سیستم اعداد

نمایش اعداد صحیح

مبانی برنامه‌نویسی
(۱۱-۱۳-۱۳۹۱)
جلسه‌ی دوم

دانشگاه شهید بهشتی
پاییز ۱۳۹۳
دانشکده‌ی مهندسی برق و کامپیوتر
احمد محمودی ازناوه

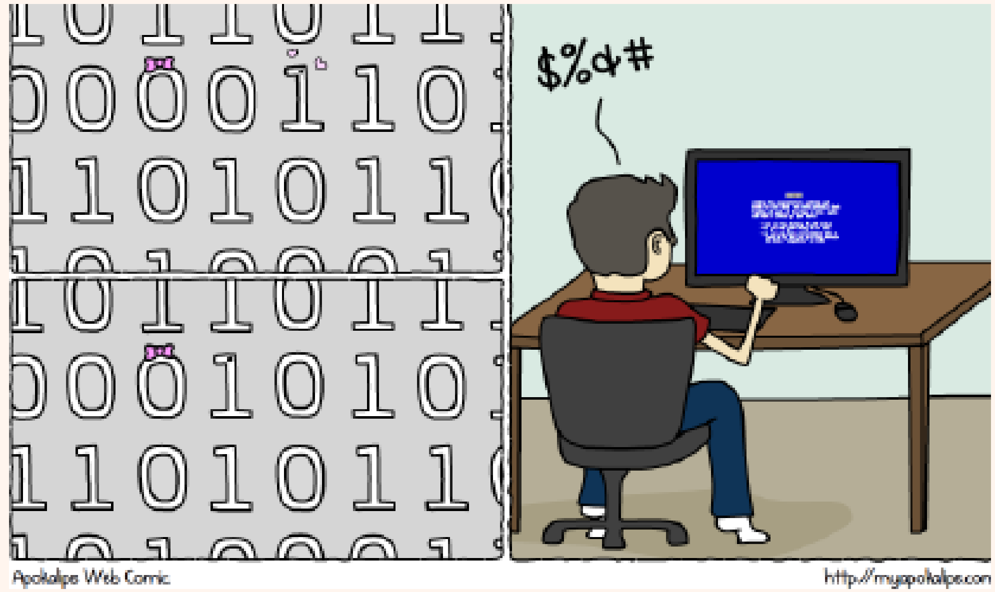
فهرست مطالب

- سیستم اعداد
  - نمایش اعداد صحیح
    - مروری بر تبدیل مبنا
    - جمع اعداد بدون علامت
  - نمایش اعداد علامت‌دار
    - اعداد پیش‌قدردار
    - سیستم عددی علامت‌ومقدار

انفجار آریان ۵

- در سال ۱۹۹۶ موشک آریان ۵ متعلق به آژانس فضایی اروپا که قرار بود ماهواره آریان ۵ را در مدار قرار دهد ۳۶٫۷ ثانیه پس از برخاستن از زمین منفجر شد. علت آن بروز مشکل در نرم افزار هدایت موشک بود. سیستم کامپیوتری هدایت موشک هنگام تبدیل عدد ۶۴ بیتی ممیز شناور به فرمت ۱۶ بیتی صحیح علامت‌دار به علت بزرگی عدد دچار مشکل شده بود.

نمایش اعداد:



اعداد چگونه نمایش داده می شوند؟

نمایش اعداد بدون علامت

Positional Number Representation

- ساده‌ترین شیوه‌ی نمایش اعداد، مربوط به اعداد صحیح بدون علامت می‌باشد. یک عدد در مبنای 10 به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

Unsigned Numbers

$$D = d_{n-1} d_{n-2} \cdots d_1 d_0$$

- در اصل این عدد برابرست با

$$V(D) = d_{n-1} \times 10^{n-1} + d_{n-2} \times 10^{n-2} + \cdots + d_1 \times 10^1 + d_0 \times 10^0$$

Radix-10 (Base-10)

نمایش اعداد بدون علامت(ادامه...)

- به طور کلی یک عدد در مبنای r را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$x_{k-1}x_{k-2}\,...\,x_1x_0\,.\,x_{-1}x_{-2}\,...\,x_{-l}\;) = \sum_{i=-l}^{k-1} x_i r^i$$

- بنا به دلایل کاربردی، در «مدارهای منطقی» تنها امکان استفاده از «منطق دو مقداری» وجود دارد و در نتیجه برای نمایش اعداد از مبنای 2 استفاده می‌شود.

$$B = b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0$$

$$V(B) = b_{n-1}\times 2^{n-1} + b_{n-2}\times 2^{n-2} + \cdots + b_1\times 2^1 + b_0\times 2^0$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

binary digit (bit)

- هر رقم دودویی یک bit نامیده می‌شود.
- در سیستم اعداد دودویی، به کم‌ارزش‌ترین بیت LSB و به پرارزش‌ترین بیت MSB گفته می‌شود.

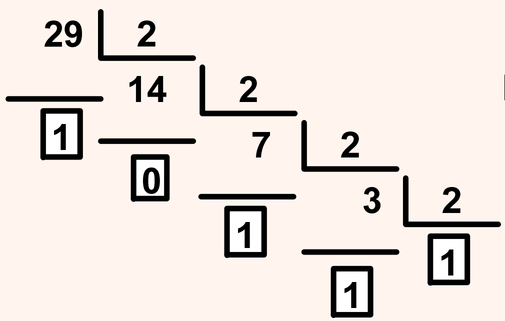
Least Significant Bit

Most Significant Bit

- به طور معمول به هر چهار بیت یک nibble و به هر هشت بیت یک byte گفته می‌شود.
- بازه‌ی نمایش اعداد به تعداد بیت‌هایی محدود است که مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای یک سیستم n بیتی می‌توان تا 2^n عدد مختلف را نمایش داد.

تبدیل مبنا

- تبدیل مبنای دو به مبنای ده، به سادگی و با استفاده از نوشتن ارزش مکانی هر رقم در مبنای ده انجام می‌شود.
- برای تبدیل عددی از مبنای ده به مبنای دو از تقسیم‌های متوالی استفاده می‌کنیم:



Binary Point

$(29)_D = (11101.)_B$

$$V = b_{n-1} \times 2^{n-1} + b_{n-2} \times 2^{n-2} + \cdots + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0$$

$$\frac{V}{2} = b_{n-1} \times 2^{n-2} + b_{n-2} \times 2^{n-3} + \cdots + b_2 \times 2^1 + b_1$$

مثال ۱

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1_2 = (?)_{10}$$

$$2^5 + \cancel{2^4} + \cancel{2^3} + 2^2 + \cancel{2^1} + 2^0 = 32 + 4 + 1 = 37_{10}$$

$$\boxed{100101_2 = 37_{10}}$$

مثال ۲

$$25_{10} = (?)_2$$

			Q		R
	25/2	=	12	+	1 LSB
$Q \neq 0$	12/2	=	6	+	0
$Q \neq 0$	6/2	=	3	+	0
$Q \neq 0$	3/2	=	1	+	1
$Q \neq 0$	1/2	=	0	+	1 MSB

$$\boxed{25_{10} = 11001_2}$$

تبدیل دهدهی اعشاری به دودویی

$$\sum_{i=-l}^{n-1} b_i 2^i$$

$0.29 \times 2 = \boxed{0}.58$

$0.58 \times 2 = \boxed{1}.16$

$0.16 \times 2 = \boxed{0}.32$

$0.32 \times 2 = \boxed{0}.64$

$0.64 \times 2 = \boxed{1}.28$

$0.28 \times 2 = \boxed{0}.56$

$0.56 \times 2 = \boxed{1}.12$

(0.29)D = (0 . 0 1 0 0 1 0 1)B

$1.125 = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{4} + \cdots$ → ***A = 1***

$0.250 = B + \frac{C}{2} + \frac{D}{4} + \cdots$ → ***B= 0***

$0.500 = C + \frac{D}{2}$ → ***C = 0***

$1.00 = D + 0$ → ***D = 1***

$\boxed{1.125 = (1.001)}$

نمایش در مبنای هشت و شانزده

Octal

- با توجه به استفاده‌ی گسترده‌ی اعداد دودویی در سیستم‌های دیجیتال و حجم بالایی که برای نمایش اشغال می‌کنند، استفاده از مبنای هشت و شانزده متداول است. برتری این دو مبنا بر سایر مبناها در این است که تبدیل بین این‌مبناها و مبنای دو به سادگی قابل انجام می‌باشد.
- در مبنای شانزده افزون بر ارقام 0 تا 9 از حروف A تا F نیز استفاده می‌شود.

Hexadecimal (Hex)

Decimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Hexadecimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
Binary	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

نمایش در مبنای هشت و شانزده(ادامه...)

مثال ۱

$2AF_{16} \quad =(?)_{10}$

$= 2\times16^2 + 10\times16^1 + 15\times16^0$

$= 512 + 160 + 15$

$=687_{10}$

مثال ۲

$(857)_{10}=(?)_2$

$=(1101011001)_2$

مثال ۳

$(\underline{101}\ \underline{011}\ \underline{010}\ \underline{111})_2=(?)_8$

$=(5327)_8$

مثال ۴

$(\underline{1010}\ \underline{1111}\ \underline{0010}\ \underline{0101})_2=(?)_{16}$

$=(AF25)_{16}$

نمایش در مبنای هشت و شانزده (ادامه...)

مثال ۵

$$9F2_{16} = (?)_2$$

9 F 2

1001 1111 0010 =

$$=100111110010_2$$

مثال ٦

با دقت شش رقم دودویی

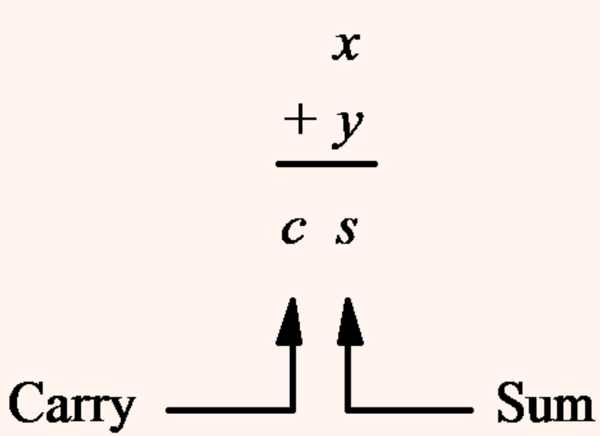
$$(35.37)_D = (?)_B = (?)_{hex} = (?)_{octal}$$

$$(\,35.37\,)_D = (\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,.\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,)_B$$

$$(\,23.5C\,)_{hex} = (\,43.27\,)_{octal}$$

جمع ارقام بدون علامت

- در جمع در مبنای دو تنها از دو رقم ‘1’ و ‘0’ استفاده می‌شود.
- بدین ترتیب چهار حالت ممکن است رخ دهد.



جمع اعداد دودویی بدون علامت

مثال ۱

$$
\begin{array}{lr}
X= & x_4x_3x_2x_1x_0 \\
+Y= & y_4y_3y_2y_1y_0 \\
\hline
S= & s_4s_3s_2s_1s_0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\color{red}{1\,1\,1} \\
0\,1\,1\,1\,1 \\
+\,0\,1\,0\,1\,0 \\
\hline
1\,1\,0\,0\,1
\end{array}
$$

رقم های نقلی

مثال ۲

$$
\begin{array}{r}
\color{red}{1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1} \\
0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \\
+\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \\
\hline
1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0
\end{array}
\quad \text{یا} \quad
\begin{array}{r}
\color{red}{1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1} \\
0\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 \\
+\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \\
\hline
1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0
\end{array}
$$

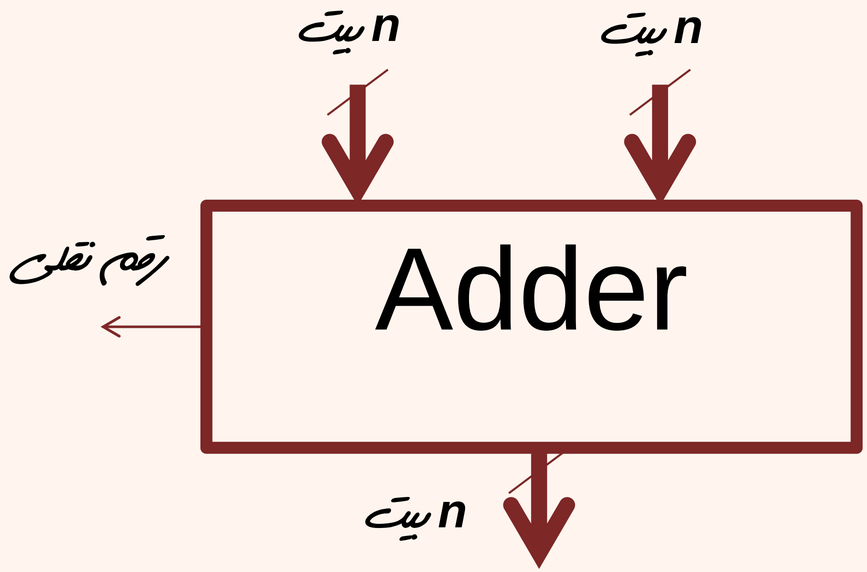
زنجیره‌ی رقم های نقلی باعث کندی عملیات جمع می‌شود، در درس‌های آینده (مدار منطقی) با این مشکل و روش‌های مقابله با آن آشنا خواهید شد

سرریز در اعداد صحیح بدون علامت

- در ادامه برای سادگی فرض می‌کنیم اعداد چهار بیتی باشند:
  - می‌توان از ۰ تا ۱۵ را با چهار بیت نمایش داد.
- برای نمایش اعداد به حافظه‌ای که در نظر گرفته شده است، محدود هستیم.
- در صورتی که حاصل عملیات (جمع) در فضای در نظر گرفته نگنجد، گفته می‌شود که «سرریز (Overflow)» رخ داده است.

```
  1111
+ 0001
------
 10000
```

جمع‌کننده و سرریز در اعداد بدون علامت



رقم نقلی مشخص می‌کند، که سرریز رخ داده است یا نه

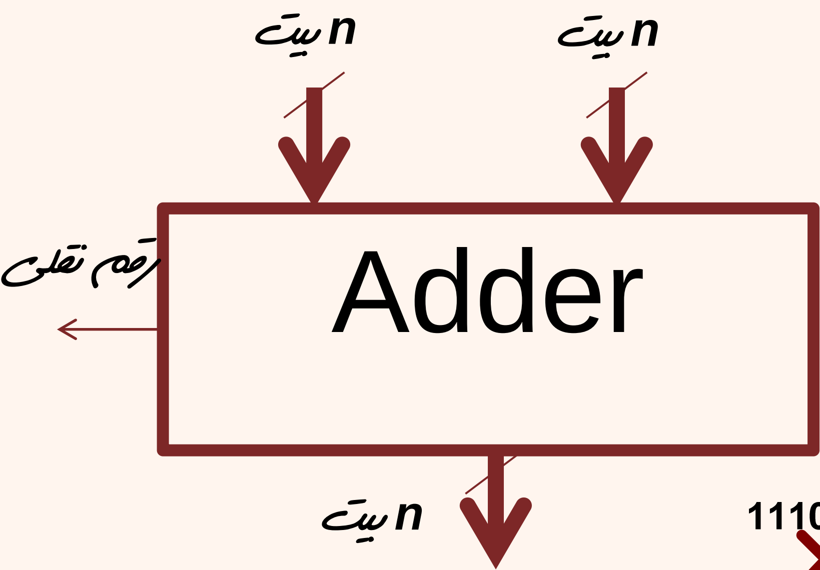
$$
\begin{array}{r}
1111 \\
+\ 0001 \\
\hline
10000
\end{array}
$$

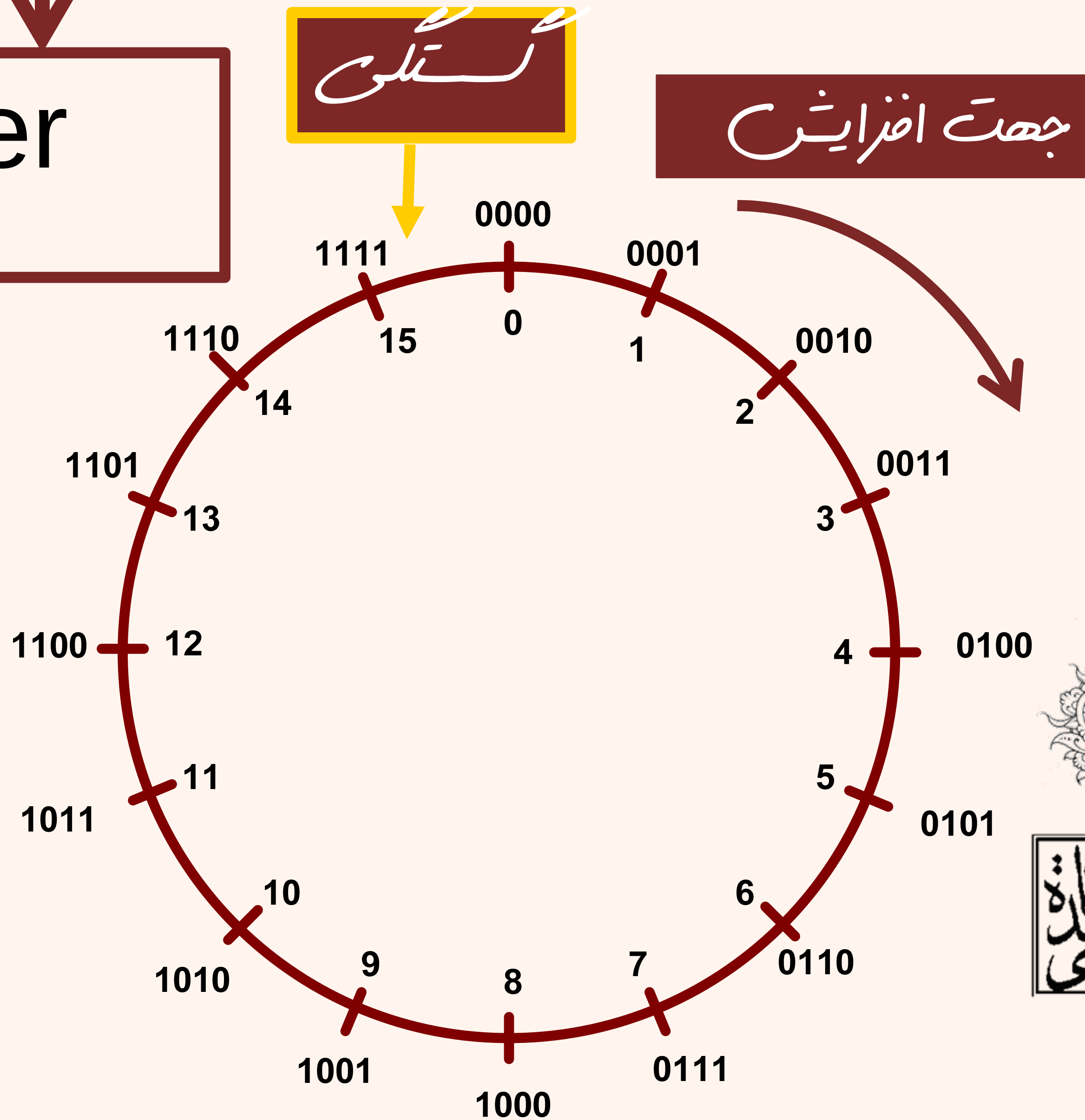
این بیت قابل ذخیره کردن نیست، جا نمی‌شود

جمع کننده در عمل به صورت زیر عمل می‌کند:

15+1=0

جمع‌کننده‌ی پیمانه‌ای





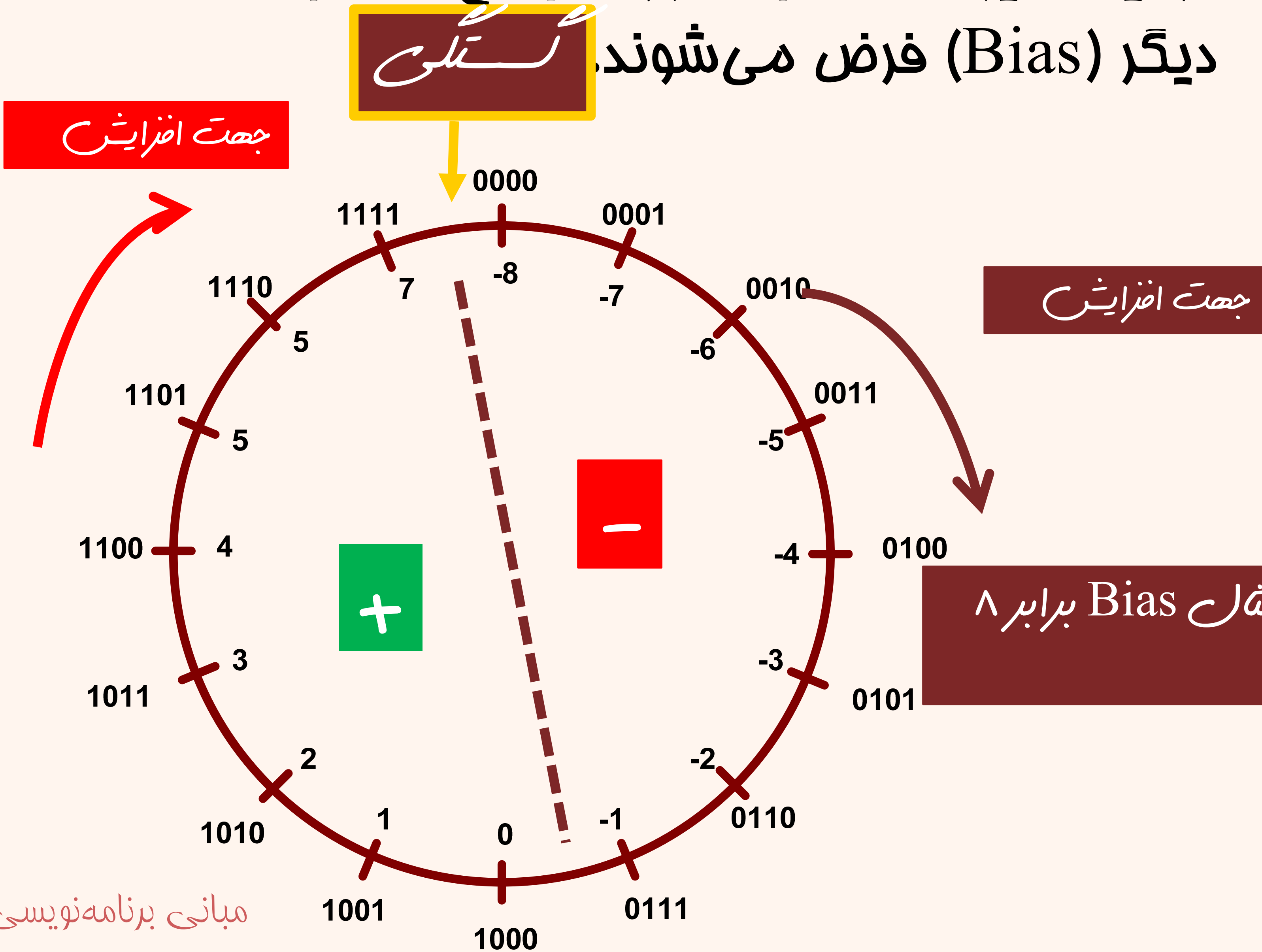
تاکنون در مورد اعداد بدون‌علامت بحث شد، در ادامه خواهیم دید اعداد علامت‌دار چگونه ذخیره می‌شوند؟

- اعداد صحیح بدون‌علامت Unsigned integer
- اعداد علامت‌دار
  - سیستم‌عددی پیش‌قدردار Biased representation
  - سیستم علامت و مقدار Signed magnitude
  - اعداد مکمل ۱ 1’s complement
  - اعداد مکمل ۲ 2’s complement

Biased representation

سیستم عددی پیش‌قدردار

- در این شیوه اعداد به صورت جمع شده با عددی دیگر (Bias) فرض می‌شوند.



در این مثال Bias برابر ۸ است.

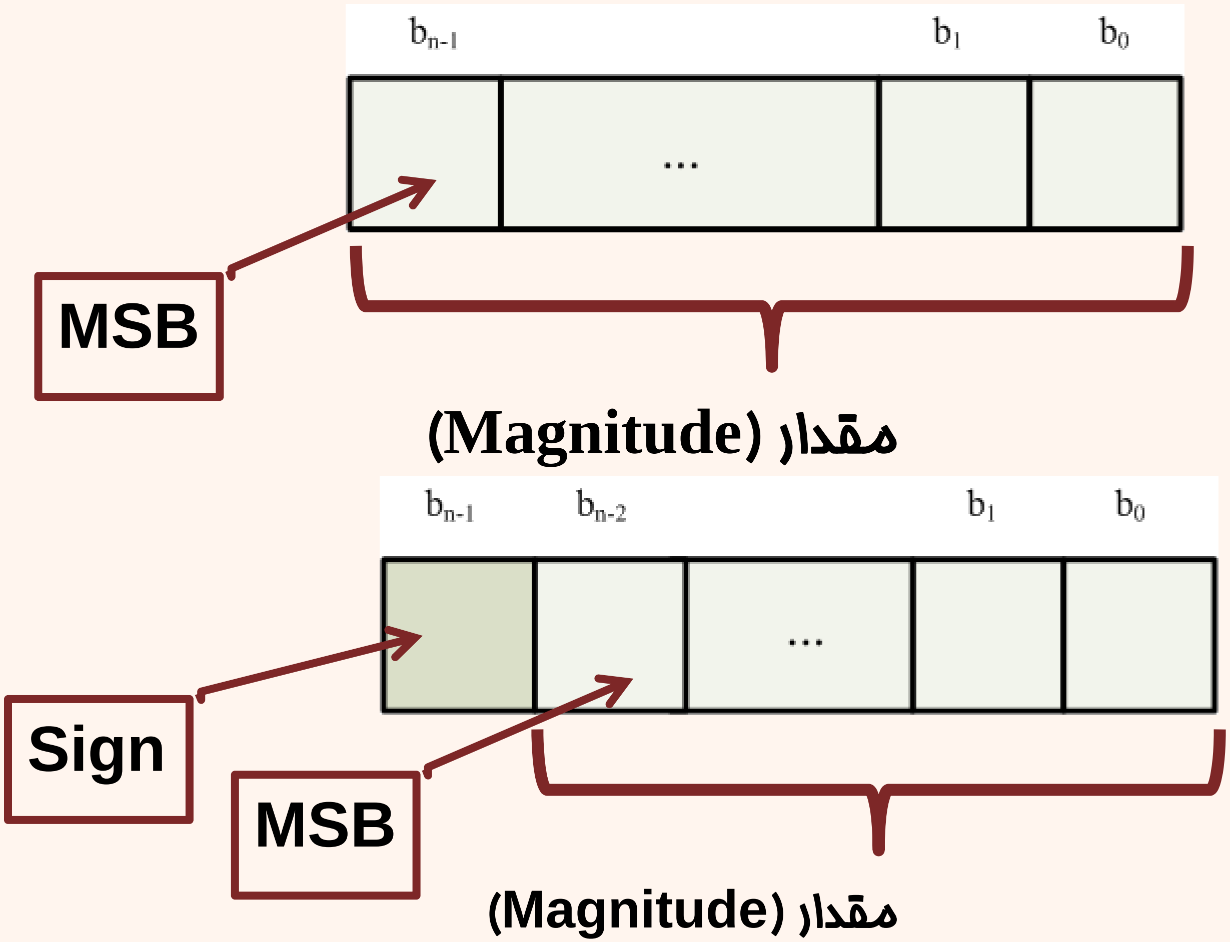
سیستم عددی پیش‌قدردار (ادامه...)

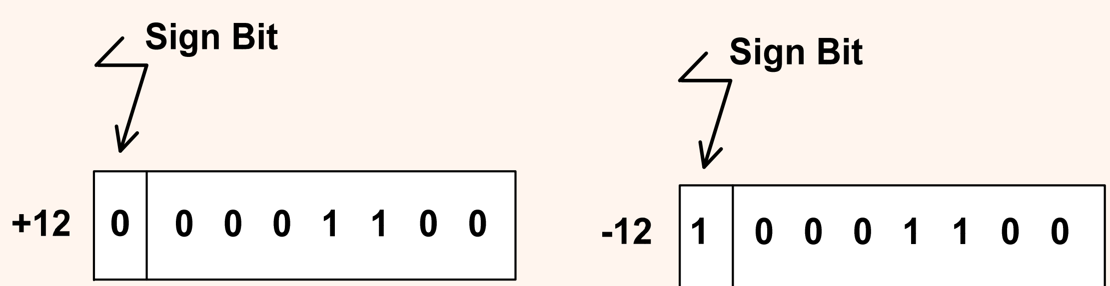
- در سیستم پیش‌قدردار، به ازای هر عملیات جمع یا تفریق نیاز به تصحیح نتیجه خواهیم داشت:

x + y + bias = (x + bias) + (y + bias) – bias
x – y + bias = (x + bias) – (y + bias) + bias

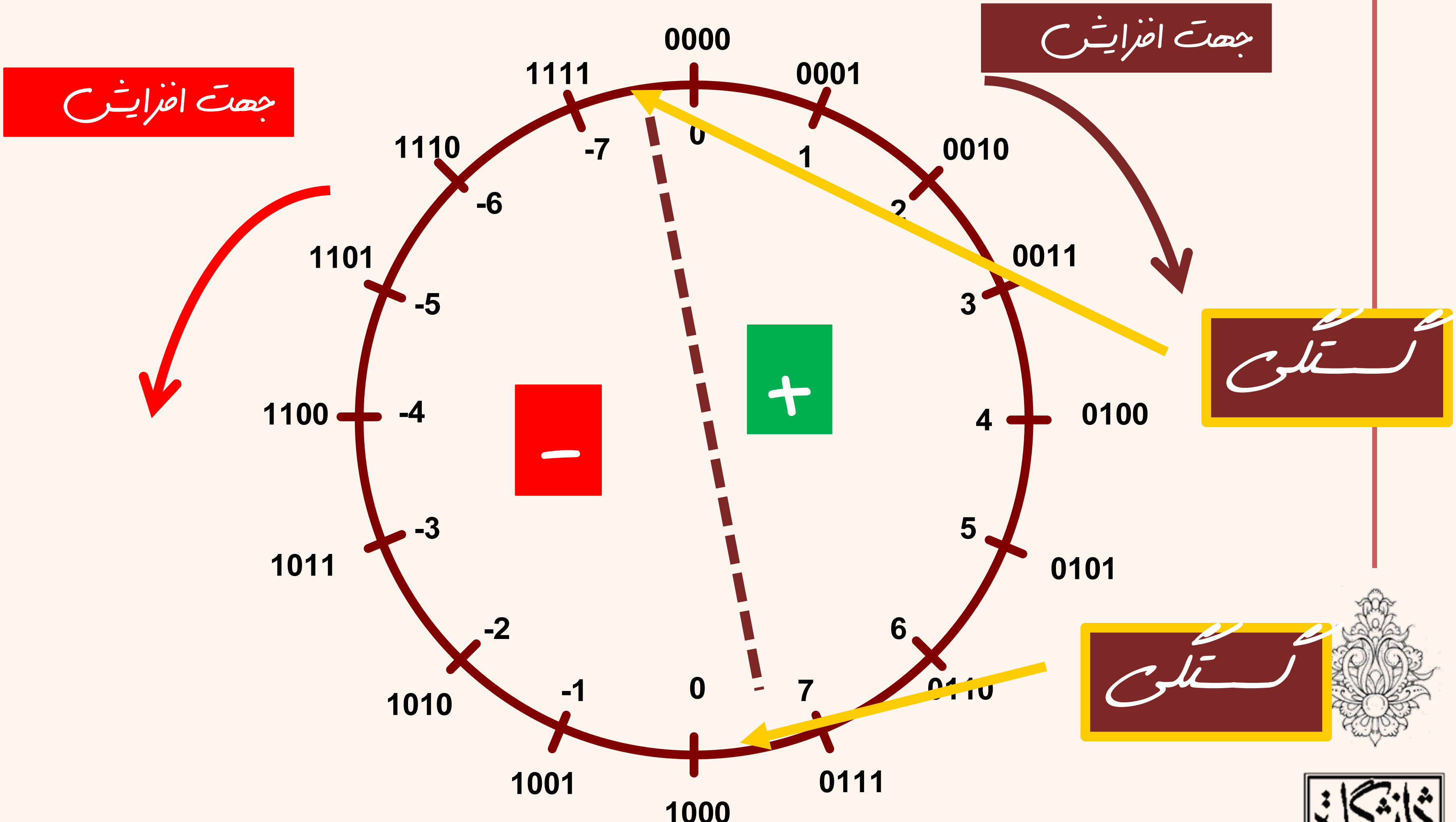
بدین ترتیب نیاز به سخت‌افزار پیچیده‌تری برای عملیات جمع خواهیم داشت.

سیستم عددی علامت و مقدار





نمایش گرافیکی اعداد در سیستم علامت و مقدار



در این سیستم عددی برای جمع اعداد منفی باید از جمع کننده‌ی دیگری استفاده کرد، که باعث پیچیدگی سخت‌افزار خواهد شد.
ضمنا دو نمایش برای صفر وجود دارد.