Machine Learning

SVM

یادگیری ماشین
(۱۳-۱۱-۸۰۵-۰۱)
فصل سیزدهم

دانشگاه شهید بهشتی

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

پاییز ۱۳۹۳

احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

- SVM
  - تاریخچه
  - معرفی
  - داده‌های جدایی‌پذیر خطی
- Soft Margin
- مجموعه‌های جدایی‌ناپذیر خطی
  - نگاشت به فضایی با ابعاد بالا
  - Inner product kernel
- مثال XOR
- SVM در Matlab

تاریخچه

- نسخه‌ی اولیه‌ی SVM توسط آقای Vladimir Vapnik ارائه شد.
- Vapnik با همکاری خانم Corinna Cortes استاندارد کنونی SVM را در سال ۱۹۹۳ پایه‌ریزی کرده و در سال ۱۹۹۵ منتشر نمودند.

Cortes, C. and V. Vapnik (1995). "Support-vector networks." Machine Learning 20(3): 273-297.

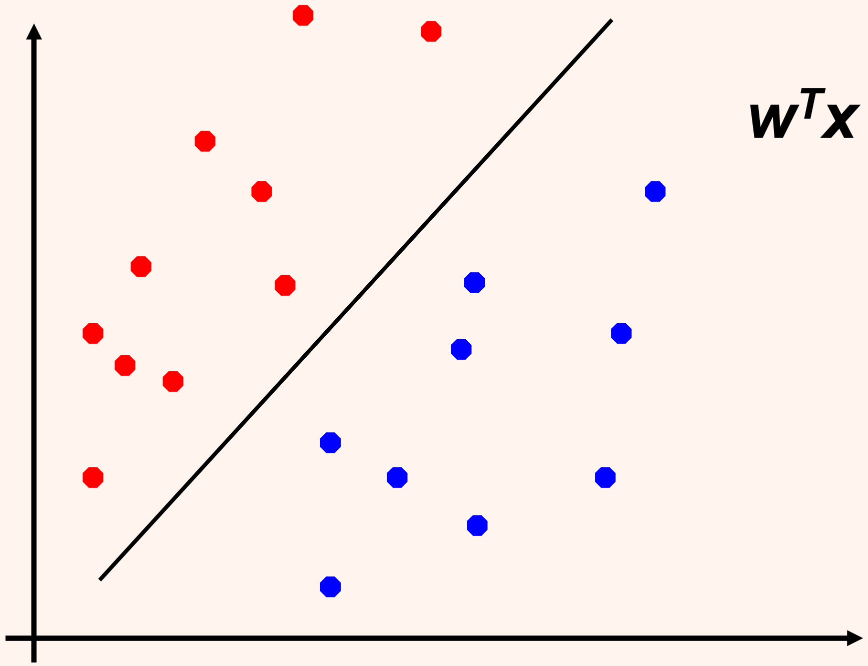
معرفی

- یک جداکننده‌ی خطی را می‌توان همانند شکل زیر در نظر گرفت.

$w^Tx + b > 0$

$w^Tx + b = 0$

$w^Tx + b < 0$

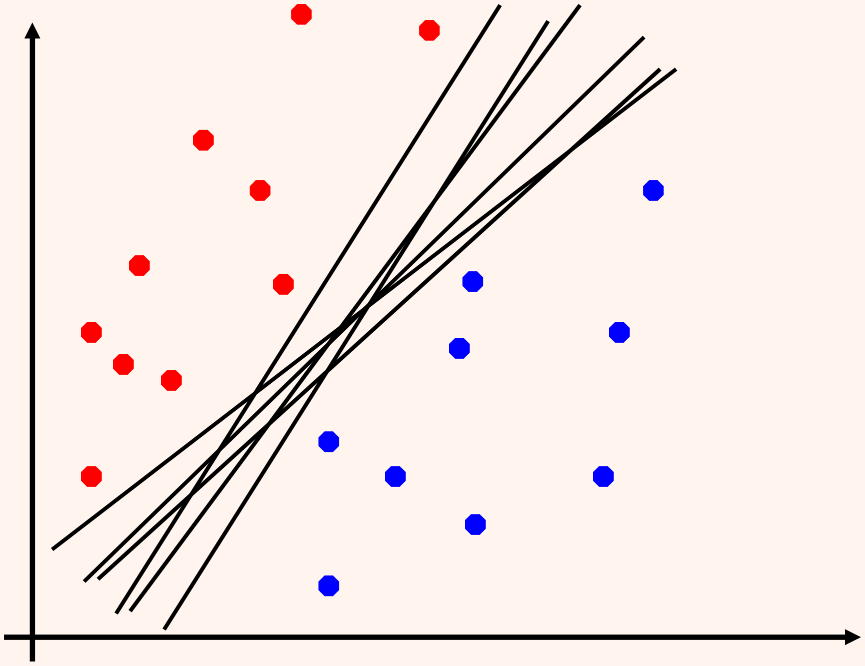


$$f(x) = sign(w^Tx + b)$$

www.cs.utexas.edu/~mooney/cs391L/slides/svm.ppt

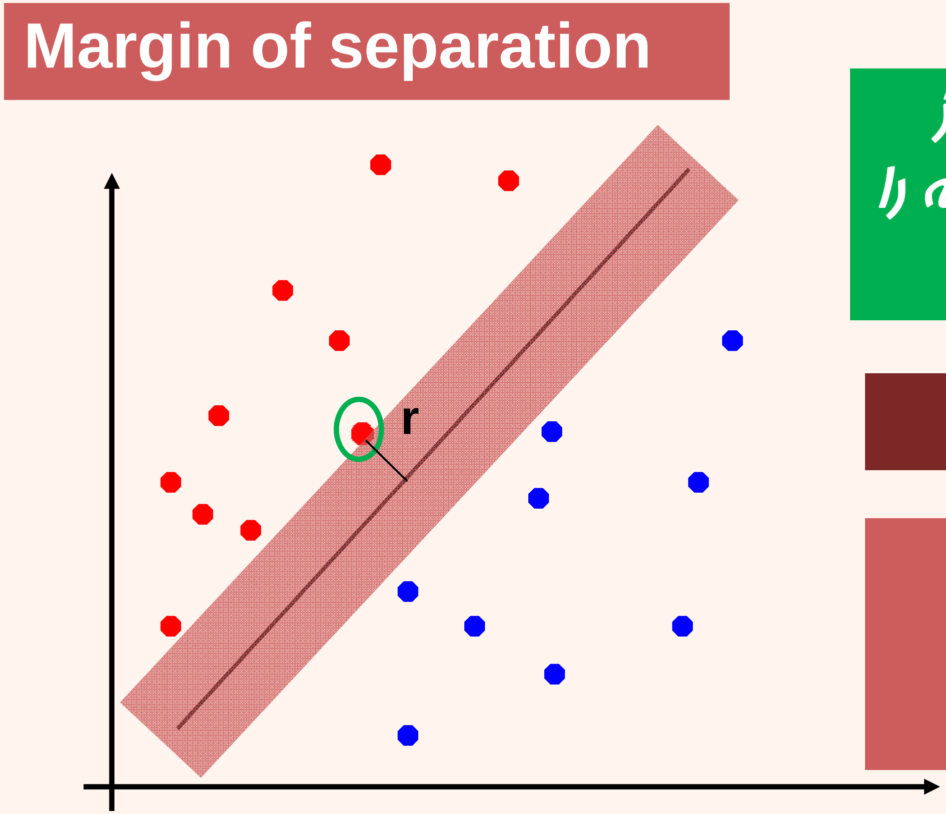
مرز بهینه

- سوال
  - کدام یک از مرزها، مرزی بهینه برای جداسازی است؟



مرز جداسازی

- می‌خواهیم به گونه‌ای بهترین مرز جداسازی را به‌دست آوریم.



فرض کنیم نزدیک‌ترین نقطه به مرز جداسازی در نظر گرفته شده و فاصله را r بنامیم.

هدف ماکزیمم نمودن r است.

یک حاشیه مشخص می‌کنیم هر مرزی که حاشیه‌ی پهن‌تری را نتیجه دهد، بهتر است.

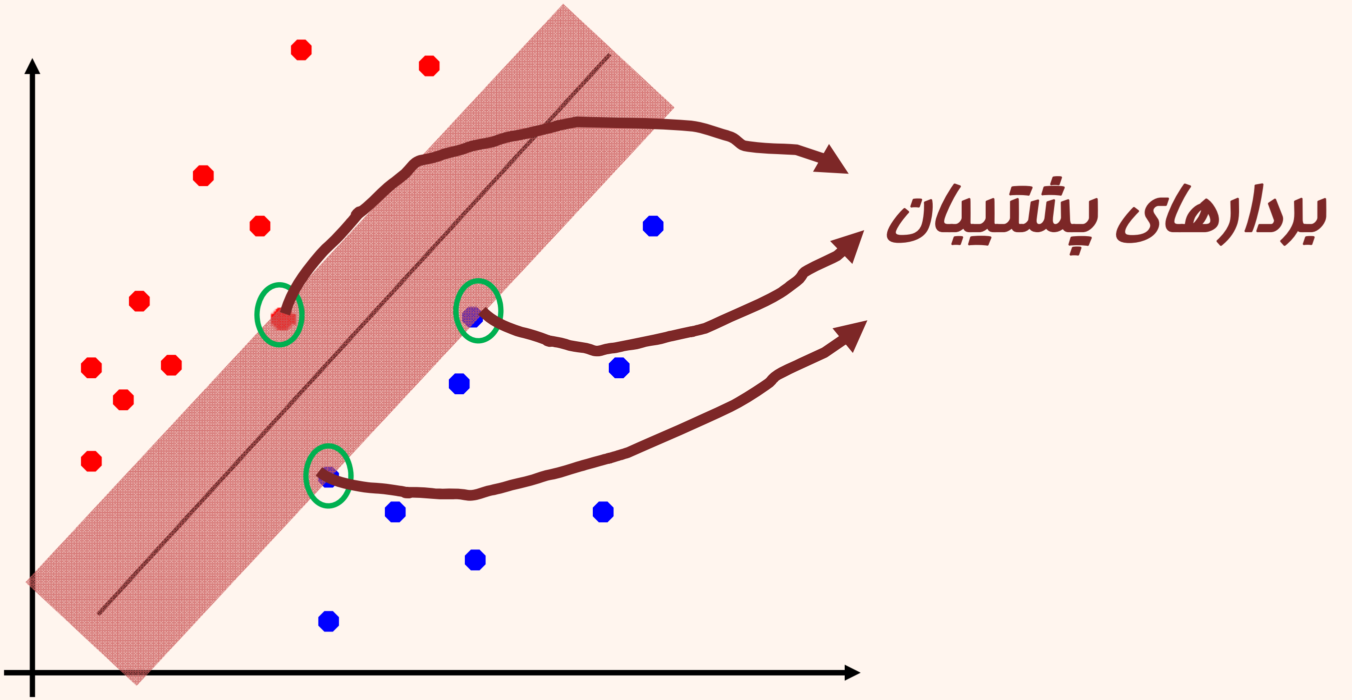
حاشیه‌ی ماکزیمم

- ماکزیمم نمودن حاشیه (Margin) ایده‌ی خوبی است جهت جداسازی خطی، این شیوه را LSVM یا Linear SVM می‌نامند.
- در این حالت نمونه‌هایی که به روی مرز هستند، از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند.
- بدین‌وسیله می‌توان از نمونه‌های دیگر صرفنظر کرد و تنها به نمونه‌های مهم روی مرز پرداخت.

بردار پشتیبان

Support Vector

- به نمونه‌های روی مرز «بردار پشتیبان» گویند.



Optimal hyperplane

مرز جداسازی

- برای معادله‌ی مرز جداسازی داشتیم:

$$\mathbf{W}^T \mathbf{X} + b = 0$$

$$(\mathbf{x}_i, d_i = +1) \qquad \mathbf{W}^T \mathbf{x}_i + b > 0$$

$$(\mathbf{x}_i, d_i = -1) \qquad \mathbf{W}^T \mathbf{x}_i + b < 0$$

- فرض کنیم مرز بهینه توسط $\mathbf{W}_{op}$ و b_{op} مشخص شود.
- فرض: فرض کنیم نزدیک‌ترین نقطه به مرز جداسازی را در نظر گرفته، فاصله را «**r**» بنامیم.

مرز جداسازی (ادامه...)

- هدف
  - ماکزیمم نمودن فاصله یا همان **ρ** است
  - برای نقاط روی مرز جداسازی بهینه داریم:

$$\mathbf{W}_{op}{}^{T}\mathbf{X}+b_{op}=0$$

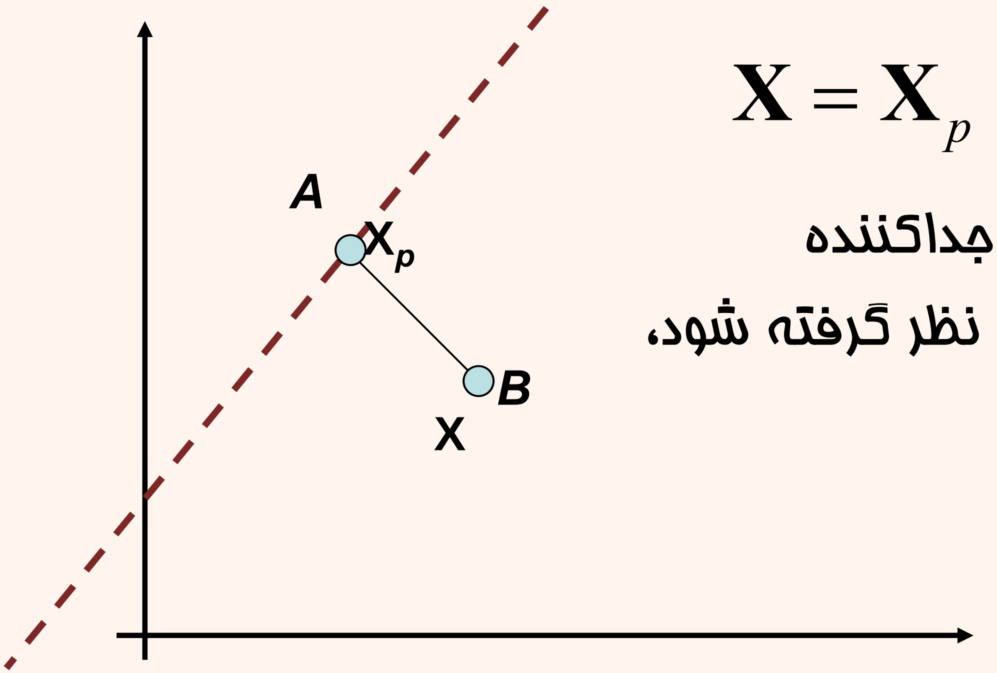
  - برای نقاط خارج از مرز داریم:

$$g(\mathbf{X})=\mathbf{W}_{op}{}^{T}\mathbf{X}+b_{op}$$

  - g(x) می‌تواند مثبت یا منفی باشد.

مرز جداسازی (ادامه...)

- در صورتی که X بردار پشتیبان باشد، طبق شکل زیر خواهیم داشت:



$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_p + \overrightarrow{\mathbf{AB}}$$

- AB در جهت عمود بر مرز جداکننده
- اگر اندازه‌ی بردار AB=r در نظر گرفته شود، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = r\frac{\mathbf{W}_{op}}{\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_p + r\frac{\mathbf{W}_{op}}{\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|}$$

مرز جداسازی (ادامه...)

- داشتیم:

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{W}_{op}{}^{T}\mathbf{X} + b_{op}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_p + r\frac{\mathbf{W}_{op}}{\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|}$$

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{W}_{op}^{T}[\mathbf{X}_p + r\frac{\mathbf{W}_{op}}{\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|}] + b_{op}$$

$$g(\mathbf{X}) = \underbrace{\mathbf{W}_{op}^{T}\mathbf{X}_p + b_{op}}_{\text{روی مرز پس برابر با صفر}} + r\frac{\mathbf{W}_{op}}{\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|}\mathbf{W}_{op}^{T}$$

$$g(\mathbf{X}) = r\frac{\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|^{2}}{\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|}$$

$$\boxed{g(\mathbf{X}) = r\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|}$$

مرز جداسازی (ادامه...)

$$g(\mathbf{X}) = r\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|$$

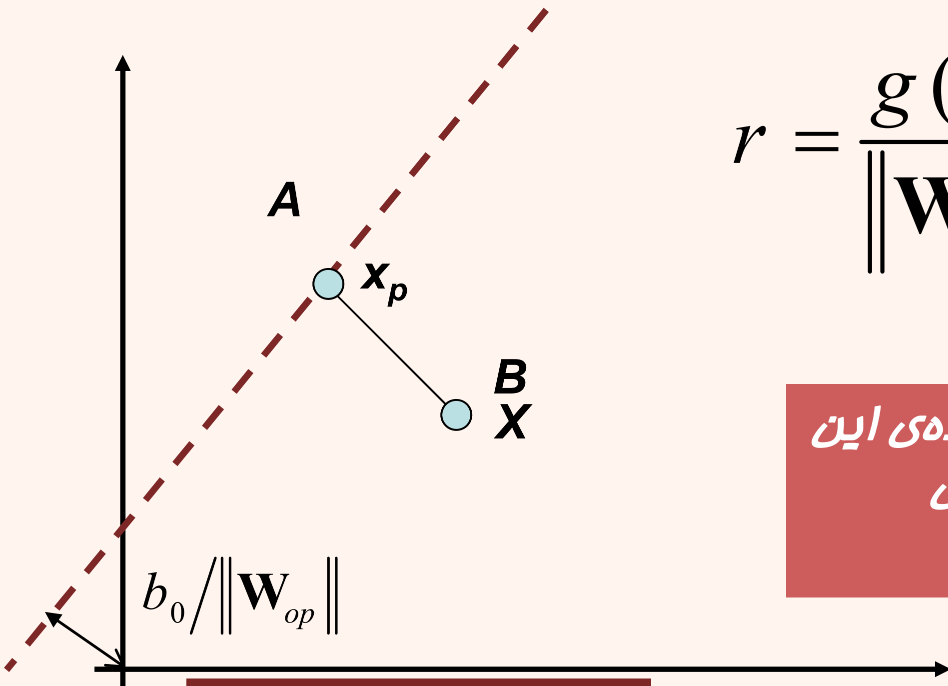
هدف ماکزیمم نمودن r است.

$$r = \frac{g(\mathbf{x})}{\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|}$$

در این حالت تحت شرایطی می‌باید W کمینه گردد.

X=0

$$r = \frac{g(\mathbf{X})}{\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|} = \frac{b_{op}}{\left\|\mathbf{W}_{op}\right\|}$$



فاصله از مبدا مختصات

مثبت یا منفی بودن bop نشان دهنده‌ی این است که مبدأ در کدام سمت خط مرزی هستیم.

مرز جداسازی (ادامه...)

مسئله یافتن W_{op} و b_{op} است

- جداساز خطی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(\mathbf{X}_i, +1) \quad \mathbf{W}_{op}{}^T \mathbf{X}_i + b_{op} \geq 1 \quad \text{for } \mathrm{d_i} = +1$$

$$(\mathbf{X}_i, -1) \quad \mathbf{W}_{op}{}^T \mathbf{X}_i + b_{op} \leq -1 \quad \text{for } \mathrm{d_i} = -1$$

به صورت کلی داریم:

$$d_i (\mathbf{W}_{op}{}^T \mathbf{X} + b_{op}) \geq 1$$

- رابطه‌ی بالا برای تمامی الگوهای آموزشی برقرار است.
- و در نتیجه برای بردارهای پشتیبان

$$g(\mathbf{X}_s) = \mathbf{W}_{op}{}^T \mathbf{X}_s + b_{op} = \pm 1$$

مرز جداسازی (ادامه...)

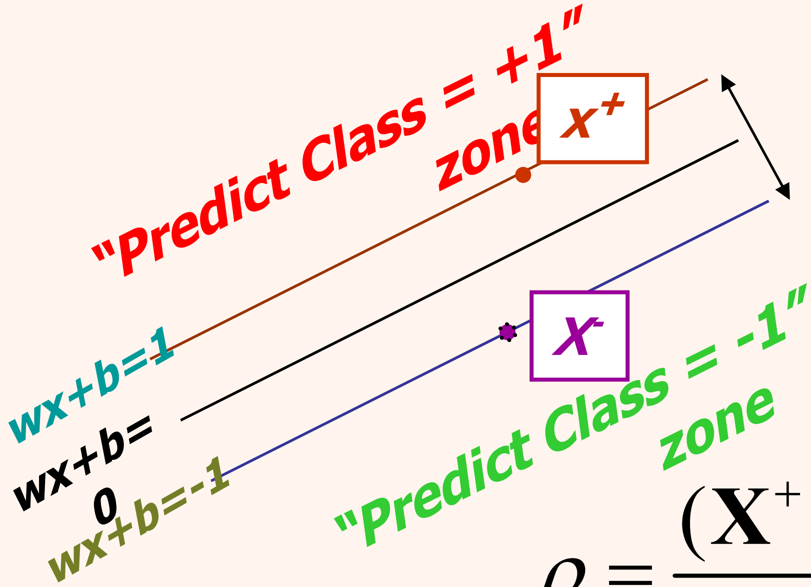
$$g(\mathbf{X}_s) = \mathbf{W}_{op}{}^T \mathbf{X}_s + b_{op} = \pm 1$$

$$r = \frac{g(\mathbf{X}_s)}{\left\| W_{op} \right\|} = \begin{cases} \dfrac{1}{\left\| \mathbf{W}_{op} \right\|} \\ -\dfrac{1}{\left\| \mathbf{W}_{op} \right\|} \end{cases}$$

- در نتیجه فاصله‌ی دو بردار پشتیبان در دو طرف مرز:

$$\rho = 2r = \frac{2}{\left\| \mathbf{W}_{op} \right\|}$$

جدایی‌پذیر خطی



M=Margin Width

$$\rho = \frac{(\mathbf{X}^{+} - \mathbf{X}^{-}) \cdot \mathbf{W}}{\|\mathbf{W}\|} = \frac{2}{\|\mathbf{W}\|}$$

می‌دانیم:

- $\mathbf{W} \,.\, \mathbf{X}^{+} + b = +1$
- $\mathbf{W} \,.\, \mathbf{X}^{-} + b = -1$
- $\mathbf{W} \,.\, (\mathbf{X}^{+} - \mathbf{X}^{-}) = 2$

جدایی‌پذیر خطی

$$\rho = 2r = \frac{\|\pm 2\|}{\|\mathbf{W}_{op}\|}$$

$$d_i(\mathbf{W}_{op}{}^T\mathbf{X} + b_{op}) \geq 1$$

- با توجه به دو رابطه‌ی
- به این نتیجه می‌رسیم که $\mathbf{W}_{\mathrm{op}}$ می‌باید مینیمم گردد.
- این مسأله معادل مینیمم کردن

$$\Phi(\mathbf{W}) = \frac{1}{2}\mathbf{W}^T\mathbf{W}$$

  - Φ یک تابع محدب (Convex Function) است.
  - طبق رابطه‌ی $d_i(\mathbf{W}_{op}{}^T\mathbf{X} + b_{op}) \geq 1$ برای N الگوی آموزشی شرط زیر می‌باید برقرار باشد:

$$\sum_{i=1}^{N}[d_i(\mathbf{W}_{op}{}^T\mathbf{X} + b_{op}) - 1]$$

این میزان بزرگتر یا مساوی صفر است

خلاصه

وزن‌ها و بایاس را به گونه‌ای بیابید که:

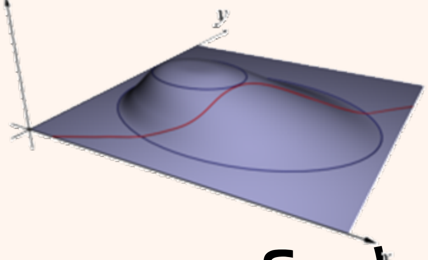
$$\rho = \frac{2}{\|\mathbf{w}\|} \text{ is maximized}$$

and for all $(\mathbf{X}_i, y_i)$, $i=1..n$: $y_i(W^T X_i + b) \ge 1$

وزن‌ها و بایاس را به گونه‌ای بیابید که:

$\Phi(\mathbf{W}) = 1/2\ ||\mathbf{W}||^2 = 1/2\mathbf{W}^T\mathbf{W}$ is minimized

and for all $(\mathbf{X}_i, y_i)$, $i=1..n$: $y_i(\mathbf{W}^T\mathbf{X}_i + b) \ge 1$



جدایی‌پذیر خطی

- رابطه‌ی لاگرانژ زیر تعریف می‌شود به گونه‌ای که هر دو قید ذکر شده را پوشش دهد:

$$j(\mathbf{W},b,\alpha)=\frac{1}{2}\mathbf{W}^T\mathbf{W}-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\left[d_i(\mathbf{W}^T\mathbf{X}_i+b)-1\right]$$

Lagrange multiplier(nonnegative)

- برای به‌دست آوردن $\mathbf{W}_{op}$ و b_{op} نسبت به هر دو مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial j}{\partial \mathbf{W}}=0\Rightarrow \mathbf{W}-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i\mathbf{X}_i=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathbf{W}_{op}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i\mathbf{X}_i}$$

$$\frac{\partial j}{\partial b}=0\Rightarrow -\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i=0}$$

b_{op} به‌دست نمی‌آید

یک قید می‌دهد

جدایی‌پذیر خطی

- دو شرط برای α خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i = 0 \\ \underbrace{\alpha_i}_{\text{غیر صفر}}\underbrace{[d_i(\mathbf{W}^T\mathbf{X}_i+b)-1]}_{\text{صفر}}=0 \end{cases}$$

Kuhn-Tucker condition of optimization theory

- به ازای هر α_i برای الگوهای آموزشی متناظر با SVها رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$d_i(\mathbf{W}_{op}^T\mathbf{X}_i+b_{op})-1=0$$

یافتن رویه‌ی بهینه

$$j(\mathbf{W},b,\alpha)=\frac{1}{2}\|\mathbf{W}\|^2-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i[d_i(\mathbf{W}^T\mathbf{X}_i+b)-1]$$

$$j(\mathbf{W},b,\alpha)=\frac{1}{2}\mathbf{W}^T\mathbf{W}-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i\mathbf{W}^T\mathbf{X}_i-\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i b+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

- برای مقادیر بهینه داشتیم:

$$\mathbf{W}_{op}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i\mathbf{X}_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i=0$$

Duality theorem

- پس خواهیم داشت:

$$j(\mathbf{w}_{op},b_{op},\alpha)=\frac{1}{2}\mathbf{w}_{op}^T\mathbf{w}_{op}-\mathbf{w}_{op}^T\mathbf{w}_{op}+0+\sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

Dual Problem

$$j(\mathbf{W}_{op}, b_{op}, \alpha) = \frac{1}{2}\mathbf{W}_{op}^T\mathbf{W}_{op} - \mathbf{W}_{op}^T\mathbf{W}_{op} + 0 + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i$$

$$\begin{cases} = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - \frac{1}{2}\mathbf{W}_{op}^T\mathbf{W}_{op} \quad = Q(\alpha) \\ \sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i = 0 \end{cases}$$

مینیمم نمودن W همانند ماکزیمم نمودن Q است زیرا در W_{op} مقدار W کم‌ترین میزان است و در این صورت است که کل عبارت ماکزیمم می‌شود.

یافتن رویه‌ی بهینه

$$Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} \mathbf{W}_{op}^T \mathbf{W}_{op}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} [\sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i \mathbf{X}_i]^T [\sum_{j=1}^{N} \alpha_j d_j \mathbf{X}_j]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i d_i \alpha_j d_j \mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_j$$

$$\boxed{\begin{cases} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i d_i \alpha_j d_j \mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_j \\ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i = 0 \\ \alpha_i \geq 0 \text{ for } 1=0,1,\ldots\ldots,N \end{cases}}$$

α_i ها وابسته به الگوهای X_i , X_j و خروجی های مرتبط است

یافتن رویه‌ی بهینه

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i - \frac{1}{2}[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i \mathbf{X}_i]^T [\sum_{j=1}^{N} \alpha_j d_j \mathbf{X}_j]$$

جهت محاسبه‌ی αنسبت به α_k مشتق گرفته برابر با صفر قرار می‌دهیم

$$\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_k} = 1 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} \alpha_i d_i d_k \mathbf{X}_i^T \mathbf{X}_k - \alpha_k d_k^2 \mathbf{X}_k^T \mathbf{X}_k = 0$$

N معادله و N مجهول

$$M_{i,j} = \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j$$

ضرب داخلی

$$\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_k} = 1 - d_k \sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i M_{i,k} = 0$$

یافتن رویه‌ی بهینه

$$\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_k} = 1 - d_k \sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i M_{i,k} = 0$$

• پس از به دست آوردن α خواهیم داشت:

$$w_{op} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i d_i x_i$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\text{support vector}} \Rightarrow w_{op}^T \mathbf{x}^s + b_{op} = \pm 1$$

$$\Rightarrow b_{op} = \pm 1 - \mathbf{w}_{op}^T \mathbf{x}^s$$

یافتن رویه‌ی بهینه

$\mathbf{W} = \Sigma\alpha_i y_i \mathbf{X}_i$ $\quad$ $b = y_k - \mathbf{W}^T\mathbf{X}_k$ for any $\mathbf{X}_k$ such that $\alpha_k \neq 0$

هر α_i مخالف صفر، نشان‌دهنده‌ی این است که که $\mathbf{X}_i$ متناظرش یک بردار پشتیبان است.

در این حالت تابع جداکننده همانند زیر است:

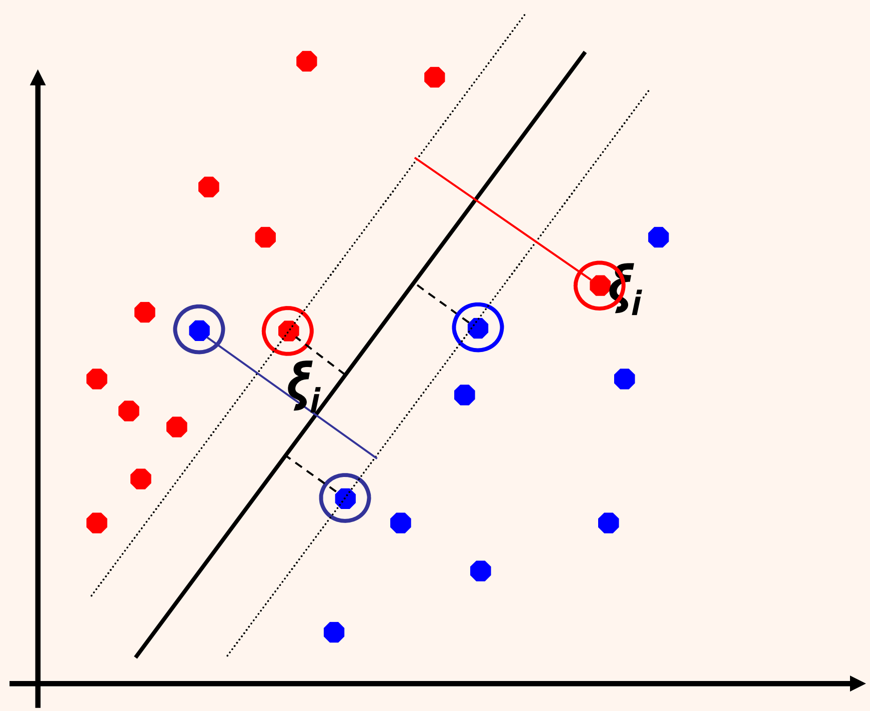
$$f(\mathbf{X}) = \Sigma\alpha_i d_i \underbrace{\mathbf{X}_i^T\mathbf{X}}_{\text{ضرب داخلی دو بردار}} + b$$

توجه:

حل مساله بهینه‌سازی وابسته به محاسبه ضرب داخلی بین تمامی نمونه‌های آموزشی است.

Soft Margin

- SVM برای داده‌های جدایی‌پذیر خطی مورد بررسی قرار گرفت.
- حال اگر مجموعه‌ی داده‌های آموزش قابلیت جداسازی را نداشته باشند، چه خواهد شد؟ به بیان بهتر صحبت در مورد مسائل جدایی‌پذیر است که با نویز همراه هستند.

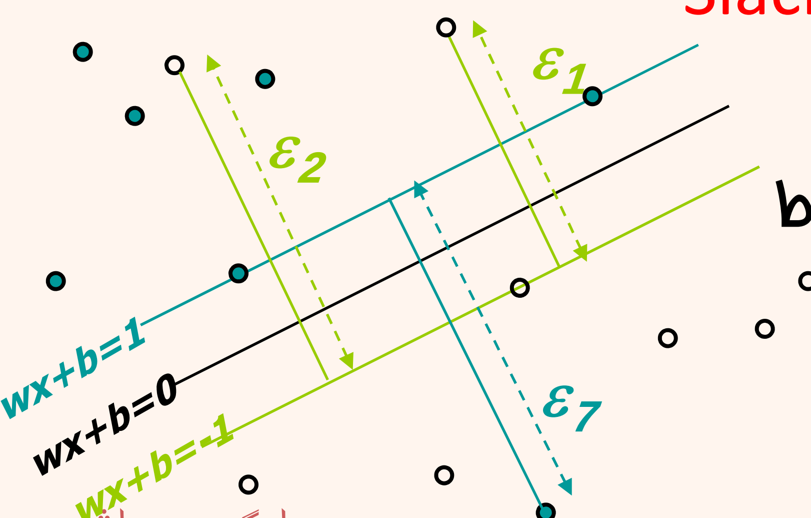


Soft Margin

- مسأله‌ی Hard Margin را تبدیل به حل مساله‌ی Soft Margin می‌شود.
- حاشیه‌ی جداسازی soft گفته می‌شود، در صورتی که برای برخی داده‌ها شرط زیر نقض شود:

$$d_i(\mathbf{W}_{op}{}^T\mathbf{X}+b_{op})\geq 1$$

- با اضافه کردن یک Slack Variable مساله را بار دیگر بررسی می‌کنیم.
- این متغیر میزان انحراف از شرط فوق را نشان می‌دهد.



XOR Problem مثال

$$N = 4$$

$$X_1 = [-1 \text{ -}1] \rightarrow \mathrm{d}_1 = -1$$

$$X_2 = [-1 \ 1] \rightarrow \mathrm{d}_2 = +1$$

$$X_3 = [1 \text{ -}1] \rightarrow \mathrm{d}_3 = +1$$

$$X_4 = [1 \ 1] \rightarrow \mathrm{d}_4 = -1$$

$$K(\mathbf{X}, \mathbf{X}_i) = \Phi^T(\mathbf{X}).\Phi(\mathbf{X}_i)$$

$$K(\mathbf{X}, \mathbf{X}_i) = (1 + \mathbf{X}^T \mathbf{X}_i)^2$$

- نمونه‌های آموزشی دو بعدی هستند.

XOR Problem

$$\mathbf{X}_i = [x_{i1}\ \ x_{i2}]$$

$$\mathbf{X} = [x_1\ \ \mathrm{x}_2]$$

$$K(\mathbf{X}, \mathbf{X}_i) = (1 + \mathbf{X}^T \mathbf{X}_i)^2$$

$$= (1 + [x_{i1}\ \ \mathrm{x}_{i2}] \begin{bmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \end{bmatrix})^2 = (1 + x_{i1} x_1 + x_{i2} x_2)^2$$

$$= 1 + x_1^2 x_{i1}^2 + 2 x_1 x_2 x_{i1} x_{i2} + x_{i2}^2 x_2^2 + 2 x_1 x_{i1} + 2 x_2 x_{i2}$$

- حال اگر بخواهیم پاسخ به‌دست آمده را با ضرب داخلی دو بردار $\phi(\mathbf{X})$ و $\phi(\mathbf{X}_i)$ نشان دهیم خواهیم داشت:

XOR Problem

$$= 1 + x_1^2 x_{i1}^2 + 2x_1 x_2 x_{i1} x_{i2} + x_{i2}^2 x_2^2 + 2x_1 x_{i1} + 2x_2 x_{i2}$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [1, x_1^2, \sqrt{2}x_1 x_2, x_2^2, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2]^T$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x_i) = [1 + x_{i1}^2, \sqrt{2}x_{i1} x_{i2}, x_{i2}^2, \sqrt{2}x_{i1}, \sqrt{2}x_{i2}]^T \quad \text{i=1,2,3,4}$$

XOR Problem

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [1, x_1^2, \sqrt{2}x_1x_2, x_2^2, \sqrt{2}x_1, \sqrt{2}x_2]^T$$

$$\boldsymbol{\varphi}(x_i) = [1 + x_{i1}^2, \sqrt{2}x_{i1}x_{i2}, x_{i2}^2, \sqrt{2}x_{i1}, \sqrt{2}x_{i2}]^T \quad \text{i=1,2,3,4}$$

$$\begin{array}{l} X_1 = [-1\ \text{-}1] \\ X_2 = [-1\ 1] \\ X_3 = [1\ \text{-}1] \\ X_4 = [1\ 1] \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

XOR Problem

$$K_{4\times 4}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$K_{4\times 4}=\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

XOR Problem

$$N = 4$$

$$Q(\alpha)=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\alpha_i\alpha_j d_i d_j K(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j)$$

$$Q(\alpha)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$$
$$-\frac{1}{2}(9\alpha_1^2+9\alpha_2^2+9\alpha_3^2+9\alpha_4^2-2\alpha_1\alpha_2-2\alpha_1\alpha_3+2\alpha_1\alpha_4+2\alpha_2\alpha_3-2\alpha_2\alpha_4-2\alpha_3\alpha_4)$$

- برای به دست آوردن α ها مشتق گرفته برابر با صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_1}=0 \Rightarrow 1\text{-}9\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$$

XOR Problem

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_1}=0 &\Rightarrow 1\text{-}9\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\\
\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_2}=0 &\Rightarrow 1+\alpha_1-9\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4=0\\
\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_1}=0 &\Rightarrow 1+\alpha_1-\alpha_2-9\alpha_3-\alpha_4=0\\
\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_4}=0 &\Rightarrow 1\text{-}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-9\alpha_4=0
\end{aligned}\right\}\quad
\begin{aligned}
\alpha_i &= \frac{1}{8}\\
Q(\alpha) &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

- پس از محاسبه‌ی α ها $\mathbf{W}_{opt}$ را محاسبه می‌کنیم:

XOR Problem

- جهت محاسبه‌ی اندازه‌ی وزن بهینه داریم:

$$\frac{1}{2}\left\|\mathbf{W}_{\text{opt}}\right\|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \left\|\mathbf{W}_{\text{opt}}\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- داشتیم:

$$\mathbf{W}_{opt} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i . d_i (\varphi_j(\mathbf{X}_i))$$

$$\mathbf{w}_o = \frac{1}{8}[-\varphi(\mathbf{x}_1) + \varphi(\mathbf{x}_2) + \varphi(\mathbf{x}_3) - \varphi(\mathbf{x}_4)]$$

$$= \frac{1}{8}\left[-\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

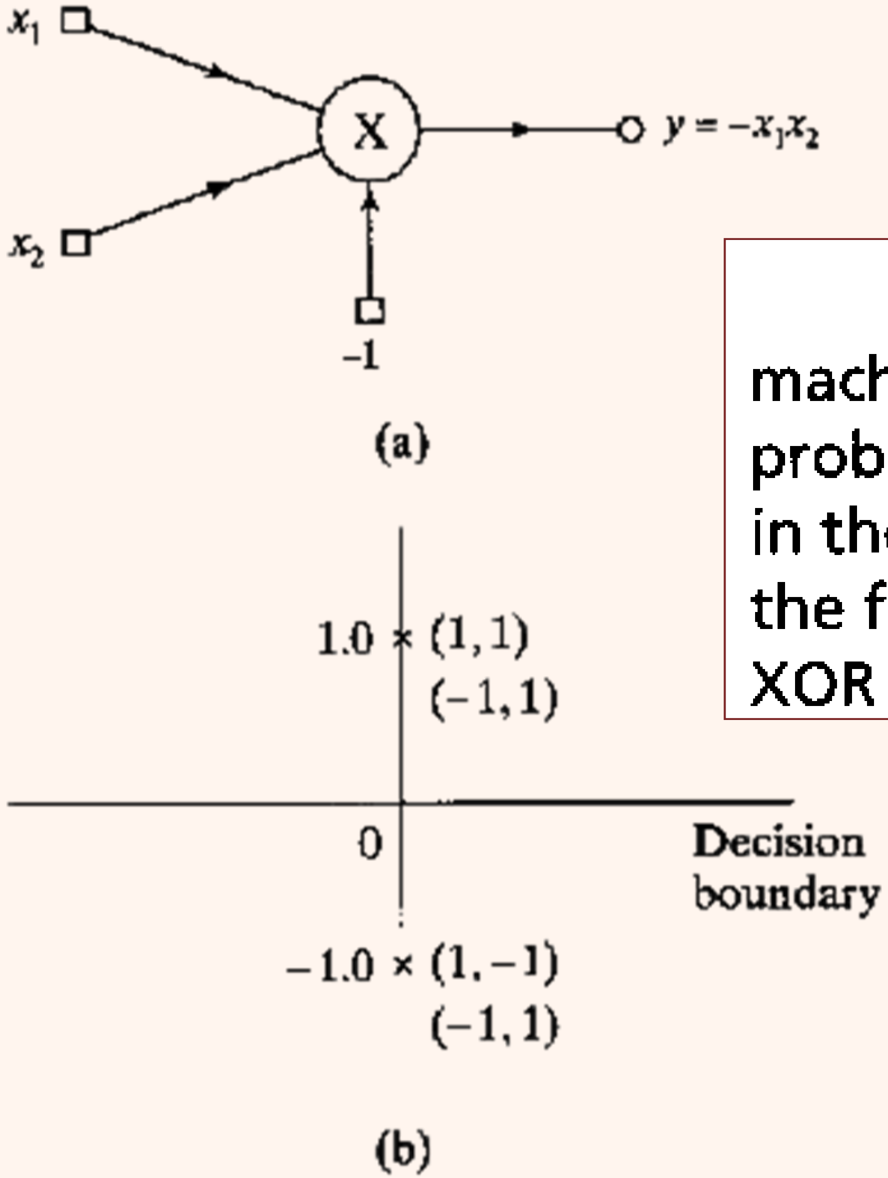
XOR Problem

- رویه‌ی بهینه به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{W}_{opt}^{T}\varphi(\mathbf{X}) = 0$$

$$\left[0, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, 0, 0\right]\begin{bmatrix} 1 \\ x_1^2 \\ \sqrt{2}x_1x_2 \\ x_2^2 \\ \sqrt{2}x_1 \\ \sqrt{2}x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -x_1x_2 = 0$$

XOR Problem



(a) Polynomial machine for solving the XOR problem. (b) Induced images in the feature space due to the four data points of the XOR problem.

XOR Problem

```
X=[-1 -1 1 1;
    -1 1 -1 1];
d=[-1 1 1 -1];
n=4;
K=zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        xi1=X(1,i);
        xi2=X(2,i);
        xj1=X(1,j);
        xj2=X(2,j);
        fi=[1 xi1^2   xi2^2
sqrt(2)*xi1*xi2  sqrt(2)*xi1
sqrt(2)*xi2 ];
        fj=[1 xj1^2 xj2^2
sqrt(2)*xj1*xj2  sqrt(2)*xj1
sqrt(2)*xj2 ];
        K(i,j)=fi*fj';%Kernel
    end
end
```

```
end
KD=zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n

KD(i,j)=K(i,j)*d(i)*d(j);
    end
end

alfa=inv(KD)*ones(n,1);
```

- می‌توان گفت برای به دست آوردن α

$$Q(\alpha)=\sum_{i=1}^{m1}\alpha_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m1}\sum_{j=1}^{m1}\alpha_i\alpha_j d_i d_j K(x_i,x_j)$$

$$\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial \alpha_j}=1-\sum_{i=1}^{m1}\alpha_j \underbrace{d_i d_j K(x_i,x_j)}_{K'(i,j)}=0 \quad j=1,2,\ldots,m_1$$

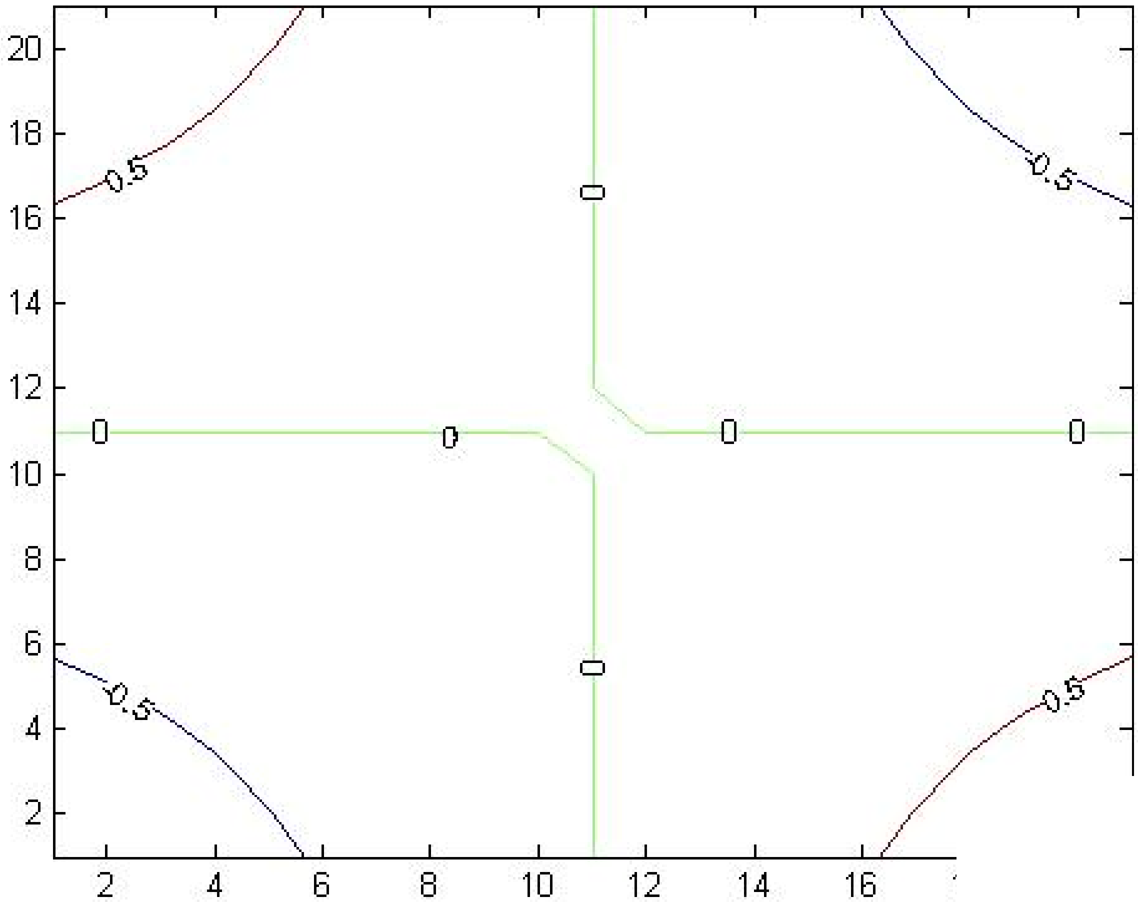
$$\boldsymbol{\alpha}=K^{-1}.\begin{bmatrix}1\\ \cdot\\ \cdot\\ 1\end{bmatrix}$$

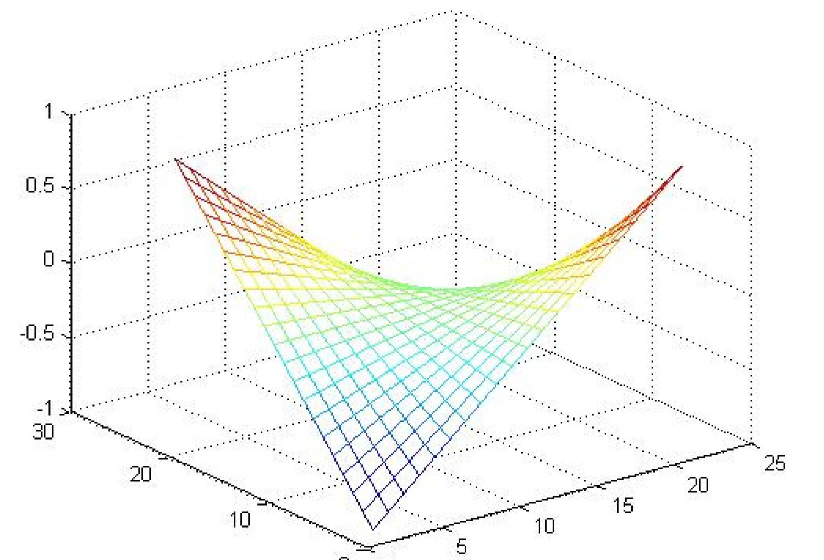
```
f=zeros(4,6);
for i=1:n
    xi1=X(1,i);
    xi2=X(2,i);
    f(i,:)=alfa(i)*d(i)*[1 xi1^2 xi2^2
sqrt(2)*xi1*xi2 sqrt(2)*xi1 sqrt(2)*xi2 ];
end
W=sum(f);

O=zeros(1,4);
for i=1:n
    xi1=X(1,i);
    xi2=X(2,i);
    O(i)=W*[1 xi1^2 xi2^2 sqrt(2)*xi1*xi2
sqrt(2)*xi1 sqrt(2)*xi2 ]';
end
```

```
x1=-1:0.1:1;
x2=-1:0.1:1;
for i=1:21
    for j=1:21
        xi1=x1(i);
        xi2=x2(j);
        M(i,j)=W*[1 xi1^2 xi2^2
sqrt(2)*xi1*xi2 sqrt(2)*xi1 sqrt(2)*xi2
]';
    end
end

mesh(M);
figure;
[c,h]=contour(M,[-1 -0.5 0 0.5 1]);
clabel(c,h);
```

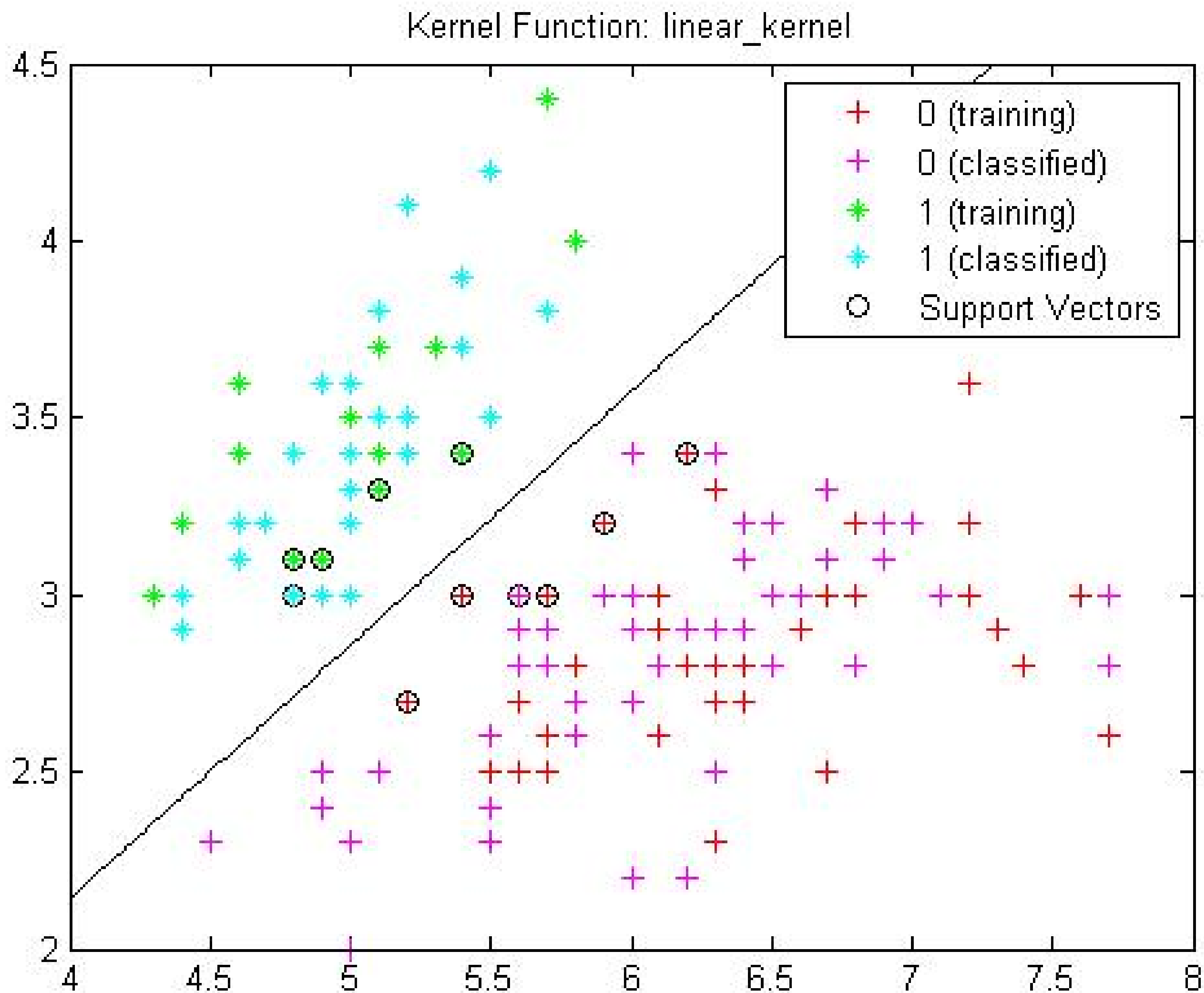

-0.5
0.5
0
0
0
0
0
0
-0.5
0.5
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
2
4
6
8
10
12
14
16

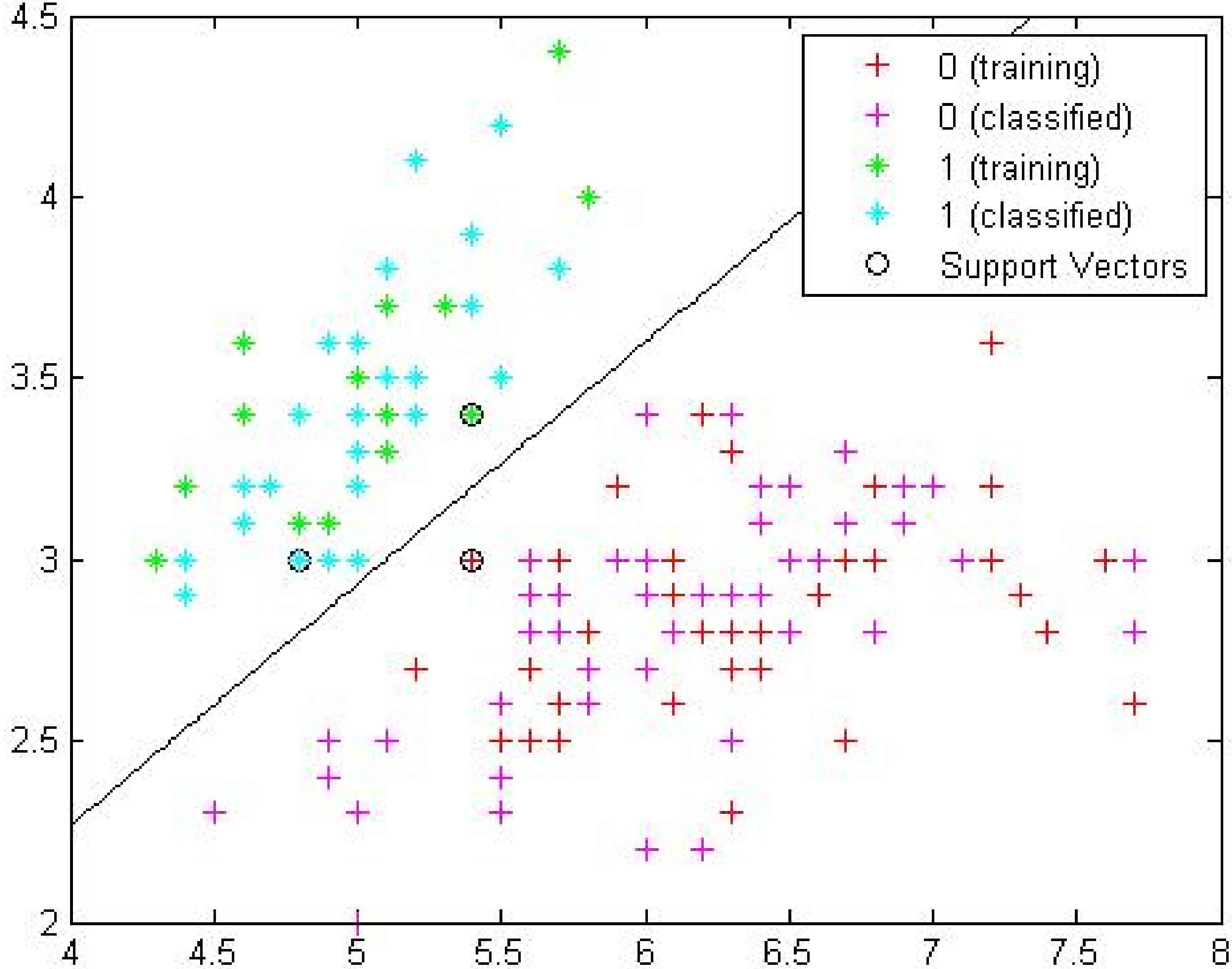

1
0.5
0
-0.5
-1
30
20
10
5
10
15
20
25

مثال

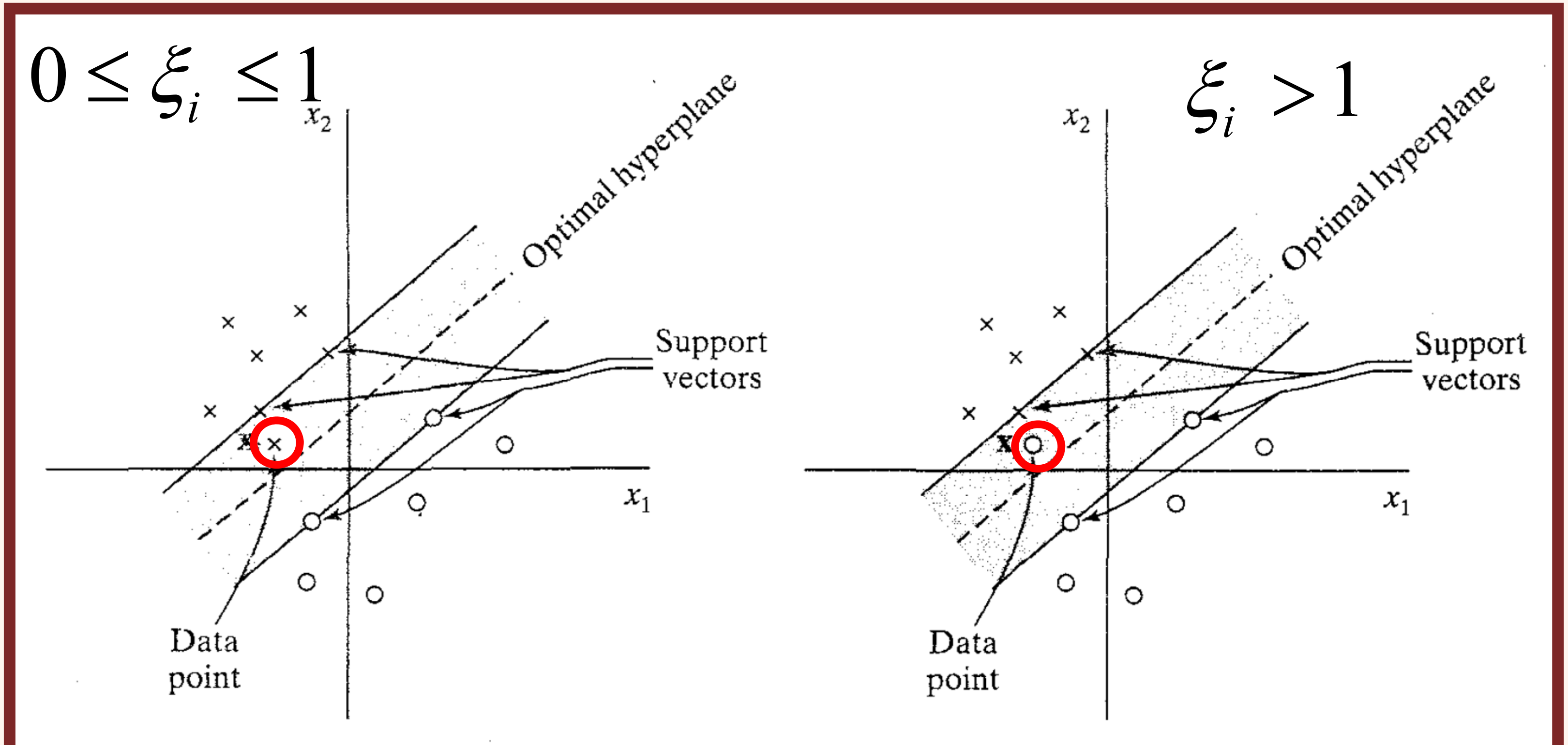
```
load fisheriris% load dataset
data = [meas(:,1), meas(:,2)];%Create data, a two-column matrix
groups = ismember(species,'setosa');%divide data into two groups: Setosa
and non-Setosa.
[train, test] = crossvalind('holdOut',groups);%test and train randomly
cp = classperf(groups);%Evaluate performance of classifier
svmStruct = svmtrain(data(train,:),groups(train),'showplot',true);%train
an SVM classifier using a linear kernel function and plot the grouped
data
title(sprintf('Kernel Function: %s',...
              func2str(svmStruct.KernelFunction)),...
              'interpreter','none');
classes = svmclassify(svmStruct,data(test,:),'showplot',true);
classperf(cp,classes,test);
p.CorrectRate

figure
svmStruct = svmtrain(data(train,:),groups(train),...
                     'showplot',true,'boxconstraint',1e6);
classes = svmclassify(svmStruct,data(test,:),'showplot',true);
classperf(cp,classes,test);
cp.CorrectRate
```


Kernel Function: linear_kernel
0 (training)
0 (classified)
1 (training)
1 (classified)
Support Vectors
4.5
4
3.5
3
2.5
2
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8


0 (training)
0 (classified)
1 (training)
1 (classified)
Support Vectors
4.5
4
3.5
3
2.5
2
4
4.5
5
5.5
6
6.5
7
7.5
8

Soft Margin Classification



- دو حالت ممکن است رخ دهد:
  - داده‌ی در کلاس درست ولی در حاشیه قرار گیرد.
  - داده‌ی آموزشی به اشتباه طبقه‌بندی شود.

$$d_i(\mathbf{W}_{op}^T \mathbf{X} + b_{op}) \ge 1 - \xi_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

Soft Margin Classification

$$d_i(\mathbf{W}_{op}{}^T\mathbf{X}+b_{op}) \geq 1-\xi_i, \qquad i=1,2,\cdots,N$$

- در این حالت بردای پشتیبان آن‌هایی هستند که در رابطه‌ی تساوی در عبارت بالا صدق می‌کنند، حتی با وجود ξ>0
- در صورتی که داده‌های نویزی از مجموعه خارج شود، رویه‌ی جداکننده تغییر خواهد کرد.
- هدف یافتن «رویه‌ای جداکننده» است که در آن خطای طبقه‌بندی نادرست در آن مینیمم شود:

$$\Phi(\xi)=\sum_{i=1}^{N} I(\xi_i-1) \qquad I(\xi)=\begin{cases}0 & \text{if } \xi\leq 0\\ 1 & \text{if } \xi>0\end{cases}$$

Soft Margin Classification

- با توجه به این که کمینه کردن چنین تابعی یک مسأله‌ی بهینه‌سازی nonconvex است و در رده‌ی NP-complete قرار می‌گیرد، آن را با تابع زیر تقریب می‌زنیم:

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$$

- و در کل هدف مینیمم کردن عبارت زیر است:

$$\Phi(\mathbf{W}, \xi) = \frac{1}{2}\mathbf{W}^T \mathbf{W} + C\sum_{k=1}^{R} \varepsilon_k$$

regularization parameter

این پارامتر نوعی مصالحه بین پیچیدگی ماشین و خطا برقرار می‌کند.. هرچه C به صفر نزدیک‌تر باشد به این معناست که نمونه‌هایی در حاشیه قرار می‌گیرند، اهمیت کمتری دارند و در نتیجه حاشیه بزرگ‌تر می‌شود. و هرچه بزرگ‌تر باشد، مساله به حالت **hard margin** نزدیک‌تر می‌شود.

Soft Margin

- برای Hard Margin داشتیم:

Find $\mathbf{W}$ and b such that
$\Phi(\mathbf{W}) = \frac{1}{2}\, \mathbf{W}^T\mathbf{W}$ is minimized and for all $\{(\mathbf{X}_i, y_i)\}$
$y_i (\mathbf{W}^T\mathbf{X}_i + b) \geq 1$

- با اضافه کردن Slack Variable داریم:

Find $\mathbf{W}$ and b such that
$\Phi(\mathbf{W}) = \frac{1}{2}\, \mathbf{W}^T\mathbf{W} + C\Sigma\xi_i$ is minimized and for all $\{(\mathbf{X}_i, y_i)\}$
$y_i (\mathbf{W}^T\mathbf{X}_i + b) \geq 1 - \xi_i$ and $\xi_i \geq 0$ for all i

Soft Margin Classification

هدف یافتن ضرایب لاگرانژ بیشینه در عبارت زیر است:

$$Q(\alpha)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j d_i d_j \mathbf{X}_i^T\mathbf{X}_j$$

با در نظر گرفتن قیود زیر

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i=0$$

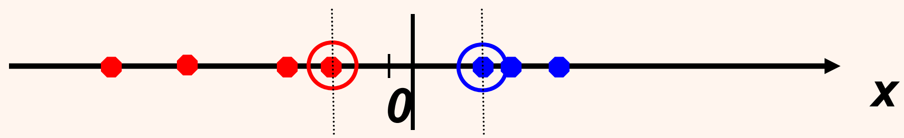
$$0\le\alpha\le C$$

بقیه مراحل مانند حالت قبل خواهد بود:

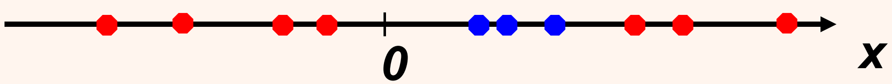
$$w_{op}=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i \mathbf{X}_i$$

SVM غیرخطی

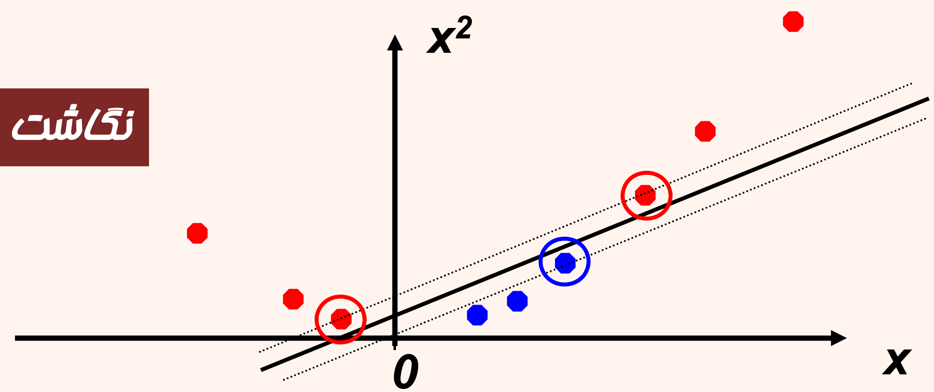
- برای داده‌هایی که قابلیت جداسازی خطی دارند، عملکرد سیستم بسیار خوب است.



- اگر داده‌ها به صورت‌های زیر باشد، مسأله چگونه حل می‌شود؟

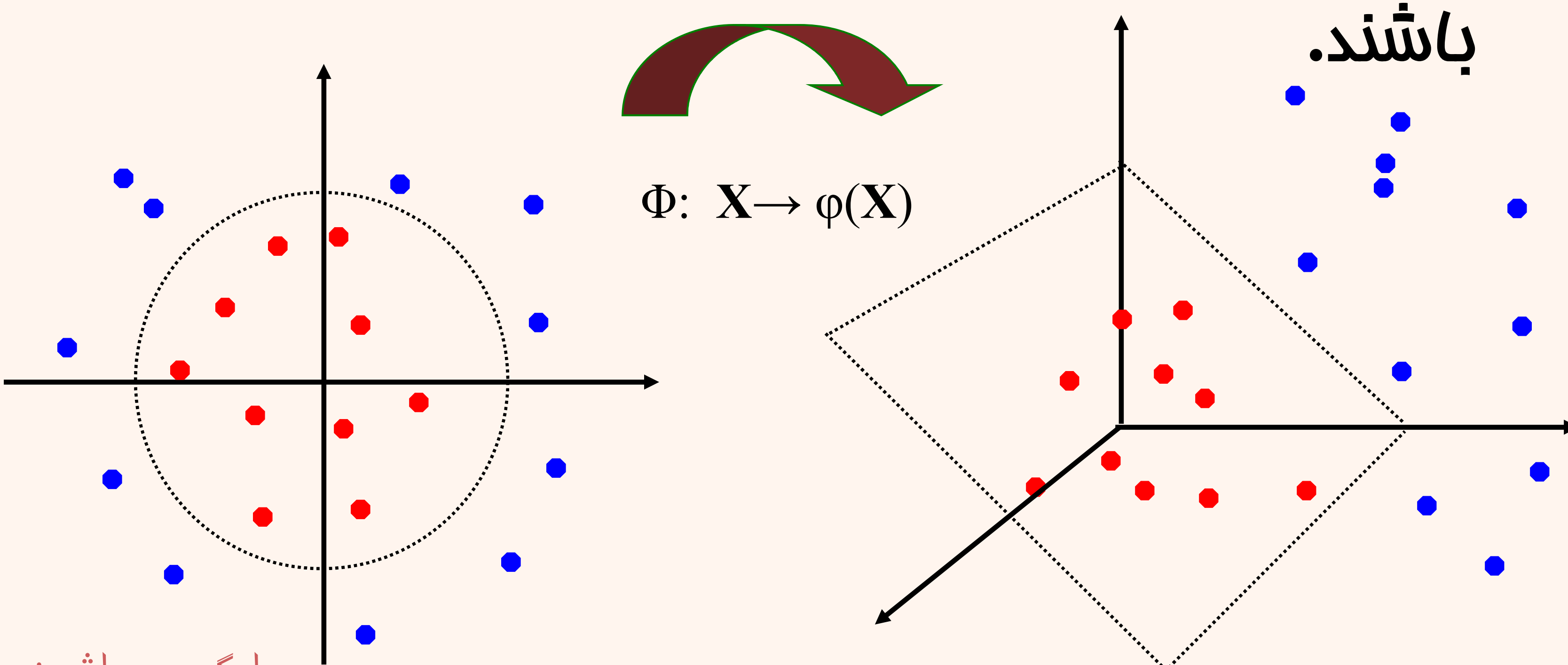


نگاشت به یک فضای High Dimension



نگاشت به فضای بالاتر

- همواره فضای ورودی می‌تواند به فضایی با ابعاد بالاتر نگاشت گردد.
- این نگاشت می‌تواند به صورتی باشد که در این فضای جدید ورودی‌ها قابلیت جداسازی داشته باشند.



نگاشت به فضای بالاتر

$$\underset{R^{m0}}{\mathbf{X}_i} \longrightarrow \underset{R^{m1}}{\varphi(\mathbf{X}_i)} \xrightarrow{W}$$ خروجی

- داشتیم

$$\mathbf{W}^T\mathbf{X} + b = 0$$

- هنگامی‌که ورودی ها به فضای دیگری نگاشت شوند برای نگاشت جدید خواهیم داشت:

$$\varphi(\mathbf{X}) = [\varphi_1(\mathbf{X}), \varphi_2(\mathbf{X}), \ldots\ldots\ldots, \varphi_{m1}(\mathbf{X})]^T$$

- در این حالت هدف یافتن رویه‌ی جداسازی است به‌گونه‌ای که:

$$\sum_{j=1}^{m1} w_j \varphi_j(\mathbf{X}) + b = 0$$

نگاشت به فضای بالاتر

$$\sum_{j=1}^{m1} w_j \varphi_j(\mathbf{X}) + b = 0$$

- با فرض $\varphi_0(\mathbf{X}) = 1$
- خواهیم داشت:

$$\sum_{j=0}^{m1} w_j \varphi_j(\mathbf{X}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{W}^{\mathrm{T}}\Phi(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{\Phi(X)} = [1, \Phi(\mathbf{X})]^T$$

$$\mathbf{W} = [b, w_1, w_2, \ldots\ldots w_{m1}]^T$$

نگاشت به فضای بالاتر

- در این مرحله تمامی شروط و قیودی که برای جداسازی خطی در نظر گرفتیم وجود دارد تنها به ازای x_i ها $\varphi_i(x_i)$ در نظر گرفته می‌شود:

$$d_i[\sum_{i=1}^{m1} w_j \varphi_j(\mathbf{X}_i) - 1] \geq 0$$

$$\mathbf{W}_{opt} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i . d_i (\varphi_j(\mathbf{X}_i))$$

اسکالر

$m_1 \times 1$

$$\mathbf{W}_{opt}^{T} \Phi(\mathbf{X}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \alpha_i . d_i \Phi^T(\mathbf{X}_i) \Phi(\mathbf{X}) = 0$$

نگاشت به فضای بالاتر

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i . d_i \Phi^T(\mathbf{X}_i)\Phi(\mathbf{X}) = 0$$

$$K(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j) = \varphi(\mathbf{X}_i)^T \varphi(\mathbf{X}_j)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i . d_i K(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}) = 0$$

$$Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j d_i d_j K(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j)$$

تابع **kernel**، تابعی است که معادل ضرب داخلی دو بردار خصیصه است.

مثال

$\mathbf{x}=[x_1 \;\; x_2]$;

$K(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=(1+\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_j)^2$, $\qquad K(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j)$:

$$K(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=(1+\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_j)^2 = 1+x_{i1}^2x_{j1}^2+2\,x_{i1}x_{j1}\,x_{i2}x_{j2}+x_{i2}^2x_{j2}^2+2x_{i1}x_{j1}+2x_{i2}x_{j2}$$

$$= [1 \;\; x_{i1}^2 \;\; \sqrt{2}\,x_{i1}x_{i2} \;\; x_{i2}^2 \;\; \sqrt{2}x_{i1} \;\; \sqrt{2}x_{i2}]^{\mathrm{T}}\,[1 \;\; x_{j1}^2 \;\; \sqrt{2}\,x_{j1}x_{j2} \;\; x_{j2}^2 \;\; \sqrt{2}x_{j1} \;\; \sqrt{2}x_{j2}]$$

$$= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_i)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_j),$$

where $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = [1 \;\; x_1^2 \;\; \sqrt{2}\,x_1x_2 \;\; x_2^2 \;\; \sqrt{2}x_1 \;\; \sqrt{2}x_2]$

Mercer's theorem:

Every semi-positive definite symmetric function is a kernel

$K(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_1)$	$K(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)$	$K(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_3)$	…	$K(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_n)$
$K(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1)$	$K(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_2)$	$K(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)$		$K(\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_n)$
…	…	…	…	…
$K(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_1)$	$K(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_2)$	$K(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_3)$	…	$K(\mathbf{x}_n,\mathbf{x}_n)$

نگاشت به فضای بالاتر

$$Q(\alpha)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j d_i d_j \underbrace{\Phi(\mathbf{X}_i)\Phi(\mathbf{X}_j)}_{K(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j)}$$

$$K_{N\times N}=\left\{K(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j)\right\}_{i,j=1}^{N}$$

ماتریس متقارن

هدف یافتن ضرایب لاگرانژ بیشینه در عبارت زیر است:

$$Q(\alpha)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_i\alpha_j d_i d_j K(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j)$$

با در نظر گرفتن قیود زیر

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i d_i=0$$

$$0\leq\alpha_i\leq C$$ که

kernel trick

در صورت یافتن تابع **kernel** مناسب بدون این که درگیر مسایل در فضایی با ابعاد بالاتر شویم، تنها از نتیجه این نگاشت بهره می‌بریم.

$$\boxed{g(\mathbf{x})=\sum\alpha_i d_i K(\mathbf{X}_i,\mathbf{X})+b}$$

توابع نگاشت

TABLE 6.1 Summary of Inner-Product Kernels

Type of support vector machine	Inner product kernel $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$	Comments
Polynomial learning machine	$(\mathbf{x}^T\mathbf{x}_i + 1)^p$	Power p is specified *a priori* by the user
Radial-basis function network	$\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|^2\right)$	The width σ^2, common to all the kernels, is specified *a priori* by the user
Two-layer perceptron	$\tanh(\beta_0\mathbf{x}^T\mathbf{x}_i + \beta_1)$	Mercer's theorem is satisfied only for some values of β_0 and β_1

بهشتی

ساختار SVM

$$g(\mathbf{X}) = \Sigma \alpha_i d_i K(\mathbf{X_i},\mathbf{X}) + b$$