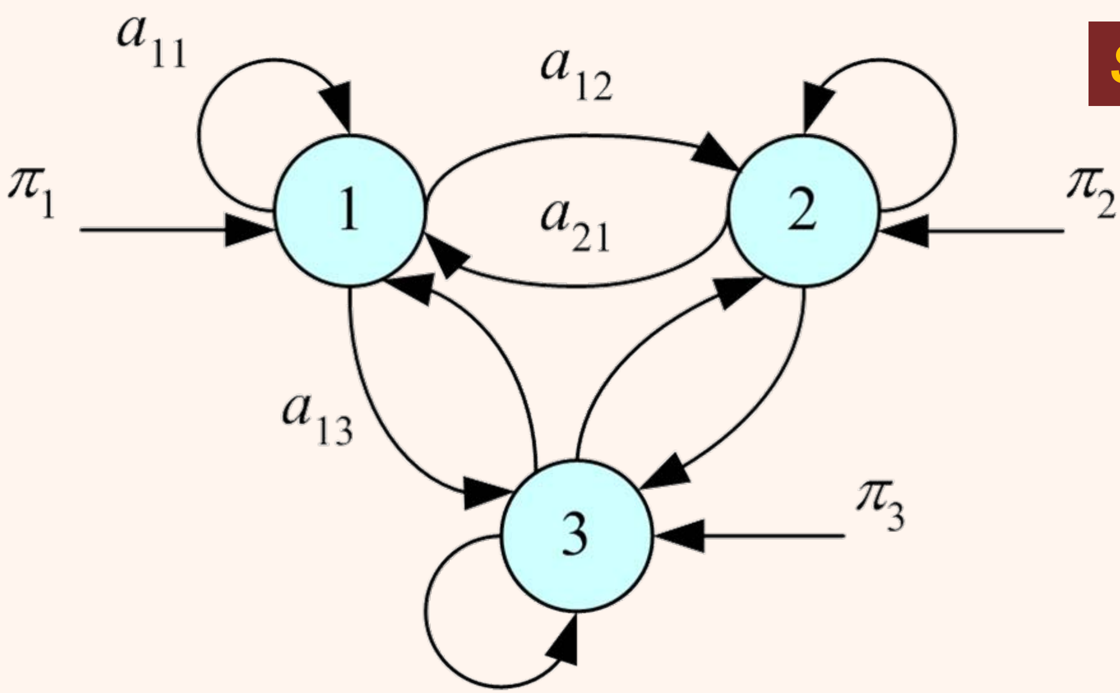
$$a_{ij} \equiv P(q_{t+1}=S_j \mid q_t=S_i) \qquad a_{ij} \geq 0 \ \text{and} \ \sum_{j=1}^{N} a_{ij} = 1$$

- احتمال اولیه، احتمال این است که که اولین حالت S_i باشد:

$$\pi_i \equiv P(q_1=S_i) \qquad \sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1$$

فرآیندهای گسسته‌ی مارکوف(ادامه...)

Stochastic automaton



- $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس با ابعاد $N \times N$ است که جمع عناصر هر سطر آن برابر یک می‌شود.
- $\Pi = [\pi_i]$ برداری N-تایی است که حاصل‌جمع تمام عناصر آن برابر یک است.

Observable Markov Model

- در یک « مدل مارکوف قابل مشاهده»، در زمان t می‌دانیم که q_t کدام حالت را نشان می‌دهد.
  - خروجی فرآیند، برچسب حالت فعلی است؛ هر حالت متناظر با مشاهده‌ی یک رخداد فیزیکی می‌باشد.

Observation sequence

- «دنباله‌ی مشاهدات»، O، در اینجا معادل ترتیب حالت‌های مشاهده شده است ، که احتمال رخداد آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(O=Q \mid A,\Pi) = p(q_1)\prod_{t=2}^{T} p(q_t \mid q_{t-1}) = \pi_{q_1} a_{q_1 q_2} \cdots a_{q_{T-1} q_T}$$

مثال ۱

- هر حالت بیانگر وضعیت جوی در یک زمان مشخص در روز(مثلاً ظهر) می‌باشد:
  - حالت۱: وجود بارندگی
  - حالت۲: هوای ابری
  - حالت۳: هوای آفتابی
- ماتریس انتقال:

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

- با فرض این که در روز اول هوا آفتابی باشد، احتمال این که هفت روز بعد، آفتابی-آفتابی-بارانی-بارانی-آفتابی- ابری-آفتابی باشد:

$$O = \{S_3, S_3, S_3, S_1, S_1, S_3, S_2, S_3\}$$

مثال ا(ادامه...)

$$P(O|Model) = P(S_3, S_3, S_3, S_1, S_1, S_3, S_2, S_3)$$
$$= P(S_3)P(S_3|S_3)P(S_3|S_3)P(S_1|S_3)\ldots$$
$$\ldots P(S_1|S_1)P(S_3|S_1)P(S_2|S_3)P(S_3|S_2)$$
$$= \pi_3 a_{33} a_{33} a_{31} a_{11} a_{13} a_{32} a_{23}$$
$$= 1.(0.8).(0.8).(0.1).(0.4).(0.3).(0.1).(0.2)$$
$$= 1.536 \times 10^{-4}$$

- احتمال باقی ماندن مدل در یک حالت به اندازه‌ی زمان d:

$$O = \left\{ S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3}, \ldots, S_{i_d}, S_{j_{d+1}} \neq S_i \right\}$$

$$p_i(d) \equiv P(O|Model, q_1 = S_i) = (a_{ii})^{d-1}(1 - a_{ii})$$

مثال ۱ (ادامه...)

$$p_i(d) \equiv P(O \mid Model, q_1 = S_i) = (a_{ii})^{d-1}(1-a_i)$$

به طور متوسط چند روز پیاپی هوا آفتابی است؟

$$E[d_i] = \sum_{d=1}^{\infty} d p_i(d) = \sum_{d=1}^{\infty} d (a_{ii})^{d-1}(1-a_{ii})$$

$$= (1-a_{ii}) \sum_{d=1}^{\infty} d (a_{ii})^{d-1} = \frac{1}{1-a_{ii}}$$

به عنوان نمونه در مثال فوق انتظار می‌رود به طور متوسط پنج روز پیاپی هوا آفتابی، ۲.۵ روز ابری و تنها ۱.۶۷ روز متوالی هوا بارانی باشد.

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

مثال ۲

- فرض کنید N گلدان در اختیار داریم که در هریک توپ‌هایی هم‌رنگ موجود است.
- قرمز (S_1)، آبی (S_2) و سبز (S_3)
  - q_t رنگ توپی که در زمان t برداشته شده است، را نمایش می‌دهد.

$$\Pi = [0.5, 0.2, 0.3]^T \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$O = \{S_1, S_1, S_3, S_3\}$$

$$P(O|\mathbf{A}, \Pi) = P(S_1) \cdot P(S_1|S_1) \cdot P(S_3|S_1) \cdot P(S_3|S_3)$$
$$= \pi_1 \cdot a_{11} \cdot a_{13} \cdot a_{33}$$
$$= 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.048$$

مثال ۲(ادامه...)

- فرض کنید در این مثال یک سری (K) مشاهده با طول T موجود است، سیستم می‌تواند پارامترهای Π و A را یاد بگیرد. اگر q_t^k حالت سیستم در زمان t در دنباله‌ی k-ام باشد، احتمال حالت اولیه را می‌توان به صورت زیر تقریب زد:

$$\hat{\pi}_i = \frac{\#\{\text{sequences starting with } S_i\}}{\#\{\text{sequences}\}} = \frac{\sum_k 1\left(q_1^k = S_i\right)}{K}$$

- و احتمال گذار

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\#\{\text{transitions from } S_i \text{ to } S_j\}}{\#\{\text{transitions from } S_i\}}$$

$$= \frac{\sum_k \sum_{t=1}^{T\text{-}1} 1\left(q_t^k = S_i \text{ and } q_{t+1}^k = S_j\right)}{\sum_k \sum_{t=1}^{T\text{-}1} 1\left(q_t^k = S_i\right)}$$

مدل پنهان مارکوف

- مدل مارکوف قابل مشاهده برای استفاده‌ی عملی بسیار محدود می‌باشد.
- در «مدل مارکوف پنهان(*HMM*)»، حالت‌های سیستم را نمی‌توان مشاهده نمود بلکه در هر حالت، خروجی مشاهده شده، احتمال حضور سیستم در یک حالت خاص را با تابعی احتمالاتی بیان می‌کند.
- با فرض این که در حالت‌های مختلف خروجی سیستم از مجموعه‌ی زیر باشد:

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_M\}$$

  - «احتمال مشاهده» به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boxed{b_j(m) \equiv P(O_t = v_m \mid q_t = S_j)}$$

Observation (emission) probability

مدل پنهان مارکوف(ادامه...)

- دنباله‌ی حالت‌های سیستم قابل مشاهده نیست.
  - این همان نکته‌ای است که باعث شده چنین سیستمی پنهان نامیده شود.
  - ولی با توجه به دنباله‌ی مشاهدات، می‌توان آن را حدس زد و یا به بیان بهتر احتمال آن را محاسبه نمود.
  - باید توجه داشت که به ازای هر «دنباله‌ی مشاهده» تعداد زیادی دنباله‌ی حالت موجود است که می‌تواند همان دنباله‌ی مشاهده را تولید نماید ولی با احتمال‌های متفاوت.

مدل پنهان مارکوف(ادامه...)

- در مدل پنهان مارکوف علاوه بر حرکت تصادفی بین حالت‌ها، خروجی مشاهده شده هم تصادفی است.
  - مدل مارکوف پنهان در واقع نوعی مدل مارکوف تو در تو است.
  - بدین‌ترتیب که مدل مارکوف اصلی انتقال بین حالات را نشان می‌دهد و در هر حالت، مشاهده با توجه به یک مدل مارکوف وابسته به آن حالت انجام می‌شود.
- اولین مشکل تعیین تعداد حالات و تخصیص آن به دنباله‌ی مشاهدات است.

مثال ۳

- فرض کنید شخصی در پس یک مانع یک(یا چند) سکه را پرتاب می‌کند و بدون این که نحوه‌ی عملکردش معین باشد، تنها نتیجه‌ی پرتاب را نمایش می‌دهد:

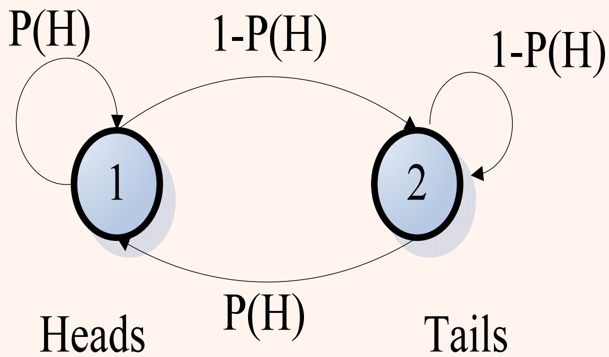
$$O = o_1 o_2 o_3 \ldots o_1$$
$$= \mathcal{HHT} \ldots \mathcal{TTH}$$

- چگونه می‌توان این فرآیند را با زنجیره‌ی مارکوف مدل کرد؟

مثال ۳(ادامه...)

۱

O=HHTTHTHHTTH...
S=1 1 2 2 1 2 1 1 2 2 1 ...



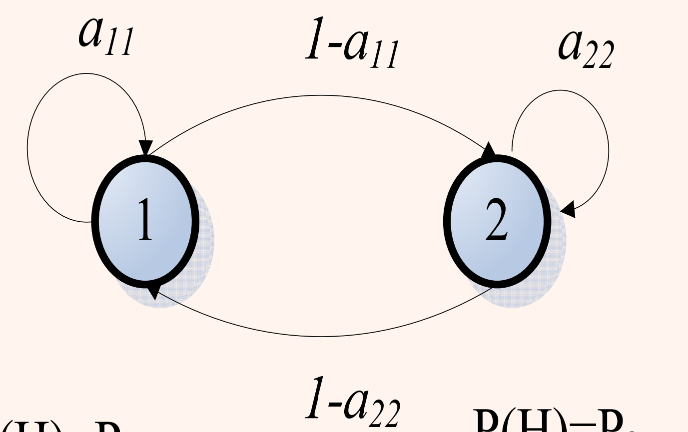
- دو حالت در نظر گرفته و هر حالت بیان‌گر یک روی سکه باشد.
- تنها پارامتر مجهول p(H) است(البته به جز احتمال اولیه).
- «مدل مارکوف قابل مشاهده» است!

مثال ۳(ادامه...)

۴

O=HHTTHTHHTTH...

S=2 1 1 2 2 2 1 2 2 1 2 ...



$P(H)=P_1$

$P(T)=1-P_1$

$P(H)=P_2$

$P(T)=1-P_2$

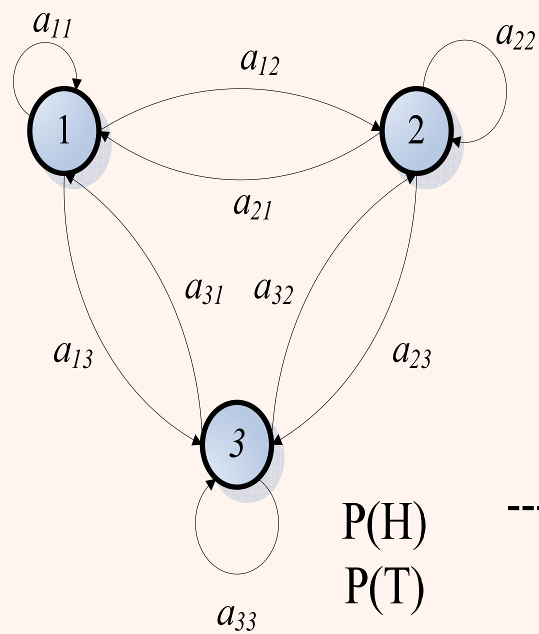
- دو حالت در نظر گرفته و هر حالت بیان‌گر خروجی یک روی سکه است.
- چهار پارامتر مجهول وجود دارد(البته به جز احتمال اولیه).
- «مدل مارکوف قابل پنهان» است!

مثال ۳(ادامه...)

۳

O=HHTTHTHHTTH…

S=3 1 2 3 3 1 1 2 3 1 3 …



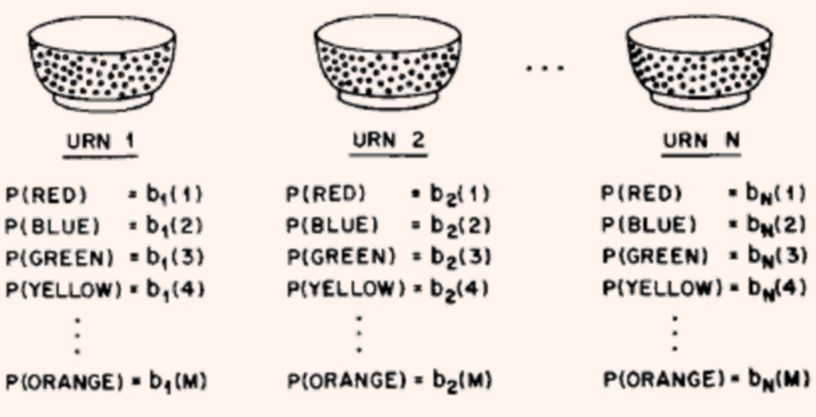
	State 1	2	3
P(H)	P_1	P_2	P_3
P(T)	$1-P_1$	$1-P_2$	$1-P_3$

- نه پارامتر مجهول وجود دارد(البته به جز احتمال اولیه).

- هر چه مدل بزرگ‌تر شود قابلیت مدل کردن آن بهتر خواهد بود.
- اما در عین حال ممکن است مشکل overfitting رخ دهد.

مثال ۴

- در مثال توپ و گلدان، مدل مارکوف پنهان معادل حالتی است که در هر گلدان توپ‌هایی با رنگ‌های متفاوت داشته باشیم.
- در اینجا $b_j(m)$ معادل خارج کردن توپی با رنگ m از گلدان jام می‌باشد.
- این بار نیز دنباله‌ای از رنگ‌ها موجود است با این تفاوت که نمی‌دانیم که توپ‌ها متعلق به کدام گلدان هستند.



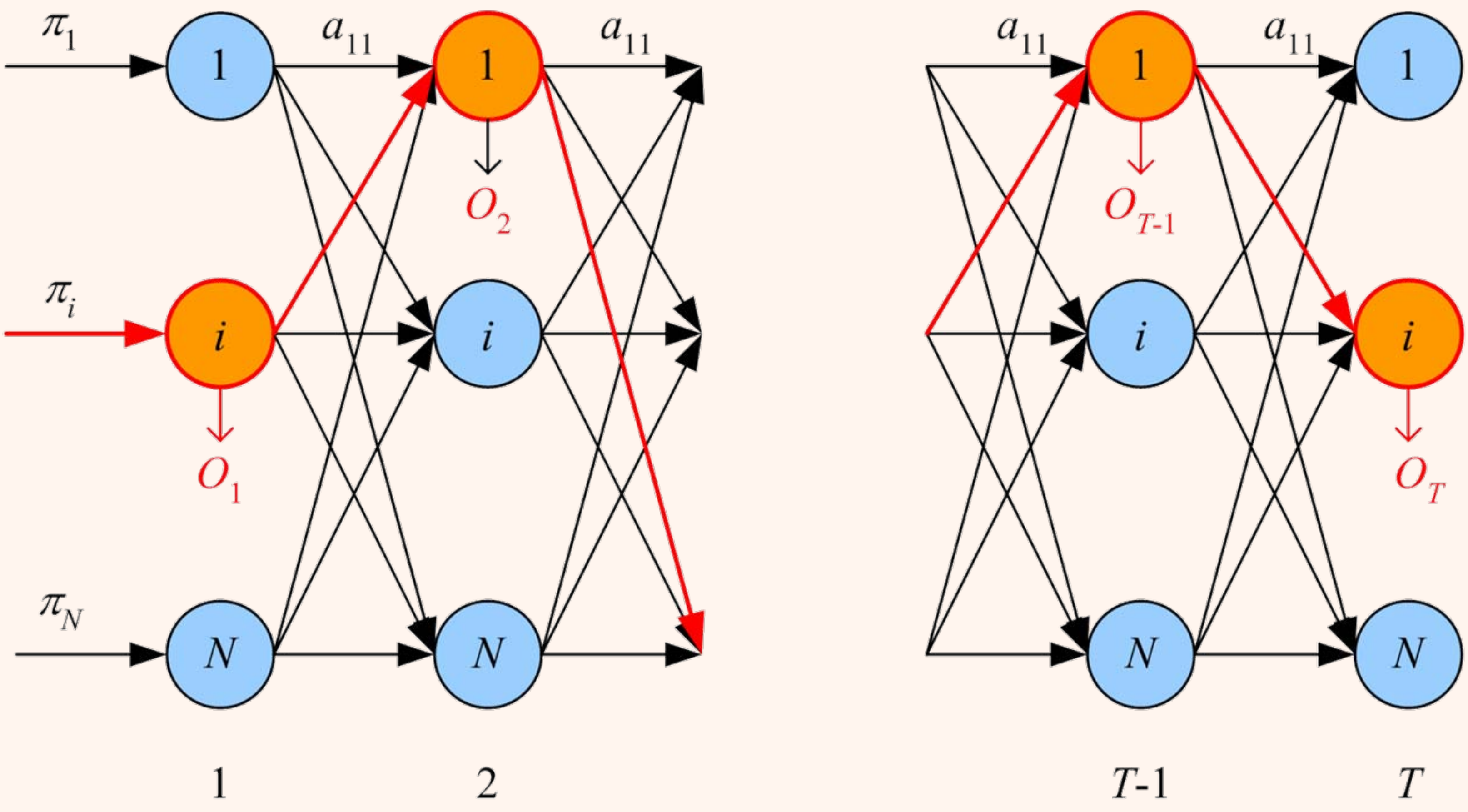
O = {GREEN, GREEN, BLUE, RED, YELLOW, RED, ..., BLUE}

Fig. 3. An N-state urn and ball model which illustrates the general case of a discrete symbol HMM.

$$o = \{red, red, green, blue, yellow\}$$

Jack Ferguson and his colleagues

HMM Unfolded in Time



مؤلفه‌های مدل پنهان مارکوف

- تعداد حالت‌ها:(N)

$$S = \{S_1, S_2, \ldots, S_N\}$$

- تعداد نمادهای قابل مشاهده:(M)

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_M\}$$

- احتمال گذار

$$A = [a_{ij}] \text{ where } a_{ij} \equiv P(q_{t+1} = S_j \mid q_t = S_i)$$

- احتمال مشاهده

$$B = [b_j(m)] \text{ where } b_j(m) = P(O_t = v_m \mid q_t = S_j)$$

- احتمالات حالات اولیه:

$$\Pi = [\pi_i] \text{ where } \pi_i \equiv P(q_1 = S_i)$$

بنابراین یک مدل مارکوف پنهان را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\lambda = (A, B, \Pi)$$

سه مسأله‌ی پایه مرتبط با HMM

۱

سکار آمد

ارزیابی: تعیین احتمال رخداد یک دنباله از مشاهدات

Evaluation

$$\boxed{P(O \mid \lambda) = ?}$$

۲

State sequence

تعیین محتمل‌ترین حالت یک دنباله از مشاهدات

$$\boxed{P(Q^* \mid O, \lambda) = \max_Q P(Q \mid O, \lambda)}$$

۳

Learning

یادگیری مدل

Given $X=\{O^k\}_k$, find λ^* such that

$$P(X \mid \lambda^*) = \max_\lambda P(X \mid \lambda)$$

Jack Ferguson of IDA (Institute for Defense Analysis)

$P(O \mid \lambda)=?$

مسأله‌ی ارزیابی

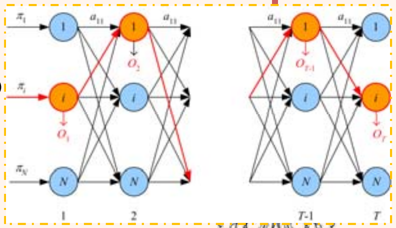
- با این فرض که دنباله‌ی زیر مشاهده شده است:

$$O = \{o_1 o_2 \dots o_T\}$$

  – اگر دنباله‌ی حالت‌ها، مشخص باشد:

$$Q = \{q_1 q_2 \dots q_T\}$$

  – احتمال رخداد این دنباله از مشاهدات در حالت‌های مشخص شده به ترتیب زیر به دست می‌آید:



$$P(O \mid Q, \lambda) = \prod_{t=1}^{T} P(o_t \mid q_t, \lambda) = b_{q_1}(o_1) b_{q_2}(o_2) \cdots b_{q_T}(o_T)$$

تنها اطلاعاتی که در این حالت داریم، خروجی سیستم است و هیچ اطلاعاتی از حالات سیستم نداریم

ادامه

مسأله‌ی ارزیابی

$P(O \mid \lambda)=?$

$$P(O\,|\,Q,\lambda)=\prod_{t=1}^{T}P(o_t\,|\,q_t,\lambda)=b_{q_1}(o_1)b_{q_2}(o_2)\cdots b_{q_T}(o_T)$$

- احتمال رخداد دنباله حالات سیستم:

$$P(Q\mid\lambda)=p(q_1)\prod_{t=2}^{T}P(q_t\,|\,q_{t-1})=\pi_{q_1}a_{q_1q_2}\ldots a_{q_{T-1}q_T}$$

- در نتیجه:

$$P(O,Q\mid\lambda)=p(q_1)\prod_{t=2}^{T}P(q_t\,|\,q_{t-1})\prod_{t=1}^{T}P(o_t\,|\,q_t,\lambda)$$
$$=\pi_{q_1}b_{q_1}(o_1)a_{q_1q_2}b_{q_2}(o_2)a_{q_2q_3}\ldots a_{q_{T-1}q_T}b_{q_T}(o_T)$$

ادامه

$P(O \mid \lambda) = ?$

مسأله‌ی ارزیابی

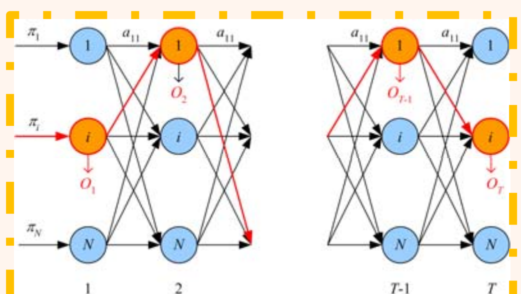
$$P(O,Q \mid \lambda) = \pi_{q_1} b_{q_1}(o_1) a_{q_1 q_2} b_{q2}(o_2) a_{q_2 q_3} \ldots a_{q_{T-1} q_T} b_{q_T}(o_T)$$

- با در اختیار داشتن رابطه‌ی فوق و محاسبه‌ی تابع احتمال حاشیه‌ای O خواهیم داشت:

$$P(O \mid \lambda) = \sum_{all \;\; possible \;\; Q} P(O,Q \mid \lambda)$$

$O(2TN^T)$

- که البته این شیوه عملی نیست!
  - چرا که N^T شیوه‌ی مختلف برای حالت‌ها وجود دارد.



$$P(O \mid \lambda) = ?$$

مسأله‌ی ارزیابی

Forward backward Procedure

Forward variable

$$\alpha_t(i) \equiv P(O_1 \cdots O_t, q_t = S_i | \lambda)$$

$$\beta_t(i) \equiv P(O_{t+1} \cdots O_T | q_t = S_i, \lambda)$$

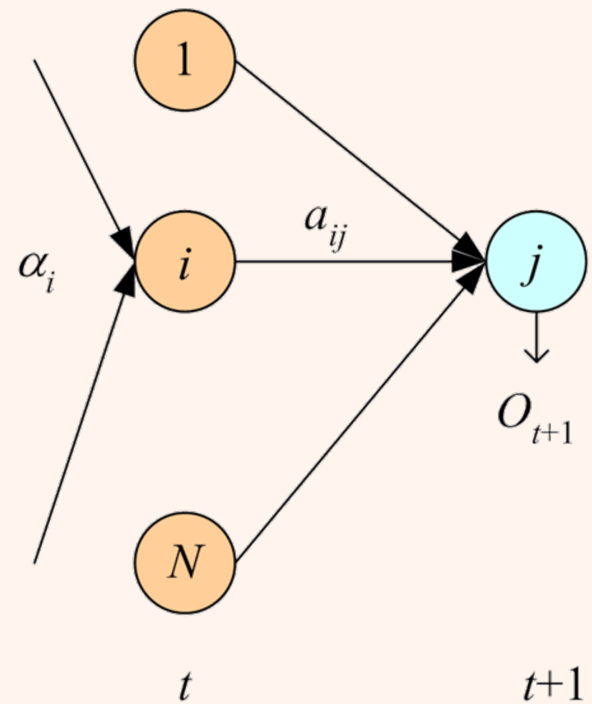
Backward variable

1)Initialization:

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(O_1)$$

2)Induction(Recursion):

$$\alpha_{t+1}(j) = \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i) a_{ij}\right] b_j(O_{t+1})$$



3)Termination :

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$$

$O(N^2T)$

Forward backward Procedure

ریز محاسبات

$$\alpha_{t+1}(j) = P(o_1 \ldots o_{t+1}, q_{t+1} = S_j \mid \lambda)$$

$$= P(o_1 \ldots o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, \lambda) P(q_{t+1} = S_j \mid \lambda)$$

$$= P(o_1 \ldots o_t \mid q_{t+1} = S_j, \lambda) P(o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, \lambda) P(q_{t+1} = S_j \mid \lambda)$$

$$= P(o_1 \ldots o_t, q_{t+1} = S_j \mid \lambda) P(o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, \lambda)$$

$$= P(o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, \lambda) \sum_i P(o_1 \ldots o_t, q_t = S_i, q_{t+1} = S_j \mid \lambda)$$

$$= P(o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, \lambda) \sum_i P(o_1 \ldots o_t, q_{t+1} = S_j \mid q_t = S_i, \lambda) P(q_t = S_i \mid \lambda)$$

$$= P(o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, \lambda) \sum_i P(o_1 \ldots o_t \mid q_t = S_i, \lambda) P(q_{t+1} = S_j \mid q_t = S_i, \lambda) P(q_t = S_i \mid \lambda)$$

$$= P(o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, \lambda) \sum_i P(o_1 \ldots o_t, q_t = S_i \mid \lambda) P(q_{t+1} = S_j \mid q_t = S_i, \lambda)$$

$$= P(o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, \lambda) \sum_i \alpha_t(i) P(q_{t+1} = S_j \mid q_t = S_i, \lambda)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i) a_{ij} \right] b_j(O_{t+1})$$

Backward variable

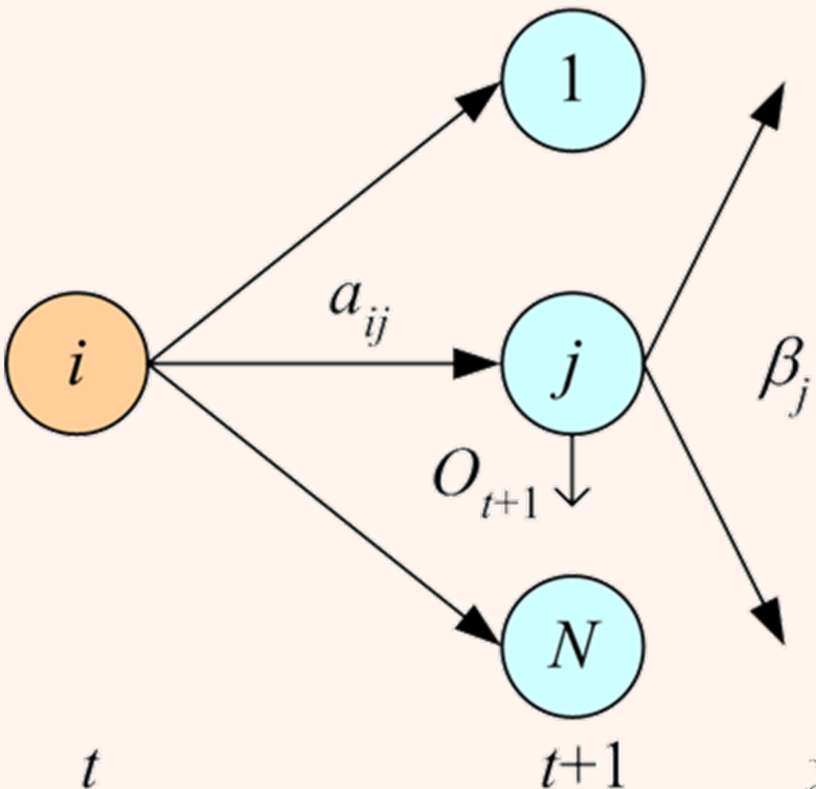
$$\beta_t(i) \equiv P(O_{t+1} \cdots O_T | q_t = S_i, \lambda)$$

1) Initialization:

$$\beta_T(i) = 1$$

2) Recursion:

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$



نکته: هر دو متغیر محصول ضرب اعداد بسیار کوچکی هستند و امکان پاریز آن‌ها وجود دارد، برای پرهیز از این مشکل توصیه می‌شود در هر مرحله نتایج نرمال شوند.

$$c_t = \sum_j \alpha_t(j)$$

Backward variable

ریز محاسبات

$$\beta_t(i) \equiv P(o_{t+1} \dots o_T \mid q_t = S_i, \lambda)$$

$$= \sum_j P(o_{t+1} \dots o_T, q_{t+1} = S_j \mid q_t = S_i, \lambda)$$

$$= \sum_j P(o_{t+1} \dots o_T \mid q_{t+1} = S_j, q_t = S_i, \lambda) P(q_{t+1} = S_j \mid q_t = S_i, \lambda)$$

$$= \sum_j P(o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, q_t = S_i, \lambda)$$

$$P(o_{t+2} \dots o_T \mid q_{t+1} = S_j, q_t = S_i, \lambda) P(q_{t+1} = S_j \mid q_t = S_i, \lambda)$$

$$= \sum_j P(o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, \lambda)$$

$$P(o_{t+2} \dots o_T \mid q_{t+1} = S_j, \lambda) P(q_{t+1} = S_j \mid q_t = S_i, \lambda)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)$$

$P(Q^* \mid O, \lambda) = \max_Q P(Q \mid O, \lambda)$

یافتن دنباله‌ی حالات

- با در اختیار داشتن خصوصیات یک مدل مارکوف پنهان λ و یک دنباله از مشاهدات،

$$O = \{o_1 o_2 \ldots o_T\}$$

- در پی دنباله‌ای از حالت‌ها هستیم که با بیشترین احتمال دنباله‌ی مشاهدات مورد نظر را تولید کند:

$$Q = \{q_1 q_2 \ldots q_T\}$$

- یک راه محاسبه‌ی تمام حالات ممکن و انتخاب مسیر با بیشترین احتمال است!

$P(Q^* \mid O, \lambda) = \max_Q P(Q \mid O, \lambda)$

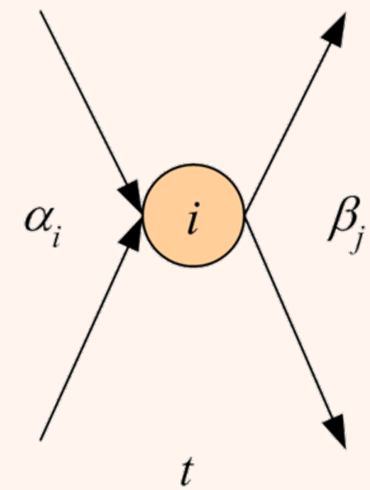
یافتن دنباله‌ی حالات

$$\boxed{\gamma_t(i) \equiv P\left(q_t = S_i \middle| O, \lambda\right)}$$

$$= \frac{P(O|q_t=S_i,\lambda)P(q_t=S_i|\lambda)}{P(O|\lambda)}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{\alpha_t(i)\,\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j)\,\beta_t(j)}$$



در هر گام (t) حالتی انتخاب می‌شود که بیشترین احتمال را داشته باشد

$q_t^* = \arg\max_i \gamma_t(i)$

ریز محاسبات

$$\gamma_t(i) \equiv P(q_t = S_i \mid O, \lambda) \qquad \textit{Bayse theorem}$$

$$= \frac{P(O \mid q_t = S_i, \lambda) P(q_t = S_i \mid \lambda)}{P(O \mid \lambda)}$$

$$= \frac{P(o_1 \ldots o_t \mid q_t = S_i, \lambda) P(o_{t+1} \ldots o_T \mid q_t = S_i, \lambda) P(q_t = S_i \mid \lambda)}{\sum_{j=1}^{N} P(O, q_t = S_j \mid \lambda)}$$

$$= \frac{P(o_1 \ldots o_t, q_t = S_i \mid \lambda) P(o_{t+1} \ldots o_T \mid q_t = S_i, \lambda)}{\sum_{j=1}^{N} P(O \mid q_t = S_j, \lambda) P(q_t = S_j)}$$

$$= \frac{\alpha_t(i) \beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N} \alpha_t(j) \beta_t(j)}$$

Viterbi's Algorithm

$P(Q^* \mid O, \lambda) = \max_Q P(Q \mid O, \lambda)$`

$$\delta_t(i) \equiv \max_{q_1 q_2 \ldots q_{t-1}} P(q_1 q_2 \ldots q_{t-1}, q_t = S_i, o_1 \ldots o_t \mid \lambda)$$

1) initialization :

مقداردهی اولیه

$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(o_1)$$

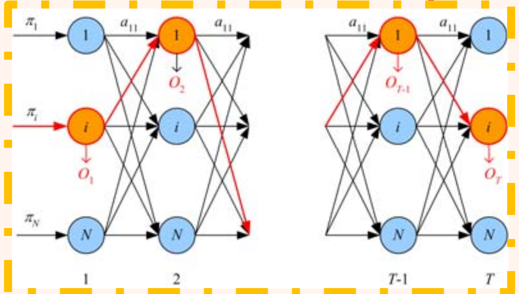
$$\psi_1(i) = 0$$

بازگشتی

2) induction :

$$\delta_t(j) = \max_i \left[\delta_{t-1}(i) a_{ij}\right] . b_j(o_t)$$

$$\psi_t(i) = \arg \max_i \left[\delta_{t-1}(i) a_{ij}\right]$$



خاتمه

3) Termination :

$$p^* = \max_i \delta_T(i)$$

$$q_T^* = \arg \max_i \delta_T(i)$$

•برگشت مسیر:(دنباله‌ی حالت‌ها)

4) Path backtracking :

$$q_t^* = \psi_{t+1}(q_{t+1}^*), \quad t = T\text{-}1, T\text{-}2, \ldots, 1$$

Given $X=\{O^k\}_k$, find λ^* such that $P(X|\lambda^*)=\max_\lambda P(X|\lambda)$

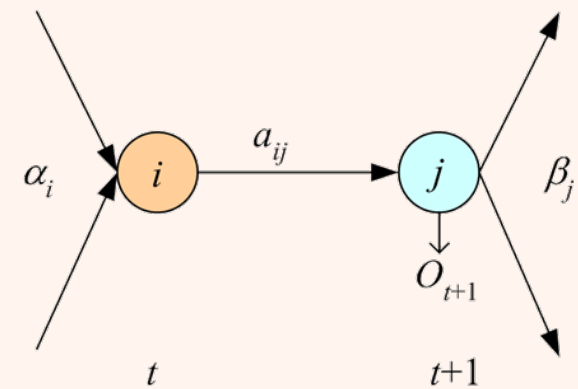
یادگیری

Learning

- هدف این است که با در اختیار داشتن یک مجموعه‌ی آموزشی از مشاهدات $\mathcal{X}=\{O^k\}_{k=1}^{K}$ پارامترهای مدل $\lambda^*=(A,B,\Pi)$ به گونه‌ای برآورد شوند که تابع درست‌نمایی $P(\mathcal{X}|\lambda^*)$ بیشینه شود.
- راه حل تحلیلی برای این مساله وجود ندارد.
  - از یک فرآیند تکرار شونده استفاده می‌شود:

Baum-Welch algorithm

$$\boxed{\xi_t(i,j)\equiv P\left(q_t=S_i, q_{t+1}=S_j|O,\lambda\right)}$$



ریزمحاسبات

$$\xi_t(i,j) \equiv P(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j \mid O, \lambda)$$

$$= \frac{P(O \mid q_t = S_i, q_{t+1} = S_j, \lambda) P(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j \mid \lambda)}{P(O \mid \lambda)}$$

$$= \frac{P(O \mid q_t = S_i, q_{t+1} = S_j, \lambda) P(q_{t+1} = S_j \mid q_t = S_i, \lambda) P(q_t = S_i \mid \lambda)}{P(O \mid \lambda)}$$

$$= \frac{1}{P(O \mid \lambda)} P(o_1 \dots o_t \mid q_t = S_i, \lambda) P(o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, \lambda)$$

$$P(o_{t+2} \dots o_T \mid q_{t+1} = S_j, \lambda) a_{ij} P(q_t = S_i \mid \lambda)$$

$$= \frac{1}{P(O \mid \lambda)} P(o_1 \dots o_t, q_t = S_i \mid \lambda) P(o_{t+1} \mid q_{t+1} = S_j, \lambda)$$

$$P(o_{t+2} \dots o_T \mid q_{t+1} = S_j, \lambda) a_{ij}$$

$$= \frac{\alpha_t(i) b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j) a_{ij}}{\sum_k \sum_l \alpha_t(k) a_{kl} b_l(o_{t+1}) \beta_{t+1}(l)}$$

$$= \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{\sum_k \sum_l \alpha_t(k) a_{kl} b_l(o_{t+1}) \beta_{t+1}(l)}$$

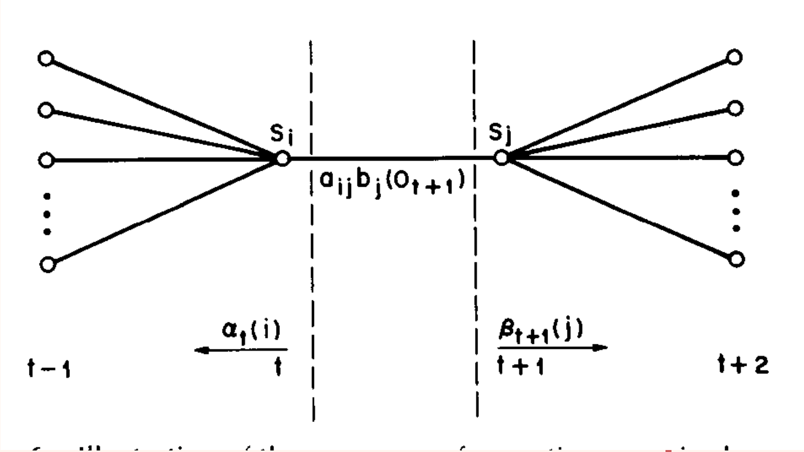
Given X={O^k}$_k$, find λ^* such that
$P(X \mid \lambda^*) = \max_\lambda P(X \mid \lambda)$

یادگیری (ادامه...)

Baum-Welch algorithm

$$\xi_t(i,j) \equiv P\left(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j \mid O, \lambda\right)$$

$$= \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(O_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{\sum_k \sum_l \alpha_t(k) a_{kl} b_l(O_{t+1}) \beta_{t+1}(l)}$$



- می‌توان احتمال حضور در یک حالت را محاسبه کرد:

$$\gamma_t(i) \equiv P\left(q_t = S_i \mid O, \lambda\right) \qquad \gamma_t(i) = \sum_{j=1}^{N} \xi_t(i,j)$$

- در صورتی که مدل مارکوف قابل مشاهده باشد،
  - هر کدام از مقادیر γ و ξ صفر و یک خواهند بود.

یادگیری(ادامه...)

Given $X=\{O^k\}_k$, find λ^* such that $P(X \mid \lambda^*)=\max_\lambda P(X \mid \lambda)$

$$\gamma_t(i) \equiv P\left(q_t = S_i \mid O, \lambda\right)$$

$$\xi_t(i,j) \equiv P\left(q_t = S_i, q_{t+1} = S_j \mid O, \lambda\right)$$

$$\hat{\pi}_i = \frac{\#\{\text{sequences starting with } S_i\}}{\#\{\text{sequences}\}} = \frac{\sum_k 1\left(q_1^k = S_i\right)}{K}$$

$$\hat{a}_{ij} = \frac{\#\{\text{transitions from } S_i \text{ to } S_j\}}{\#\{\text{transitions from } S_i\}}$$

$$= \frac{\sum_k \sum_{t=1}^{T-1} 1\left(q_t^k = S_i \text{ and } q_{t+1}^k = S_j\right)}{\sum_k \sum_{t=1}^{T-1} 1\left(q_t^k = S_i\right)}$$

Baum-Welch algorithm(EM)

$$z_i^t = \begin{cases} 1 & \text{if } q_t = S_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad z_{ij}^t = \begin{cases} 1 & \text{if } q_t = S_i \text{ and } q_{t+1} = S_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$E\left[z_i^t\right] = \gamma_t(i) \qquad E\left[z_{ij}^t\right] = \xi_t(i,j)$$

Baum-Welch algorithm

E-Step

- در گام ۱، با پارامترهای با مقدار فعلی پارامترهای مدل مقادیر γ و ξ تخمین زده می‌شوند.

M-Step

- بر اساس تخمین زده شده، پارامترهای مدل به روز می‌شوند.

$$\hat{\pi}_i = \frac{\sum_{k=1}^{K} \boxed{\gamma_1^k(i)}}{K} \qquad \hat{a}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T_k-1} \boxed{\xi_t^k(i,j)}}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T_k-1} \boxed{\gamma_t^k(i)}}$$

Soft count

$$\hat{b}_j(m) = \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T_k-1} \boxed{\gamma_t^k(j)} 1\left(O_t^k = v_m\right)}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{t=1}^{T_k-1} \boxed{\gamma_t^k(i)}}$$

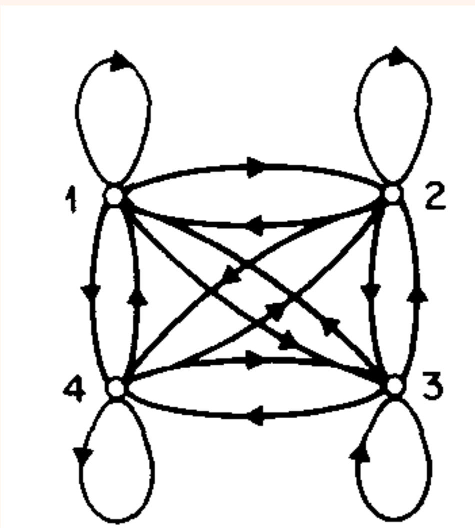
این روند تا همگرایی ادامه خواهد یافت، ثابت شده است که p(O|λ) نزولی خواهد بود.

یادگیری- چند نکته

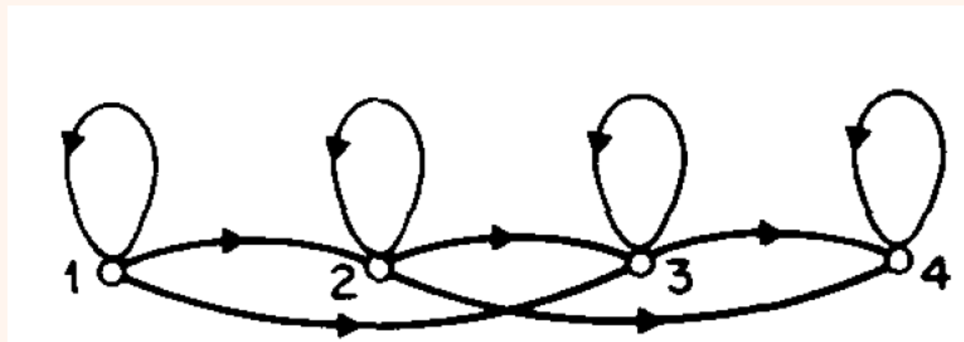
- این الگوریتم، ماکزیمم محلی را می‌یابد و در عمل رویه‌ی هدف(maximization surface) شکل پیچیده‌ای دارد و دارای تعداد زیادی ماکزیمم محلی است.
- نظر به این که کلیت مسأله‌ی آموزش به نوعی یک مسأله‌ی بهینه‌سازی است و از تکنیک‌های نظیر نزول گرادیان برای حل این مسأله می‌توان بهره جست.

Model Selection in HMM

- در برخی کاربردها مانند تشخیص گفتار استفاده از مدل‌های خاصی توصیه می‌شود.



Ergodic model



Left to right HMMs(Bakis Model)

$$a_{ij} = 0 \quad i < j$$

$$a_{ij} = 0 \quad j < i + \Delta$$

$$\pi_i = \begin{cases} 0, & i \neq 1 \\ 1, & 1 = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

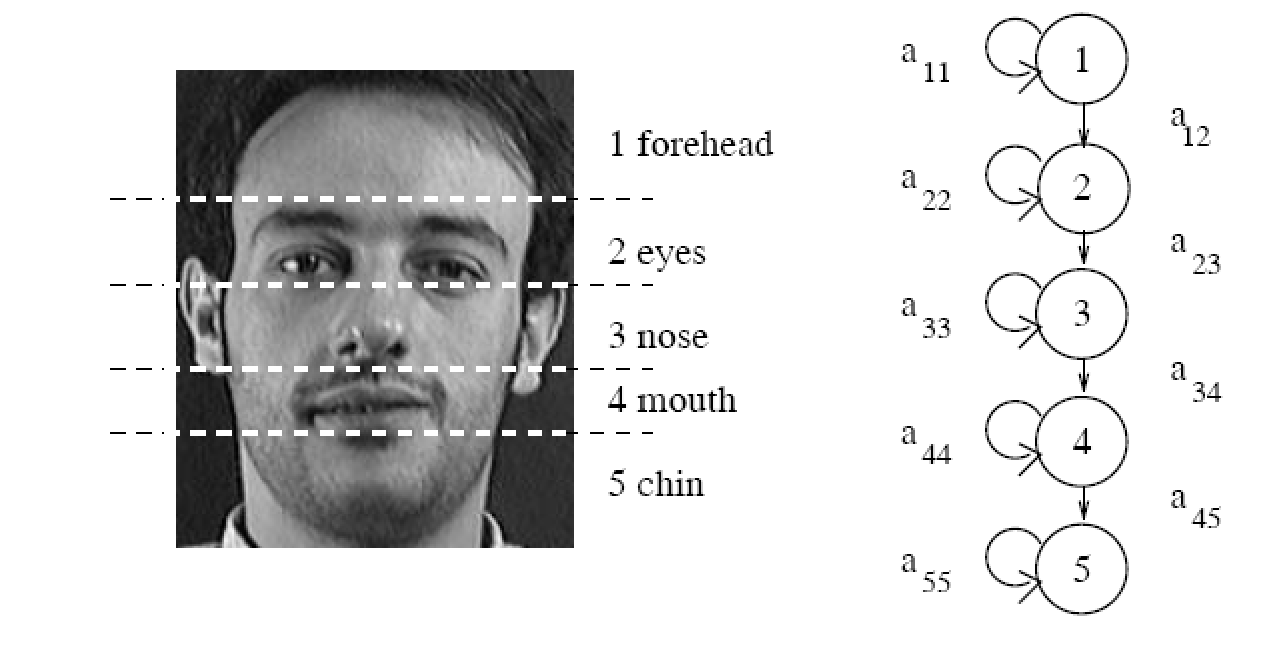
دسته‌بندی

- یک مجموعه از HMMها خواهیم داشت که هر یک، دنباله‌های مربوط به یک دسته را مدل می‌کنند.
  - مثلاً در بازشناخت کلمات ادا شده به ازای هر کلمه، یک HMM جداگانه آموزش داده می‌شود.
  - با ارائه‌ی یک کلمه‌ی جدید برای شناسایی، تمام مدل‌های موجود مورد ارزیابی قرار می‌گیرند و مقدار محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از قانون بیز خواهیم داشت:

$$P(\lambda_i | O) = \frac{P(O | \lambda_i) P(\lambda_i)}{\sum_j P(O | \lambda_j) P(\lambda_j)}$$

  - مدلی که درای بیشترین احتمال $P(\lambda_i | O)$ باشد به عنوان دسته‌ی شناسایی شده معرفی می‌گردد.

مثال- شناسایی چهره



Ferdinando Silvestro Samaria, "Face Recognition Using Hidden Markov Model", 1994

سایر منابع

- Rabiner, L. R. (1989). "A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition." Proceedings of the IEEE **77(2): 257-286.**