Information Compression

مقدمات ریاضی (۱)

مروری بر
فضای تبدیل (خطی)

فشرده‌سازی اطلاعات

۴۰-۱۰-۰۰۲-۰۱

بخش پنجم

قسمت اول

دانشگاه شهید بهشتی
پژوهشکده‌ی فضای مجازی
بهار ۱۴۰۰
احمد محمودی ازناوه

فهرست مطالب

- پردازش تصویر در فضای تبدیل(فرکانسی)
- تبدیل‌های خطی
  - مرور برخی مفاهیم پایه
  - تبدیل‌های یک‌بعدی
  - بردارهای پایه
  - بردارهای متعامد یکه
  - تبدیل‌های یکانی
- تبدیل‌های دوبعدی
  - تبدیل‌های جدایی‌پذیر
  - تصاویر پایه

چرا تبدیل؟

- سیگنال اصلی در حوزه‌ی زمانی-مکانی دارای همبستگی بین نمونه‌ها (پیکسل‌ها) می‌باشد.
- برای محاسبه و پردازش نیاز به روابطی چون کانولوشن است که پیچیدگی بالایی دارد.
- هدف از تبدیل
  - از میان بردن همبستگی میان نمونه‌ها
  - تبدیل روابطی چون کانولوشن به ضرب در حوزه‌ی تبدیل
  - استفاده از داده‌ی تبدیل یافته در سنجش برخی کمیت‌ها

فضای برداری

- یک فضای برداری شامل مجموعه‌ای بردار «مستقل خطی» است.
- بردارهای فضای مذکور توسط «ترکیب خطی» از آن مجموعه قابل ساخت است.
- مثال:

بردارهای یکه

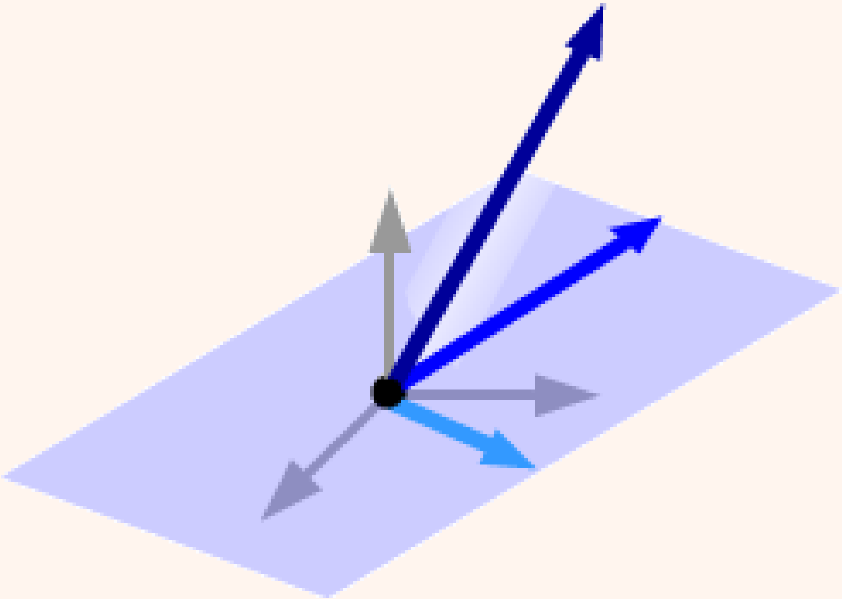
$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

استقلال خطی

- اگر v_iها بردارهای یک فضا در نظر گرفته شوند، در صورتی که «مستقل خطی» باشند، خواهیم داشت:

$$\sum_i a_i v_i = 0, \quad iff \quad a_i = 0 \quad ,\forall i$$



نکات

- اگر v_iها «بردارهای پایه» باشند، هر برداری مانند υ از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\forall \upsilon \neq 0, \quad \sum_i b_i v_i = \upsilon \quad , \ \exists b_i \neq 0$$

- اگر بردارهای پایه متعامد باشد، فضای برداری را متعامد گویند:

orthogonal

$$\langle v_i , v_j \rangle = \begin{cases} 0 & for \ i \neq j \\ \left\| v_j \right\|^2 & for \ i = j \end{cases}$$

اگر اندازه‌ی بردارها به مقدار یک نرمالیزه گردد، یک فضای متعامد نرمال ایجاد می‌شود.

orthonormal

تبدیل در فضای یک‌بعدی

برای سادگی بیشتر، نخست به بررسی تبدیل‌ها در فضای یک‌بعدی خواهیم پرداخت:

$$x(n) \quad \rightarrow \quad X(K)$$

$$0 \le n \le N-1 \qquad\qquad 0 \le K \le N-1$$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K,n)x(n)$$

$$0 \le K \le N-1$$

تبدیل در فضای یک‌بعدی (ادامه...)

$$X(K)=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha(K,n)x(n) \qquad 0\le K\le N-1$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ . \\ . \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & . & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{1,0} & . & . & . & . \\ \alpha_{2,0} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & . & . & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ . \\ . \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$X_{N\times 1}=A_{N\times N}\,x_{N\times 1}$$

تبدیل معکوس

- اگر داشته باشیم:

$$X = Ax$$

- می‌توان ماتریس B را به گونه‌ای در نظر گرفت که بتوان بردار x را از X تخمین زد:

$$\tilde{x} = B.X$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{K=0}^{N-1} b(n,K)X(K) \quad 0 \le n \le N-1$$

- چنان‌چه ماتریس A وارون‌پذیر باشد، $B=A^{-1}$، می‌توان با تبدیل وارون به مقدار اصلی x دست یافت.

ویژگی‌های ماتریس تبدیل

- اگر A ماتریسی مختلط باشد، مزدوج- ترانهاده‌ی A را به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$A^{*T}$$

- مثال:

- اگر A را به صورت زیر داشته باشیم مزدوج- ترانهاده‌ی آن‌را محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 3+7i & 0 \\ 2i & 4-i \end{bmatrix}. \qquad \bar{A} = \begin{bmatrix} \overline{3+7i} & \bar{0} \\ \overline{2i} & \overline{4-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-7i & 0 \\ -2i & 4+i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-7i & -2i \\ 0 & 4+i \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های ماتریس تبدیل (ادامه...)

$$X(K)=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha(K,n)x(n)$$

- در ماتریس‌های متعامد، ترانهاده و معکوس یک ماتریس چه ارتباطی با هم دارند؟

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ . \\ . \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & . & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{1,0} & . & . & . & . \\ \alpha_{2,0} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & . & . & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ . \\ . \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$AA^T=?$

ویژگی‌های ماتریس تبدیل (ادامه...)

• در ماتریس‌های متعامد، ترانهاده و معکوس یک ماتریس چه ارتباطی با هم دارند؟

$$A^T = A^{-1}$$

• ماتریس یکانی

• هنگامی که A^{*T} و معکوس یک ماتریس با هم برابر باشد یک «ماتریس یکانی» خواهیم داشت.

Unitary

$$A^{*T} = A^{-1}$$

نکته

$$A^{*T} \triangleq A^H$$

Unitary and Hermitian

مثال

- نشان دهید ماتریس A یکانی است.

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$A\,A^{*T} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = I_2$$

- پس $A^{*T} = A^{-1}$ و ماتریس یکانی است.

معکوس تبدیل یکانی

- اگر ماتریس A معکوس‌پذیر باشد، با در نظر گرفتن $B=A^{-1}$ می‌توان به گونه‌ی یکتا به ماتریس B و تبدیل معکوس دست یافت.
- اگر ماتریس A ماتریسی یکانی باشد، در این حالت تبدیل به‌دست آمده یکانی است.
- روابط تبدیل و معکوس آن به صورت زیر است:

$$X(K)=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha(K,n)x(n)$$

$$x(n)=\sum_{K=0}^{N-1}b(n,K)X(K)$$

$$A^{*T}=A^{-1}$$

$$x(n)=\sum_{K=0}^{N-1}a^{*}(K,n)X(K)$$

تبدیل

$$X(K)=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha(K,n)x(n)$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ . \\ . \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & . & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{1,0} & . & . & . & . \\ \alpha_{2,0} & . & . & . & . \\ & & & & \\ \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & . & . & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ . \\ . \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$x(n)=\sum_{K=0}^{N-1}b(n,K)X(K)$$

$$x(n)=\sum_{K=0}^{N-1}a^{*}(K,n)X(K)$$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ . \\ . \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \alpha_{2,0} & . & \alpha_{N-1,0} \\ \alpha_{0,1} & . & . & . & . \\ \alpha_{0,2} & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{0,N-1} & \alpha_{1,N-1} & . & . & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ . \\ . \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

خصوصیات تبدیل یکانی

- تمامی مقادیر ویژه‌ی ماتریس A دارای اندازه‌ی یک هستند.
- انرژی بردار اصلی و تبدیل یافته یکسان است.

$$\|X\|^2 = (A.x)^H .A.x = x^H .A^H .A.x = \|x\|^2$$

- مقادیر اصلی همبستگی بالا و مقادیر تبدیل یافته ناهم‌بسته‌اند.

تبدیل دو بعدی

$$f(n_1, n_2) \quad ----> \quad F(K_1, K_2)$$

$$0 \le n_1, n_2 \le N-1 \qquad\qquad 0 \le K_1, K_2 \le N-1$$

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{f_{K_1,K_2}}(n_1, n_2)$$

$$0 \le K_1, K_2 \le N-1$$

تبدیل معکوس

$$f(n_1,n_2)=\sum_{K_1=0}^{N-1}\sum_{K_2=0}^{N-1}F(K_1,K_2)t_{b_{n_1,n_2}}(K_1,K_2)$$

$$0\le n_1,n_2\le N-1$$

t_f و t_b نشان‌دهنده‌ی تبدیل رو به جلو و رو به عقب هستند، که به تمامی ضرایب K_1, K_2, n_1, n_2 وابسته‌اند.

تبدیل جدایی‌پذیر

- اگر بتوان تبدیلی را به صورت زیر نوشت، آن را «جدایی‌پذیر» می‌گویند:

$$t_{f_{K_1,K_2}}(n_1,n_2)=t_{1\,f_{K_1}}(n_1).t_{2\,f_{K_2}}(n_2)$$

- اگر دو بخش با هم برابر باشند، تبدیل را «متقارن» گویند.
- اگر تبدیلی جدایی‌پذیر و متقارن باشد، نحوه‌ی نمایش ماتریسی را به‌گونه‌ی زیر خواهیم داشت:

$$F=T_f\times f\times T_f^T$$

- برای معکوس تبدیل(حقیقی) نیز خواهیم داشت:

$$f=T_bFT_b^T$$

تبدیل جدایی‌پذیر متقارن

$$F(K_1,K_2)=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1,n_2)t_{f_{K_1,K_2}}(n_1,n_2)$$

$$t_{f_{K_1,K_2}}(n_1,n_2)=t_{1\,f_{K_1}}(n_1).t_{2\,f_{K_2}}(n_2)$$

$$F(K_1,K_2)=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1,n_2)t_{1\,f_{K_1}}(n_1).t_{2\,f_{K_2}}(n_2)$$

$$F(K_1,K_2)=\boxed{\sum_{n_1=0}^{N-1} t_{1\,f_{K_1}}(n_1)\underbrace{\sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1,n_2).t_{2\,f_{K_2}}(n_2)}_{\text{اعمال تبدیل روی سطرها}}}$$

اعمال تبدیل روی ستون‌ها

تبدیل جدایی‌پذیر

- اگر داشته باشیم:

$$F = T_f f T_f^T \qquad T_f^{-1} = T_f^{*T}$$

- تبدیل دو بعدی یکانی خواهیم داشت، در این حالت با صرفنظر کردن از اندیس‌های f و b داریم:

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$

$$0 \le K_1, K_2 \le N-1$$

$$f(n_1, n_2) = \sum_{K_1=0}^{N-1} \sum_{K_2=0}^{N-1} F(K_1, K_2) t^*_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$

$$0 \le n_1, n_2 \le N-1$$

تبدیل معکوس

$$F = TfT^{T} \quad T^{-1} = T^{*T}$$

$$T^{*T}.F.T^{T^{*T}} = T^{*T}.T.f.T^{T}.T^{T^{*T}}$$

$$T^{*T}.F.T^{*} = f$$

$$F = T.f.T^{T}$$

$$f = T^{*T}.F.T^{*}$$

انرژی در حوزه‌ی تبدیل

- مقدار انرژی در ماتریس اصلی و ماتریس انتقال یافته یکسان است.

$$\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\left\| f(n_1,n_2)\right\|^2=\sum_{K_1=0}^{N-1}\sum_{K_2=0}^{N-1}\left\| F(K_1,K_2)\right\|^2$$

- توزیع انرژی در ماتریس نتیجه‌شده بسته به نوع انتقال می‌تواند متفاوت باشد.
- به بیانی دیگر تمرکز انرژی بسته به تبدیل در محدوده‌ی خاصی قرار می‌گیرد.

تصاویر پایه

Basis Images

2	-1
5	6

$$2\times\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} + -1\times\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + 5\times\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} + 6\times\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

بردار یکه محور اول

بردار یکه محور دوم

بردار یکه محور سوم

بردار یکه محور چهارم

$$F(K_1,K_2)=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1,n_2)t_{K_1,K_2}(n_1,n_2)$$

$$0\le K_1,K_2\le N-1$$

تصاویر پایه(ادامه...)

$$F(K_1,K_2)=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1,n_2)t_{K_1,K_2}(n_1,n_2)$$

$$0 \le K_1,K_2 \le N-1$$

- اگر مقادیر K_1 و K_2 را ثابت در نظر بگیریم برای تمامی مقادیر n_1 و n_2 جمع صورت می‌پذیرد.

$$A_{n_1,n_2}=t_{K_1,K_2}(n_1,n_2)$$

$$=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}(f(n_1,n_2).A_{n_1,n_2})$$

تصاویر پایه(ادامه...)

- نتیجه‌ی به دست آمده همان ضرب داخلی دو ماتریس است که حاصلی اسکالر دارد.

$$F(K_1,K_2)=\sum_{n_1=0}^{N-1}\sum_{n_2=0}^{N-1}\left(f(n_1,n_2)\times A_{K_1,K_2}(n_1,n_2)\right)=\left\langle f, A_{K_1,K_2}\right\rangle$$

$$0\le K_1,K_2\le N-1$$

$$\boxed{F=T.f.T^T}$$

- ماتریس A به دست آمده نتیجه‌ی ضرب خارجی K_1 امین ستون ماتریس در T^T ترانهاده‌ی K_2 امین ستون T^T است:

$$A_{K_1,K_2}=\tau_{K_1(N\times 1)}\times\ \tau^T_{K_2(1\times N)}$$

با مشخص بودن تصویر پایه می‌توان دید شهودی بهتری نسبت تبدیل مورد نظر داشت.

$$F = T \times f \times T^T$$

$$F_{k_1,k_2} = \tau^T_{K_1(1\times N)} \times f_{(N\times N)} \times \tau_{K_2(N\times 1)}$$

$$F_{k_1,k_2} = \langle f, \boxed{A_{k_1,k_2}} \rangle$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & . & \alpha_{0,N-1} \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{k_1,0} & \alpha_{k_1,1} & \alpha_{k_1,2} & . & \alpha_{k_1,N-1} \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & . & . & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet \\ . & . & . & . & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet \end{bmatrix}}_{f} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & . & \alpha_{k_2,0} & . & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{1,0} & . & \alpha_{k_2,1} & . & . \\ \alpha_{2,0} & . & \alpha_{k_2,2} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{N-1,0} & . & \alpha_{k_2,N-1} & . & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix}}_{T^T}$$

سطر k_1

$\tau^T_{K_1(1\times N)}$

ستون k_2

$\tau_{K_2(N\times 1)}$

$$\tau^{T}_{K_1(1\times N)} \times f_{(N\times N)}$$

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \boxed{\tau^{T}_{K_1(1\times N)}} \\ \\ \\
\end{array}
\begin{bmatrix}
\alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & . & \alpha_{0,N-1} \\
. & . & . & . & . \\
\alpha_{k_1,0} & \alpha_{k_1,1} & \alpha_{k_1,2} & . & \alpha_{k_1,N-1} \\
. & . & . & . & . \\
\alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & . & . & \alpha_{N-1,N-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet \\
. & . & . & . & . \\
\bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet
\end{bmatrix}
$$

$$T \qquad\qquad\qquad f$$

Sum up of all elements of a each column

$$\begin{bmatrix} \bullet\times\alpha_{k_1,0} & \bullet\times\alpha_{k_1,0} & \bullet\times\alpha_{k_1,0} & . & \bullet\times\alpha_{k_1,0} \\ \bullet\times\alpha_{k_1,1} & \bullet\times\alpha_{k_1,1} & \bullet\times\alpha_{k_1,1} & . & \bullet\times\alpha_{k_1,1} \\ \bullet\times\alpha_{k_1,2} & \bullet\times\alpha_{k_1,2} & \bullet\times\alpha_{k_1,2} & . & \bullet\times\alpha_{k_1,2} \\ . & . & . & . & . \\ \bullet\times\alpha_{k_1,N-1} & \bullet\times\alpha_{k_1,N-1} & \bullet\times\alpha_{k_1,N-1} & . & \bullet\times\alpha_{k_1,N-1} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ & . & \circ \end{bmatrix}}_{\tau^T_{K_1(1\times N)} \times f_{(N\times N)}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{k_2,0} \\ \alpha_{k_2,1} \\ \alpha_{k_2,2} \\ . \\ \alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}}_{\tau_{K_2(N\times 1)}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \circ\times\alpha_{k_2,0} & \circ\times\alpha_{k_2,1} & \circ\times\alpha_{k_2,2} & . & \circ\times\alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}}_{\text{Sum up of all elements}} \Rightarrow F_{k_1,k_2}$$

F_{k_1,k_2} :

Sum up of all elements

$$\begin{bmatrix} \bullet\times\alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,0} & \bullet\times\alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,1} & \bullet\times\alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,2} & . & \bullet\times\alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,N-1} \\ \bullet\times\alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,0} & \bullet\times\alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,1} & \bullet\times\alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,2} & . & \bullet\times\alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,N-1} \\ \bullet\times\alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,0} & \bullet\times\alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,1} & \bullet\times\alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,2} & . & \bullet\times\alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,N-1} \\ . & . & . & . & . \\ \bullet\times\alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,0} & \bullet\times\alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,1} & \bullet\times\alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,2} & . & \bullet\times\alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}$$

Dot product

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,2} & . & \alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,2} & . & \alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,2} & . & \alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,N-1} \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,2} & . & \alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}}_{A_{k_1,k_2}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet \\ . & . & . & . & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & . & \bullet \end{bmatrix}}_{f}$$

$$F_{k_1,k_2} = \left\langle f, A_{k_1,k_2} \right\rangle$$

$$A_{k_1,k_2}:$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,2} & . & \alpha_{k_1,0}\times\alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,2} & . & \alpha_{k_1,1}\times\alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,2} & . & \alpha_{k_1,2}\times\alpha_{k_2,N-1} \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,2} & . & \alpha_{k_1,N-1}\times\alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k_1,0} \\ \alpha_{k_1,1} \\ \alpha_{k_1,2} \\ . \\ \alpha_{k_1,N-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_2,2} & . & \alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}$$

$$A_{K_1,K_2} = \tau_{K_1(N\times 1)} \times \tau^T_{K_2(1\times N)}$$

مثال

$$F(0,0) = \langle f\ , A_{0,0} \rangle$$

$$F(5,6) = \langle f\ , A_{5,6} \rangle$$

هر عنصر از F را می‌توان با محاسبه‌ی ضرب داخلی ماتریس f در ماتریس متناظر A محاسبه نمود.

A_{K_1,K_2} تصاویر پایه نامیده می‌شوند.

مثال

- اگر f را تصویر اصلی و T را ماتریس انتقال در نظر بگیریم:

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad T^{-1}=T^{H} \qquad f=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$F=T.f\,T^{T}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 6\\ -2 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}10 & -2\\ -4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

تصاویر پایه

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad T^{-1}=T^{H}\Rightarrow T^{*T}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$f=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$A_{0,0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad A_{0,1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$A_{1,0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \qquad A_{1,1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix}\langle f, A_{0,0}\rangle & \langle f, A_{0,1}\rangle\\ \langle f, A_{1,0}\rangle & \langle f, A_{1,1}\rangle\end{bmatrix}$$

مثال

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \qquad T^{-1}=T^{H} \qquad f=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

- اگر f را تصویر اصلی و T را ماتریس انتقال در نظر بگیریم:

$$A_{0,0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad A_{0,1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \quad A_{1,0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} \quad A_{1,1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$F_{0.0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=(1+2+3+4)/2=5$$

$$F_{0.1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}=(1+3-2-4)/2=-1$$

$$F_{1.0}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=(1+2+-3-4)/2=-2$$

$$F_{1.1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=(1+4-2-3)/2=0$$

$$F=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$$

منبع

- Fundamentals of digital image processing

  Book by Anil Kumar Jain