نمایش اعداد ممیز شناور

مبانی برنامه‌نویسی

(۱۱-۱۳-۱۳۹۱)

جلسه‌ی پنجم

دانشگاه شهید بهشتی

پاییز ۱۳۹۳

دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر

احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

نمایش نمایی

- تمام اعداد زیر نمایش عدد $\boxed{1234}$ می‌باشند.

$123,400.0 \times 10^{-2}$

$12,340.0 \times 10^{-1}$

$\boxed{1,234.0 \times 10^{0}}$

123.4×10^{1}

12.34×10^{2}

1.234×10^{3}

0.1234×10^{4}

با تغییر همزمان توان و جایگاه ممیز، نمایش‌های متفاوتی برای یک عدد به دست می‌آید.

ممیز شناور

- وجود نمایش‌های متعدد برای یک عدد در عمل معادل از دست دادن دقت یا دامنه‌ی نمایش اعداد است.
- از طرفی دیگر، موجب پیچیدگی عملیات ریاضی (به عنوان مثال مقایسه) می‌شود.
- در سیستم نمایش ممیز شناور اعداد معمولا به صورت «نماد علمی نرمال» نمایش داده می‌شوند.
- در مبنای دو، نماد علمی نرمال عددی به فرم $1.F\times2^{E}$ است.

روش‌های مختلف نمایش ممیز شناور

- سازندگان مختلف هریک شیوه‌ای برای نمایش اعداد ممیز شناور در پیش گرفتند.

	IBM/370	DEC/VAX	Cyber 70
Word length (double)	32 (64) bits	32 (64) bits	60 bits
Significand+{hidden bit}	24 (56) bits	$23+1$ $(55+1)$ bits	48 bits
Exponent	7 bits	8 bits	11 bits
Bias	64	128	1024
Base	16	2	2
Range of M	$\frac{1}{16} \leq M < 1$	$\frac{1}{2} \leq M < 1$	$1 \leq M < 2$
Representation of M	Signed-magnitude	Signed-magnitude	One's complement
Approximate range	$16^{63} \approx 7 \cdot 10^{75}$	$2^{127} \approx 1.9 \cdot 10^{38}$	$2^{1023} \approx 10^{307}$
Approximate resolution	$2^{-24} \approx 10^{-7}$ (10^{-17})	$2^{-24} \approx 10^{-7}$ (10^{-17})	$2^{-48} \approx 10^{-14}$

- این تنوع نمایش به معنای دقت‌های متفاوت در سیستم‌های مختلف است، از این رو نتیجه‌ی اجرای دستورهای یکسان، کمی متفاوت خواهد بود.

استاندارد ممیز شناور

- برای فراهم آوردن سازگاری، نمایش ممیز شناور توسط IEEE استاندارد شده است.

IEEE standard 754

- دو شیوه‌ی زیر در این استاندارد ارائه شده است:
- single-precision
- double precision
- برای نمایش عدد در این استاندارد ابتدا آن را به صورت $\pm 1.F \times 2^E$ در می‌آوریم.

استاندارد IEEE754

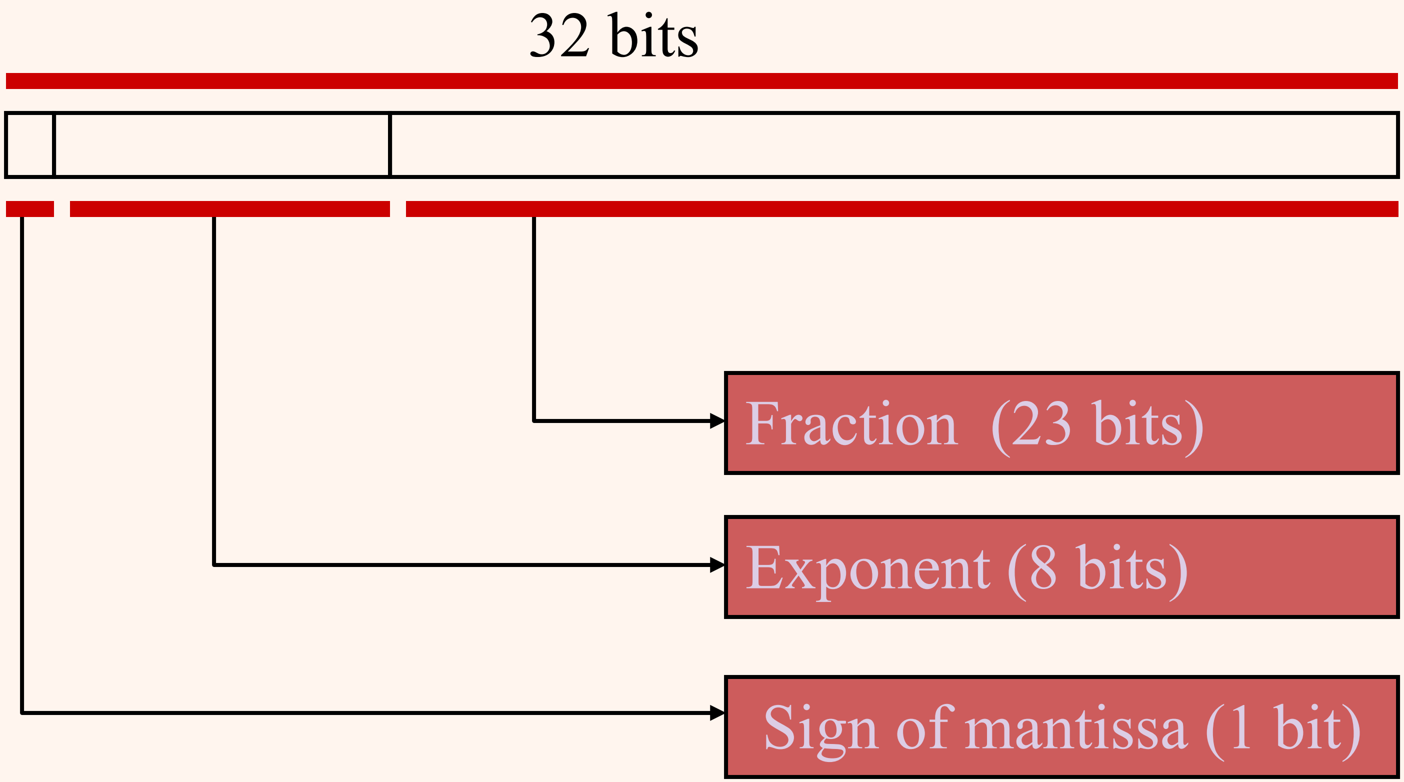
- برای نمایش توان از شیوه‌ی پیش‌قدردار (bias=127) و بخش کسری از شیوه علامت و مقدار استفاده می‌شود.
- از بخش Mantissa تنها بخش کسری ذخیره می‌شود، بخش صحیح (۱) با توجه به این که همیشه وجود دارد، ذخیره نمی‌شود و به hidden one موسوم است.

	single: 8 bits double: 11 bits	single: 23 bits double: 52 bits
S	Exponent	Fraction

$$X = (-1)^S \times (1 + \mathrm{Fraction}) \times 2^{(\mathrm{Exponent} - \mathrm{Bias})}$$

Single: Bias = 127; Double: Bias = 1023

عدد اعشاری با دقت ساده



$$Value = (-1)^{S}\, 1.F \times 2^{Exponent - 127}$$

Bias

Hidden one

مثال

$(41A00000)_{IEEE754(single)} = (\ ?)_b = (?)_d$

4	1	A	0	0	0	0	0

0 10000011 01000000000000000000000

S   E+Bias   F

1 = negative
0 = positive

E+Bias → 131 → -127 → E 4

F → $(0.01)_2$ → $(1.01)_2$ M=1.F

$=(\ 1.01\times 2^4)_b=(10100)_b=(20)_d$

تمرین کلاسی

$$(C17B0000)_{IEEE754(single)}=(\ ?)_b=(?)_d$$

C | 1 | 7 | B | 0 | 0 | 0 | 0

1 10000010 11110110000000000000000

S

E+Bias

F

1 = negative
0 = positive

130

-127

E 3

$(0.1111011)_2$

$(1.1111011)_2$ M=1.F

$$=(\ -1.1111011\times2^3)_b=(-1111.1011)_b=(-15.6875)_d$$

مثال

$1.25 = 1.010 \times 2^{0} = (?)_{IEEE754(single)}$

$$Value = (-1)^{S}\, 1.F \times 2^{Exponent - 127}$$

S=0

F=0100…

E=00000000, Exponent=E+127=01111111

s	Exponent								fraction																						
0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$(1.25)_{D} = (3FA00000)_{IEEE754(single)}$

تمرین کلاسی

$13 = 1.101 \times 2^3 = (?)_{IEEE754(single)}$

$$Value = (-1)^S \, 1.F \times 2^{Exponent-127}$$

S=0

F=1010…

E=00000011 Exponent=E+127= 10000010

s	Exponent								fraction																						
0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$(13)_D = (41500000)_{IEEE754(single)}$

عدد صفر به چه صورت نمایش داده می‌شود؟

- در این شیوه‌ای که تاکنون مطرح شد، به دلیل وجود «hidden one» عدد صفر قابل نمایش نیست.
- برای رفع این مشکل (و موارد مشابه) استاندارد IEEE754 استثناهایی در نظر گرفته است.
- شرایطی که Exponent(Exp) برابر با ۰ یا ۲۵۵ باشد، رابطه‌ی

گفته شده دیگر صادق نخواهد بود.

$$Value = \begin{cases} (-1)^S\, 1.F \times 2^{Exp-127} & Exp \neq 0, 255 \\ (-1)^S\, 0.F \times 2^{Exp-127} & Exp = 0 \end{cases}$$

- در این حالت در صورتی که F=0 عددد صفر نمایش داده خواهد شد و در صورتی که F≠0 عددی بسیار کوچک به دست خواهد آمد که به صورت «نماد علمی نرمال» نیست.
- این اعداد را «ناهنجار» (denormal) می‌گویند.
- عملیات محاسباتی روی این اعداد در مقایسه با اعداد نرمال کندتر است.

$$Value = \begin{cases} (-1)^S \, 1.F \times 2^{Exp-127} & Exp \neq 0,255 \\ (-1)^S \, 0.F \times 2^{Exp-127} & Exp = 0 \end{cases}$$

Denormal Numbers

اعداد ناهنجار

Exponent = 000...0 ⇒ hidden bit is 0

$$x = (-1)^S \times (0 + \text{Fraction}) \times 2^{-\text{Bias}}$$

- بدین ترتیب می‌توان اعداد کوچک‌تری را نیز نمایش داد.
- در صورتی که بخش کسری را برابر صفر قرار دهیم:

$$x = (-1)^S \times (0 + 0) \times 2^{-\text{Bias}} = \pm 0.0$$

بدین ترتیب دو نمایش برای 0 خواهیم داشت

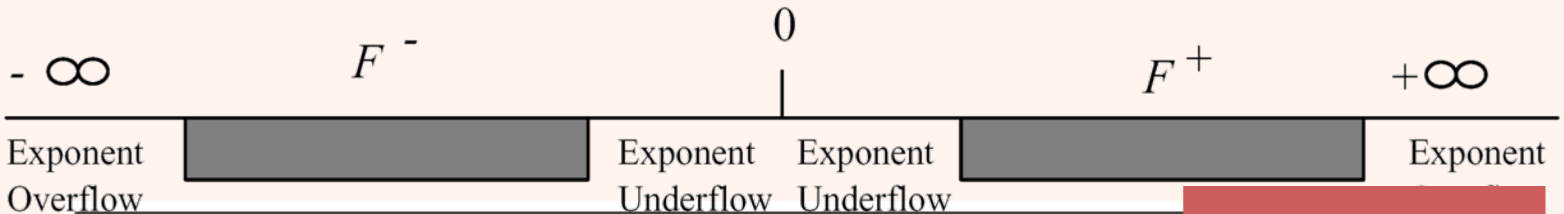
نمایش اعداد متعارف (ادامه...)

- در محاسبات گاهی تقسیم بر صفر (یا عدد کوچکی که به صفر تقریب زده شده است) پیش می‌آید.
- در این گونه موارد در محاسبات صحیح معمولا استثنا (exception) رخ می‌دهد و ادامه‌ی اجرای برنامه متوقف می‌شود.
- برای محاسبات حقیقی، در استاندارد IEEE754 برای نمایش نتیجه‌ی چنین محاسباتی استثنایی دیگر در نظر گرفته شده است.
- در صورتی که Exponent=255 باشد، بسته به میزان F عدد «بی‌نهایت» (Inf) یا «ناعدد» (NaN) در نظر گرفته می‌شود.

ناعدد و بی‌نهایت

- Exponent = 111…1, Fraction = 000…0
  - $\pm\infty$
  - در محاسبات بعدی نیز قابل استفاده است.
- Exponent = 111…1, Fraction $\neq$ 000…0
  - ناعدد (Not-a-Number (NaN))
  - بیان‌گر محاسبات نادرست می‌باشد.
  - این اعداد نیز قابلیت استفاده در محاسبات بعدی را دارند.

نمایش اعداد نامتعارف



	$f = 0$	$f \neq 0$
$Exp = 0$	0	Denormalized
$Exp = 255$	$\pm\infty$	NaN

Fraction

Exponent

برای نمایش عدد 0، بی‌نهایت و ناعدد حالت‌های خاصی در نظر گرفته می‌شود.

$$Value = \begin{cases} (-1)^S \; 0.F \times 2^{Exp-127} & Exp = 0 \\ Inf & Exp = 255, F = 0 \\ NaN & Exp = 255, F \neq 0 \\ (-1)^S \; 1.F \times 2^{Exp-127} & O.W. \end{cases}$$

محدوده‌ی قابل نمایش

- **کوچک‌ترین مقدار ممکن**
  - Exponent: 00000001
    $\Rightarrow$ E(actual exponent) = 1 – 127 = –126
  - Fraction: 000…00 $\Rightarrow$ mantissa = 1.0
  - $\pm 1.0 \times 2^{-126} \approx \pm 1.2 \times 10^{-38}$
- **بزرگ‌ترین مقدار ممکن**
  - exponent: 11111110
    $\Rightarrow$ E(actual exponent) = 254 – 127 = +127
  - Fraction: 111…11 $\Rightarrow$ mantissa $\approx$ 2.0
  - $\pm 2.0 \times 2^{+127} \approx \pm 3.4 \times 10^{+38}$

محدوده‌ی قابل نمایش با دقت مضاعف

- **کوچک‌ترین مقدار ممکن**
  - Exponent: 00000000001
    $\Rightarrow$ E(actual exponent) = 1 – 1023 = –1022
  - Fraction: 000…00 $\Rightarrow$ mantissa = 1.0
  - $\pm 1.0 \times 2^{-1022} \approx \pm 2.2 \times 10^{-308}$
- **بزرگ‌ترین مقدار ممکن**
  - Exponent: 11111111110
    $\Rightarrow$E(actual exponent) = 2046 – 1023 = +1023
  - Fraction: 111…11 $\Rightarrow$ mantissa $\approx$ 2.0
  - $\pm 2.0 \times 2^{+1023} \approx \pm 1.8 \times 10^{+308}$

دقت در ممیز شناور بدون در نظر گرفتن توان

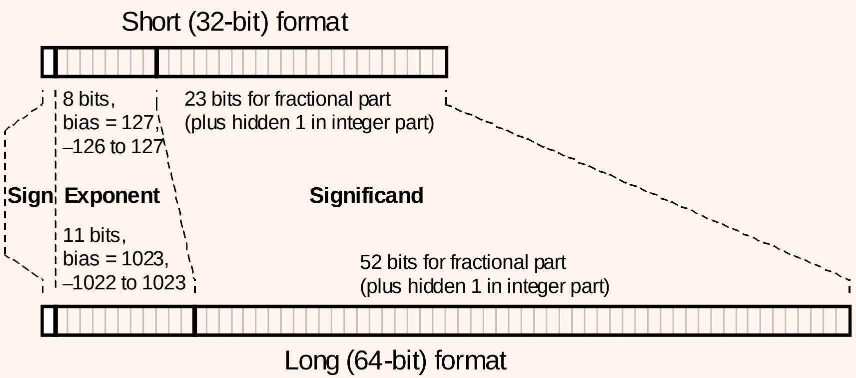
– Single: approx 2^{-23}

- Equivalent to $23 \times \log_{10}2 \approx 23 \times 0.3 \approx 6$
- برابر با شش رقم اعشار دقت

– Double: approx 2^{-52}

- Equivalent to $52 \times \log_{10}2 \approx 52 \times 0.3 \approx 16$
- برابر با شانزده رقم اعشار دقت

پراکندگی داده‌ها در ممیز شناور

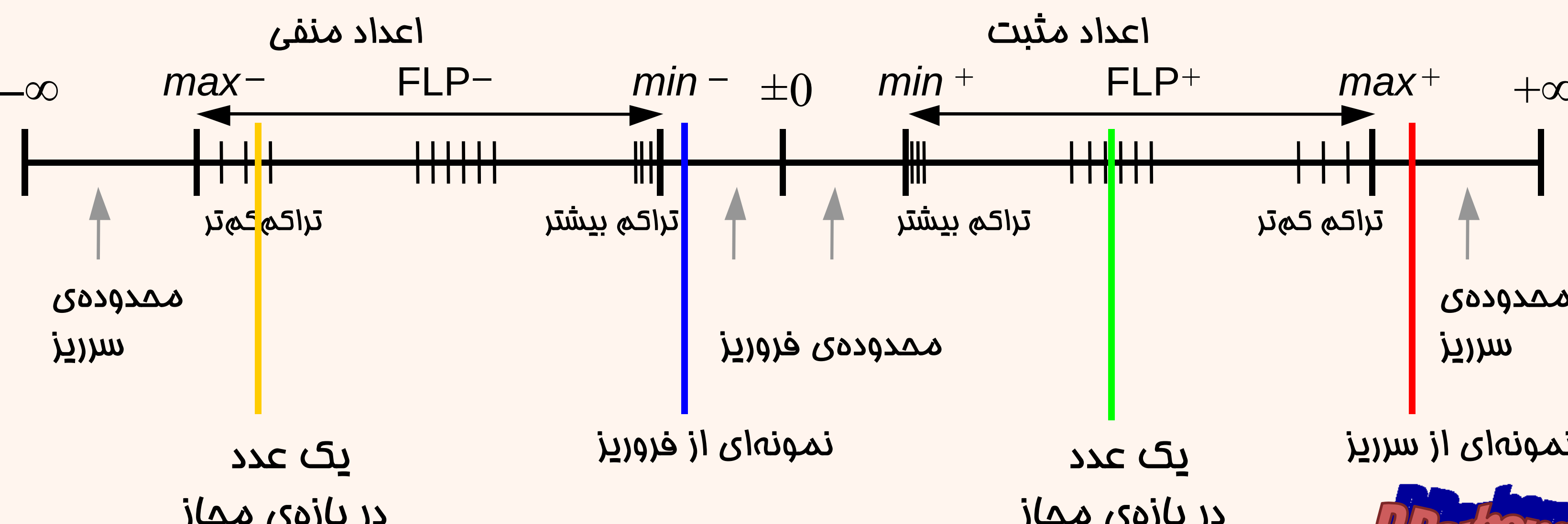


± 0, $\pm\infty$, NaN

$1.f \times 2^{e}$

Denormals:

$0.f \times 2^{e_{\min}}$



نمایش BCD

- در برخی کاربردها دسترسی به ارقام ده‌دهی به صورت مجزا اهمیت دارد.
- با توجه به این که برخی اعداد در مبنای ده نمایش دقیق دارند و قابل نمایش به صورت دودویی نیستند، لازم است برای نمایش دقیق آن‌ها تدبیری اندیشیده شود.
- در این نمایش هر رقم ده‌دهی با چهار بیت نمایش داده می‌شوند.

Decimal	BCD Code
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

BCD (ادامه...)

$(12)_{10}$

1100

00010010

نمایش در مبنای ۲

استفاده از شیوه‌ی نمایش BCD

$$
\begin{array}{r}
9 \\
+\ 3 \\
\hline
1\quad 2
\end{array}
$$

carry

نمایش متن

- مجموعه کاراکترها با اعداد کد می‌شوند:
  - کدهای اَسکی: ۱۲۸ کاراکتر شامل
    - ۳۳ بایت کنترلی و ۹۵نماد گرافیکی
- لاتین۱: ۲۵۶ کاراکتر
  - کدهای اسکی همراه با ۹۶ کاراکتر گرافیکی
- یونیکد: دارای نمایش ۳۲ بیتی است
  - به صورت پیش‌فرض در java استفاده می‌شود.
  - C++ wide characters
  - UTF-8, UTF-16

ASCII

Latin-1

variable-length encodings

کدهای ASCII

- در برخی کاربردها متن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در چنین حالاتی از کدهای ASCII استفاده می‌شود.
- برای نمایش اعداد 0 تا 9 و برای حروف کوچک و بزرگ و همچنین علائم و همچنین کاراکترهای کنترلی از کدهای ASCII استفاده می‌شود.
  - BS: A backspace will be made on the printer.
  - LF: Cursor is sent to the next line.
  - FF: Page must be ejected from the printer.
  - CR: The cursor is sent to the beginning of the line

کدهای آسکی

بخش پردازش

بخش کم‌ارزش

	000	001	010	011	100	101	110	111
0000	NULL	DLE		0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	"	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EDT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

یونیکد

- یک استاندارد صنعتی است
- به هر کاراکتر عدد یکتایی نسبت می‌دهد؛ مستقل از محیط، مستقل از برنامه، و مستقل از زبان.

Latin	Malayalam	Tagbanwa	General Punctuation
Greek	Sinhala	Khmer	Spacing Modifier Letters
Cyrillic	Thai	Mongolian	Currency Symbols
Armenian	Lao	Limbu	Combining Diacritical Marks
Hebrew	Tibetan	Tai Le	Combining Marks for Symbols
Arabic	Myanmar	Kangxi Radicals	Superscripts and Subscripts
Syriac	Georgian	Hiragana	Number Forms
Thaana	Hangul Jamo	Katakana	Mathematical Operators
Devanagari	Ethiopic	Bopomofo	Mathematical Alphanumeric Symbols
Bengali	Cherokee	Kanbun	Braille Patterns
Gurmukhi	Unified Canadian Aboriginal Syllabic	Shavian	Optical Character Recognition
Gujarati	Ogham	Osmanya	Byzantine Musical Symbols
Oriya	Runic	Cypriot Syllabary	Musical Symbols
Tamil	Tagalog	Tai Xuan Jing Symbols	Arrows
Telugu	Hanunoo	Yijing Hexagram Symbols	Box Drawing
Kannada	Buhid	Aegean Numbers	Geometric Shapes