

مقدمات (۳)

فشرده‌سازی اطلاعات

۰۱-۷۰۲-۱۰-۱۴۰

بخش پنجم

قسمت سوم

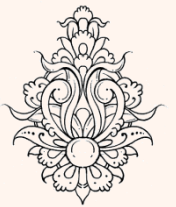
تبدیل فوریه ۲



دانشگاه شهید بهشتی  
پژوهشکده‌ی فضای مجازی  
بهار ۱۳۹۹  
احمد محمودی ازناوه

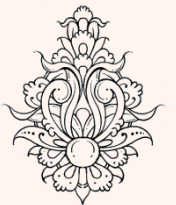
# فهرست مطالب

- تصاویر پایه‌ی تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دوبعدی
- تحلیل در حوزه‌ی فرکانس
  - فیلتر پایین‌گذر گاوسی
  - تحلیل سایر فیلترها

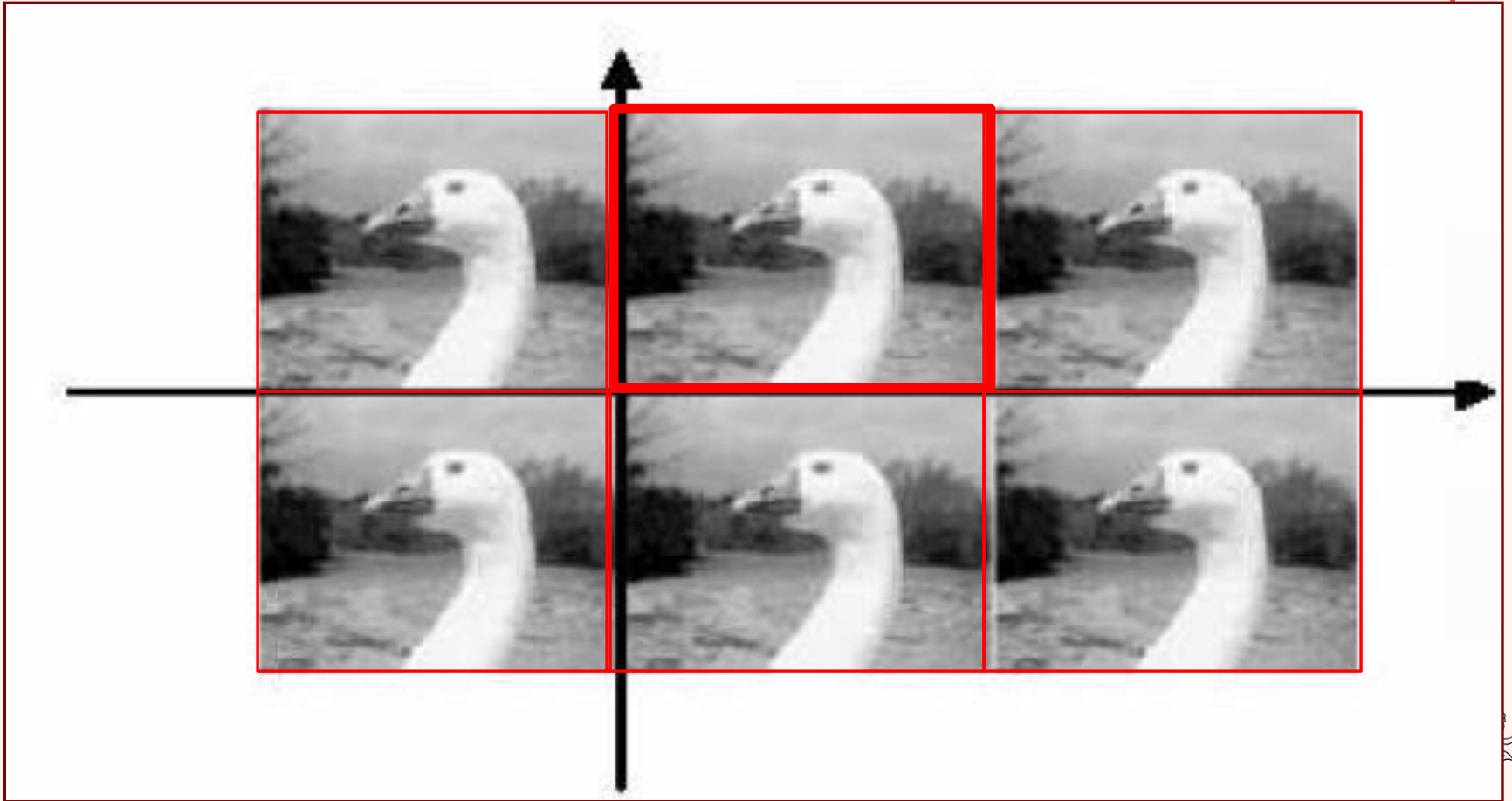


# تبدیل فوریه گسسته (ادامه...)

- برای محاسبات کامپیوتری از تبدیل گسسته فوریه (DFT) استفاده می‌شود.
- به همین جهت برای پردازش تصویر دیجیتال هم خواهیم داشت:
- همانند تبدیل گسسته فوریه یک بعدی می‌باید ماتریس تصویر ابتدا متناوب گردد.



# متناوب نمودن تصویر



چگونگی متناوب کردن تصویر (سیگنال دو بعدی)



# تبدیل گسسته‌ی یک بعدی

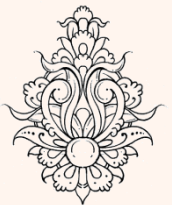
$$\begin{aligned} \{z(n)\} &\Leftrightarrow \{Z(k)\} \\ n, k &= 0, 1, \dots, N-1 \\ W_N &= \exp\{-j2\pi/N\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Z(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cdot W_N^{nk} \\ z(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) \cdot W_N^{-nk} \end{cases}$$

• ماتریس یکانی DFT به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{n,k} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{nk} \right\}, \quad 0 \leq k, n \leq N-1$$

- بردارهای پایه‌ی تبدیل یکانی DFT ستون‌های  $F^T$  یا همان  $F$  است. (زیرا  $F$  ماتریسی متقارن است).
- تذکر: برای این که ماتریس تبدیل یکانی باشد، رابطه‌ی تبدیل در  $\sqrt{N}$  ضرب شده است.

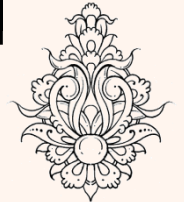


$$X(K) = \sum_{n=0}^{N_0-1} \alpha(K, n)x(n)$$

# ماتریس تبدیل

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$W_N = \exp\{-j2\pi / N\}$$



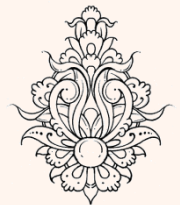
# ماتریس تبدیل یک بعدی (چهار نمونه)

For  $N = 4$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \mathbf{F}x$$

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{nk} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right\}$$



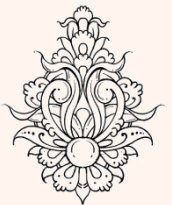
# ماتریس تبدیل یک بعدی (ادامه...)

$$X(0) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{0}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(0)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(0)}{4}}$$

$$X(1) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{1}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(1)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(1)}{4}}$$

$$X(2) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{2}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(2)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(2)}{4}}$$

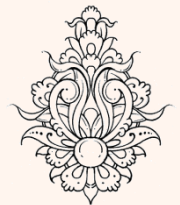
$$X(3) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{3}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(3)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(3)}{4}}$$





# ماتریس تبدیل یک بعدی (ادامه...)

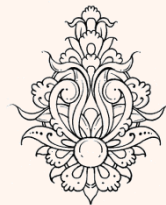
$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$



# ماتریس تبدیل یک بعدی (مثال)

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

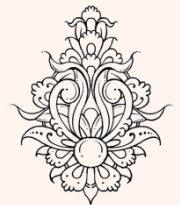
$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



# ماتریس تبدیل یک بعدی (چهار نمونه)

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

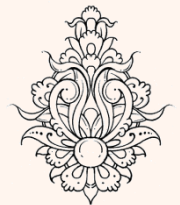


# تبدیل معکوس

$$X = Wx \rightarrow DFT$$



$$x = W^H X \rightarrow IDFT$$



- به وسیله‌ی دستور  $fft$  می‌توان DFT یک سیگنال را محاسبه نمود.

**$Y = fft(X,n)$  returns the  $n$ -point DFT**

- اگر طول  $X$  از  $n$  کم‌تر باشد عموماً به همان تعداد صفر به انتهای سیگنال اضافه شود.



# تبدیل فوریه دوبعدی گسسته

برای سادگی ماتریس را مربعی در نظر می‌گیریم

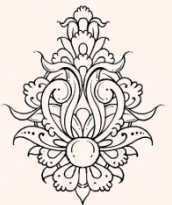
$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-j2\pi(ux/N + vy/N))$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp(j2\pi(ux/N + vy/N))$$

$$t_f = \frac{1}{N} \exp(-j2\pi(ux/N + vy/N))$$

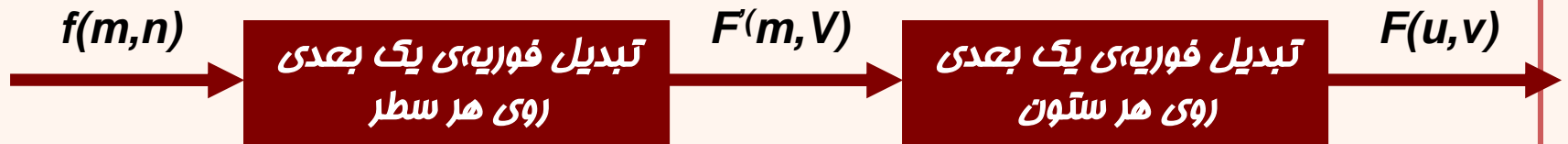
$$t_b = \frac{1}{N} \exp(j2\pi(ux/N + vy/N))$$

$$t_b = t_f^{*T} = t_f^{-1} \Rightarrow \text{unitary matrix}$$



# خاصیت جدایی‌پذیری تبدیل فوریه

- تبدیل فوریه دارای خاصیت **خطی** است.
- تبدیل فوریه تبدیلی **جدایی‌پذیر** است.



$$\begin{aligned} F(u,v) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \exp(-j 2\pi(um / N + vn / N)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp(-j 2\pi um / N) \sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) \exp(-j 2\pi vn / N) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F'(m,v) \exp(-j 2\pi um / N) \end{aligned}$$



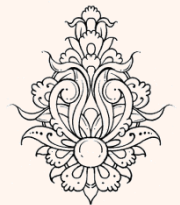
$$W_N = \exp(-j2\pi/N)$$

# تصاویر پایه

- برای تبدیل دو بعدی فوریه تصاویر پایه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ W_N^u \\ W_N^{2u} \\ \vdots \\ W_N^{(N-1)u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & W_N^v & W_N^{2v} & \dots & W_N^{(N-1)v} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

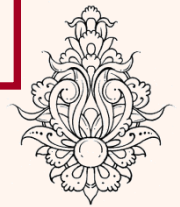




$$W_N = \exp(-j2\pi/N)$$

## تصاویر پایه

$$A(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & W_N^v & W_N^{2v} & \dots & W_N^{(N-1)v} \\ W_N^u & W_N^{u+v} & W_N^{u+2v} & \dots & W_N^{u+(N-1)v} \\ W_N^{2u} & W_N^{2u+v} & W_N^{2u+2v} & \dots & W_N^{2u+(N-1)v} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ W_N^{(N-1)u} & W_N^{(N-1)u+v} & W_N^{(N-1)u+2v} & \dots & W_N^{(N-1)u+(N-1)v} \end{bmatrix}$$



# به دست آوردن تصاویر پایه

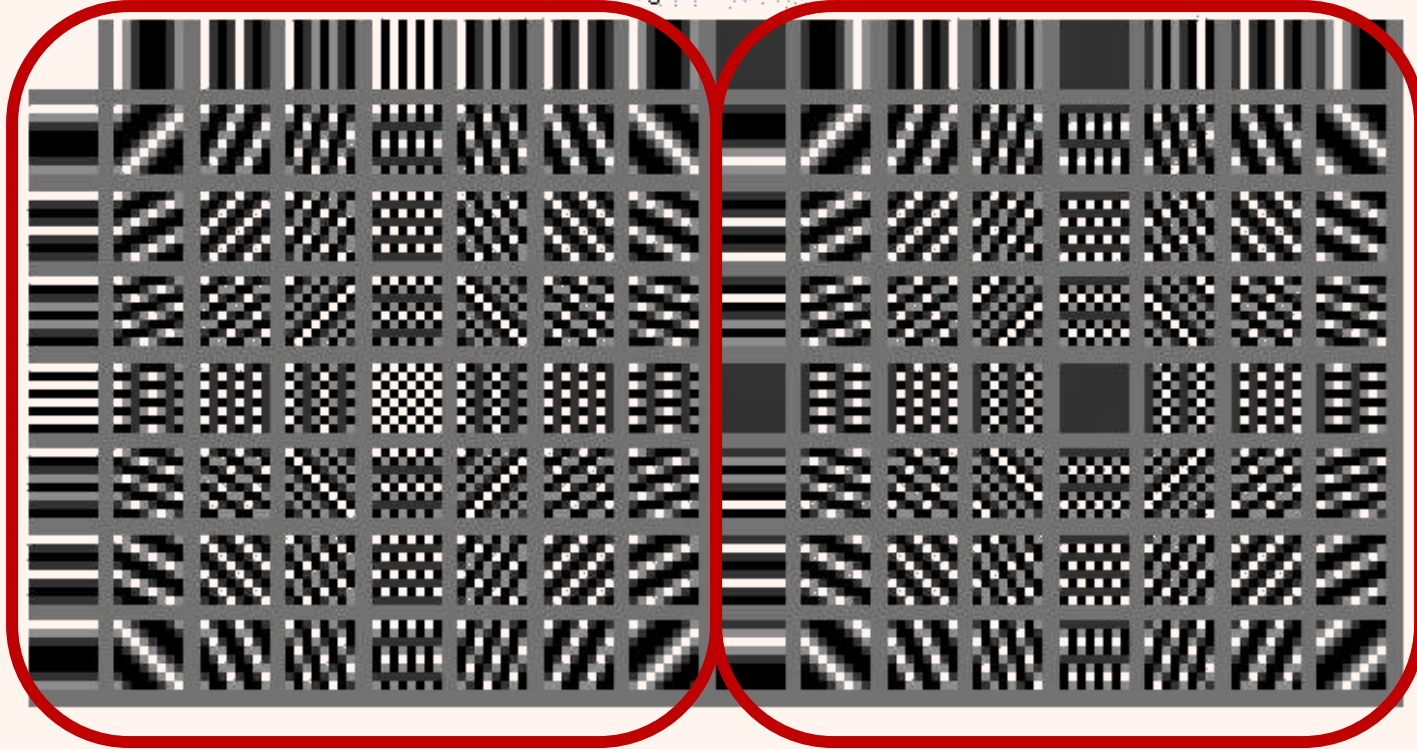
```
N=8;  
F=zeros(N,N);  
for n=1:N  
    for k=1:N  
        F(n,k)=exp(-j*2*(pi/N)*(n-1)*(k-1));  
    end  
end  
A=cell(N,N);  
for u=1:N  
    for v=1:N  
        A{u,v}=(F(:,u)*F(v,:));  
    end  
end
```

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} w_N^{nk} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right\}$$



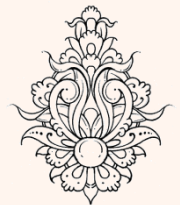
# تصاویر پایه

Basis Images of 2-D DFT, N=8



قسمت مقیقی

قسمت موهومی

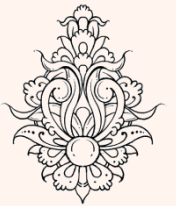


# نکات

- هر یک از تصاویر پایه نشان‌دهنده‌ی خواص مولفه‌های مربوط است.
- مؤلفه‌ی  $(0,0)$  نشان‌دهنده‌ی مقدار میانگین یا مقدار DC تصویر است.
- طبق خواص تبدیل فوریه داریم:

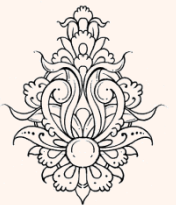
$$real(i,j) == real(N-1-i, N-1-j)$$

- بیشترین فرکانس متعلق به مولفه‌ی  $(4,4)$  است (برای تبدیل  $8 \times 8$ ).
- هرچه به مرکز نزدیک می‌شویم فرکانس افزایش می‌یابد.

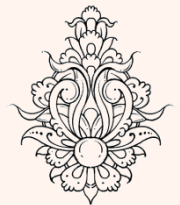
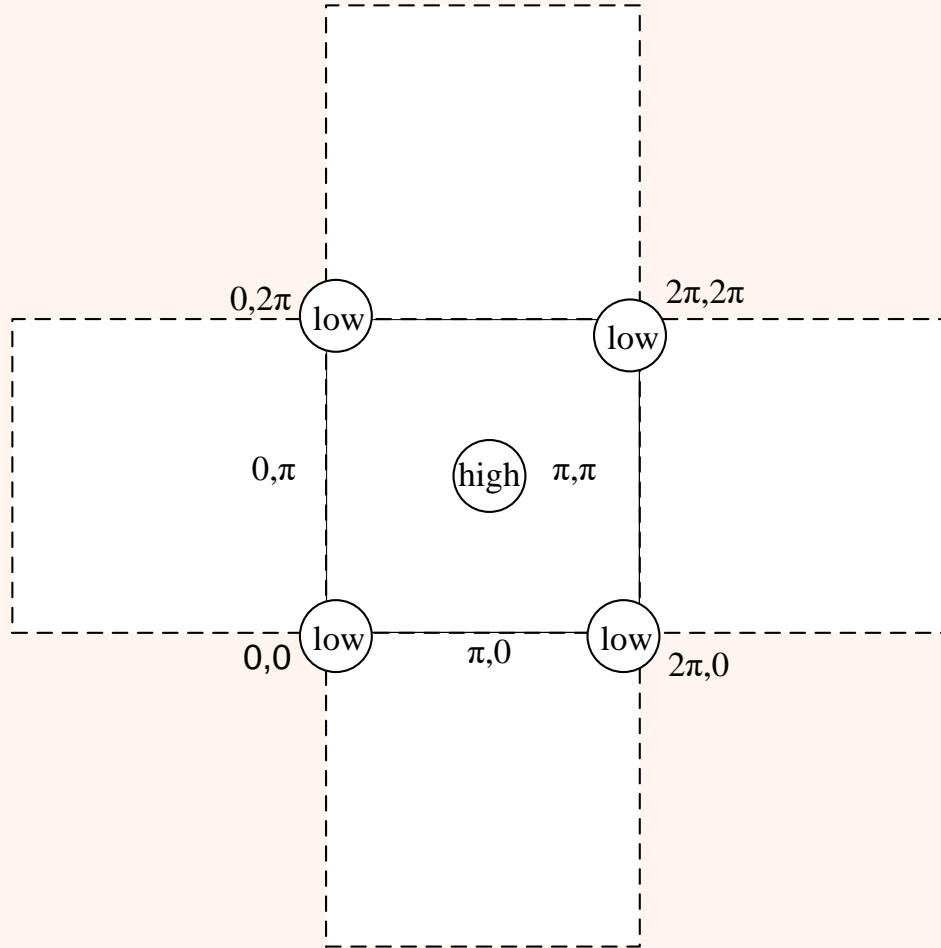


# نکات

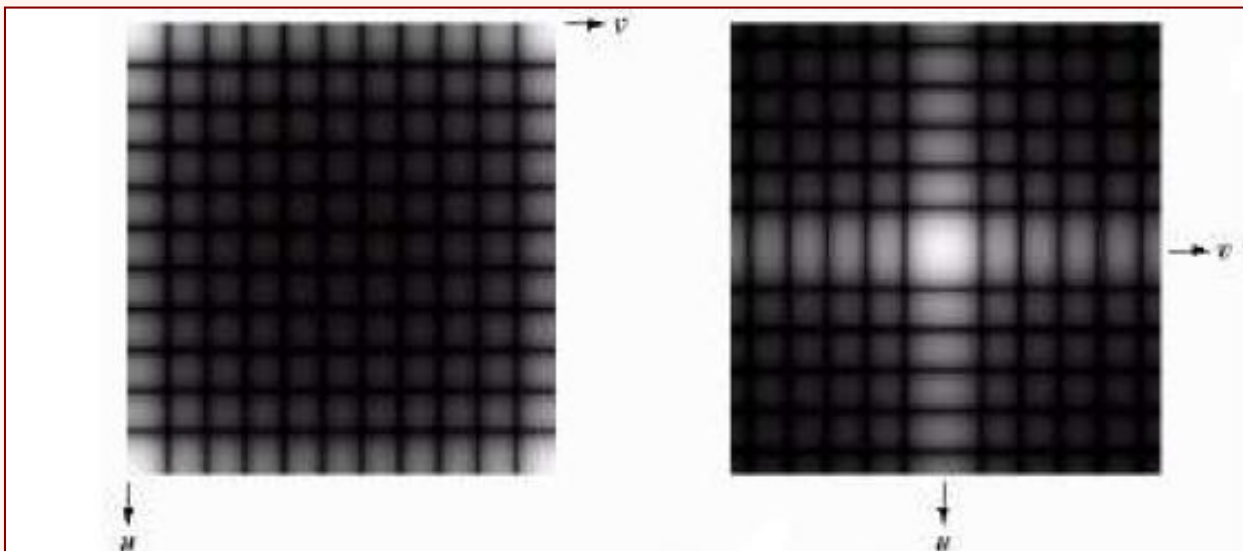
- تصاویر پایه‌ی افقی و عمودی نشان‌دهنده‌ی وجود چنین ساختارهایی در تصویرند.
- اگر ضرایب متناظر با هر یک از تصاویر پایه صفر باشد یعنی میزان اشتراک چنین تصویر پایه‌ای در ساختن تصویر اصلی صفر است.
- به صورت کلی هر ضریب میزان دخالت تصویر پایه‌ی متناظر را در ساختن تصویر اصلی نشان می‌دهد.



# دامنه‌ی فرکانس سیگنال‌های زمان‌گسسته

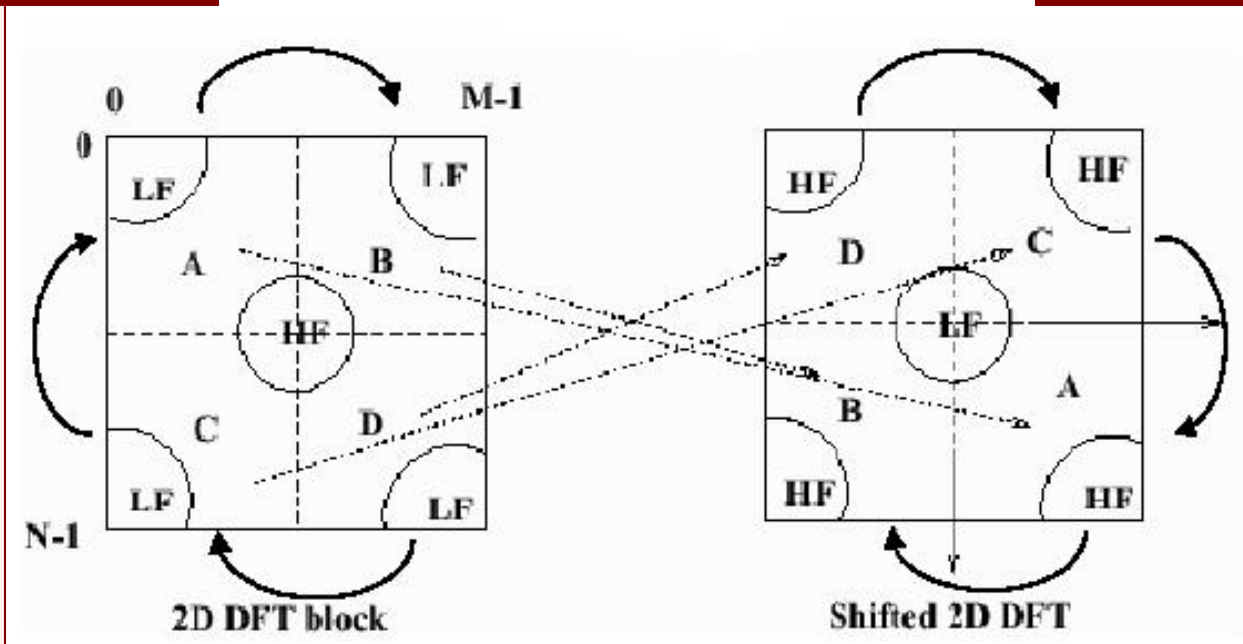


# نمایش اندازه‌ی تبدیل فوریه در دو روش



مبدأ بالا (سمت چپ)

مبدأ وسط



## Fourier Spectrum

$$|F(u, v)| = \left[ R^2(u, v) + I^2(u, v) \right]^{1/2}$$

## Phase Angle

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[ \frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{-j\phi(u, v)}$$

## Power Spectrum

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$





# تأثیر فاز

- تبدیل فوریه دارای دو مقدار **حقیقی** و **موهومی** است.
- جهت تحلیل مقادیر اندازه و فاز مناسبه می‌شود که برای تبدیل معکوس به هر دوی این مقادیر نیاز است.

اندازهی تبدیل فوریه (مبدأ به وسط  
انتقال یافته)



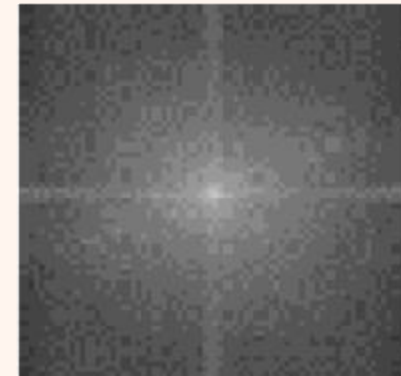
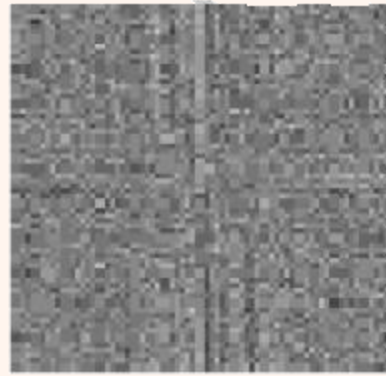
فاز تبدیل فوریه



تصویر اصلی

اندازهی تبدیل با استفاده از لگاریتم

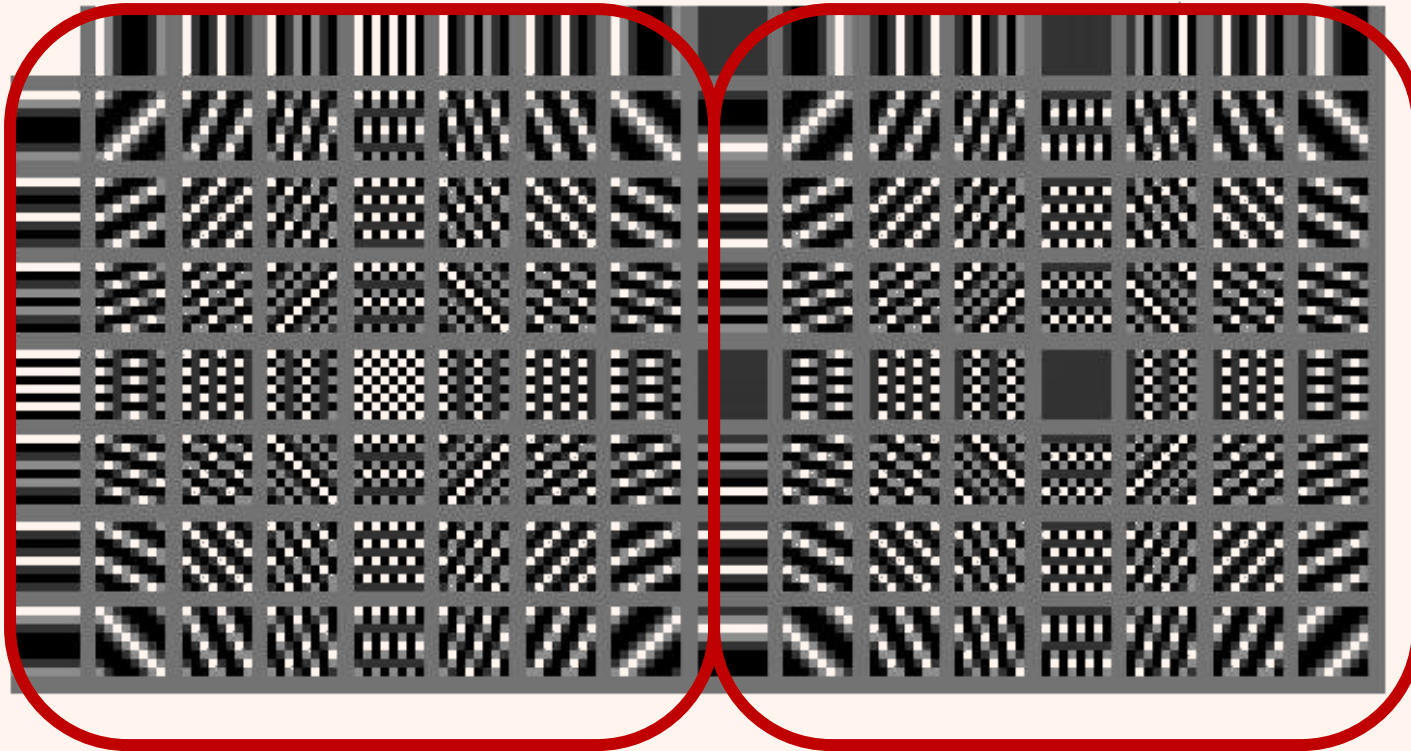
تصویر بازسازی شده با اندازه  
تبدیل و فاز صفر



ژانسیکا  
سپیدی  
بهشتی

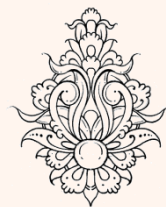
# تصاویر پایه

Basis Images of 2-D DFT; N=8



قسمت مقیقی

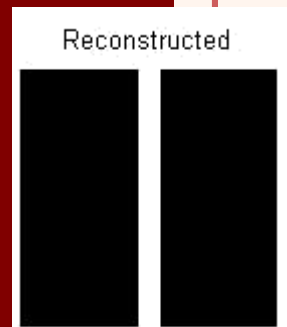
قسمت موهومی



```

f=zeros(128,128);
f(:,60:70)=1;
imshow(f,[ ]);title('Original');
F = fft2(f);
S2=log(1+abs(F));
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');
Fc=fftshift(F);
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of Abs of
shifted version');
Phase=atan2(imag(F),real(F));
figure;imshow(Phase,[ ]);title('Phase Angle');
f2=real(ifft2(F));
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');

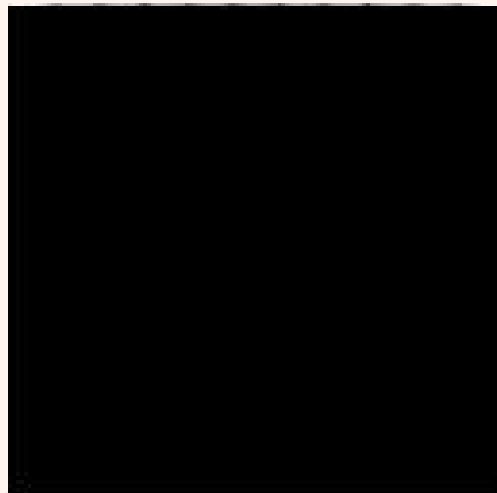
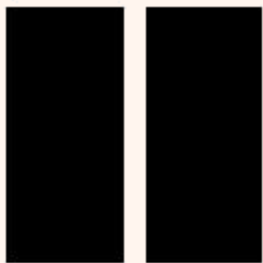
```



Log of Abs of F

Log of Abs of shifted version

Original



Phase Angle



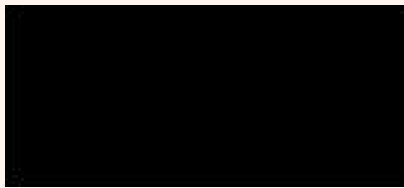
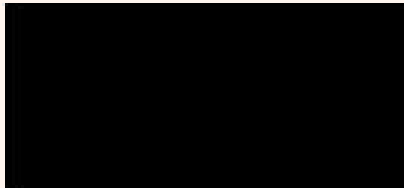
# مثال

```
f=zeros(128,128);  
f(60:70,:)=1;  
imshow(f,[ ]);title('Original');  
F = fft2(f);  
S2=log(1+abs(F));  
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');  
Fc=fftshift(F);  
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of  
Abs of shifted version');  
f2=real(ifft2(F));  
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```

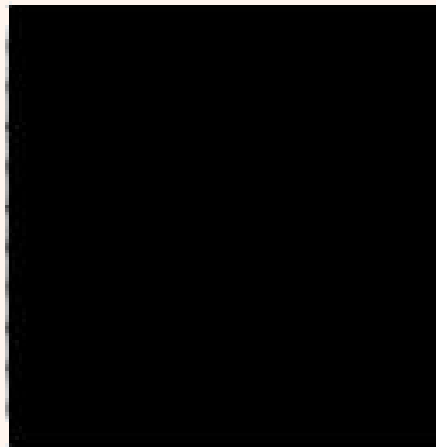
Reconstructed



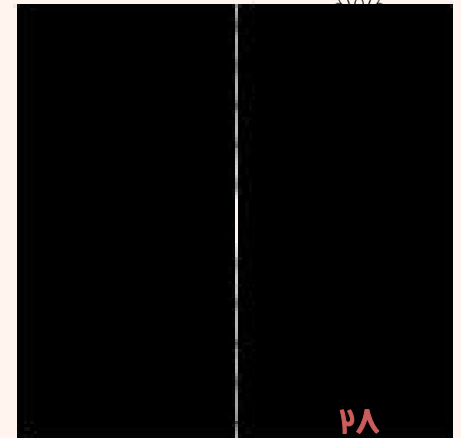
Original



Log of Abs of F



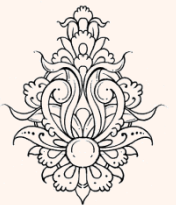
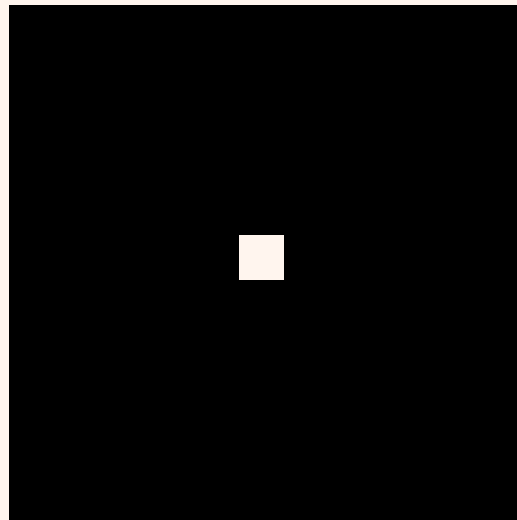
Log of Abs of shifted version



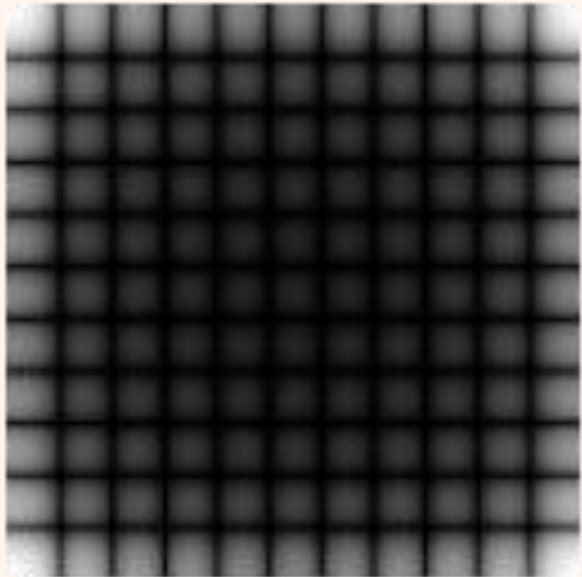
# مثال ۳

```
f=zeros(128,128);  
f(58:68,58:68)=1;  
imshow(f,[ ]);title('Original');  
F = fft2(f);  
S2=log(1+abs(F));  
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');  
Fc=fftshift(F);  
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of Abs of  
shifted version');  
f2=real(ifft2(F));  
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```

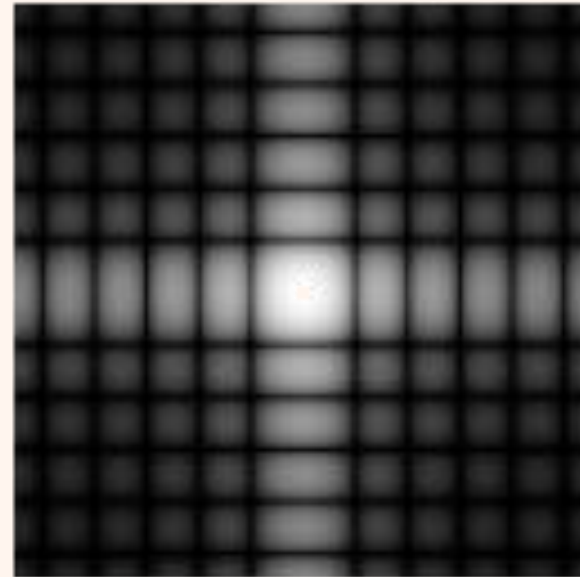
Original



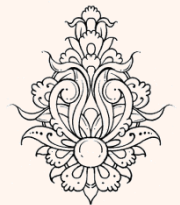
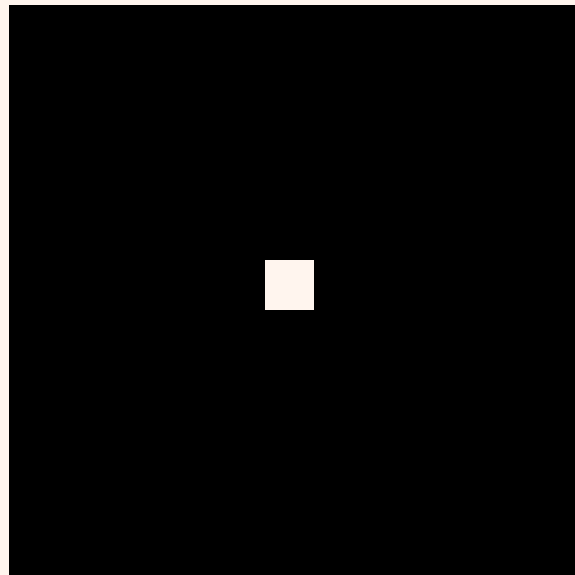
Log of Abs of F



Log of Abs of shifted version



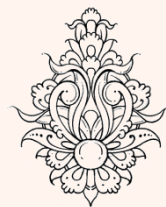
Reconstructed



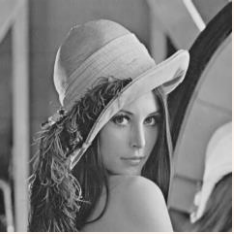
# خصوصیات تبدیل فوریه

• جهت نشان دادن خواص فرکانسی (تخمیرات روشنایی در تصویر)، از تبدیل فوریه استفاده می‌شود.

- نوامی با روشنایی یکسان فرکانس صفر
- نوامی با تخمیرات روشنایی تدریجی فرکانس پایین
- نوامی با تخمیرات روشنایی ناگهانی فرکانس بالا



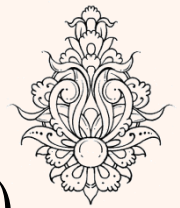
# تصاویر پایه



بخش حقیقی

بخش موهومی

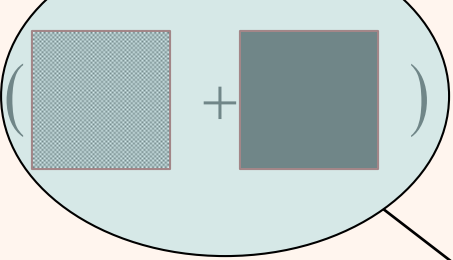
$$\begin{aligned}
 & F(0,0) \times \left( \begin{array}{c} \text{[White Box]} \\ + \\ \text{[Black Box]} \end{array} \right) + F(0,1) \times \left( \begin{array}{c} \text{[Vertical Gradient]} \\ + \\ \text{[Horizontal Gradient]} \end{array} \right) + \dots \\
 & \mathbf{508068} \qquad \qquad \qquad \mathbf{-8732.34 + 37028.8i} \\
 & F(1,0) \times \left( \begin{array}{c} \text{[Vertical Gradient]} \\ + \\ \text{[Horizontal Gradient]} \end{array} \right) + F(1,1) \times \left( \begin{array}{c} \text{[Diagonal Gradient]} \\ + \\ \text{[Anti-Diagonal Gradient]} \end{array} \right) \\
 & \mathbf{331.5 - 19201.6i} \qquad \qquad \mathbf{-26840.2 + 22678.2i} \\
 & F(2,0) \times \left( \begin{array}{c} \text{[Horizontal Stripes]} \\ + \\ \text{[Vertical Stripes]} \end{array} \right) + \dots \\
 & \mathbf{-6749.5 - 3133.36i} \\
 & F(3,0) \times \left( \begin{array}{c} \text{[Horizontal Stripes]} \\ + \\ \text{[Vertical Stripes]} \end{array} \right) + \dots \\
 & \mathbf{474.481 - 9085.3i} \\
 & \dots \qquad \dots \qquad \dots \\
 & F(32,32) \times \left( \begin{array}{c} \text{[Grid Pattern]} \\ + \\ \text{[Black Box]} \end{array} \right) \\
 & \mathbf{-133. - 279.i} \\
 & \dots \qquad \dots \qquad \dots
 \end{aligned}$$



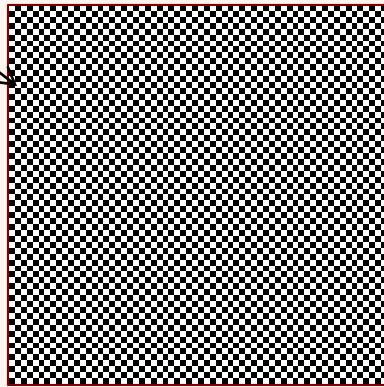
تأسیسات  
سازمان  
پژوهشی



$$F(32,32) \times$$



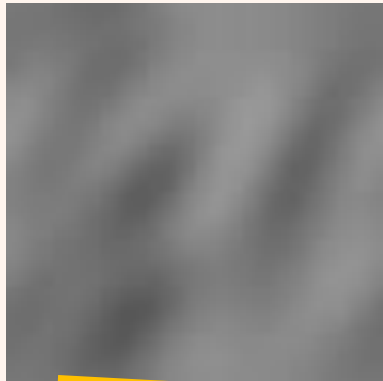
# تصاویر پایه



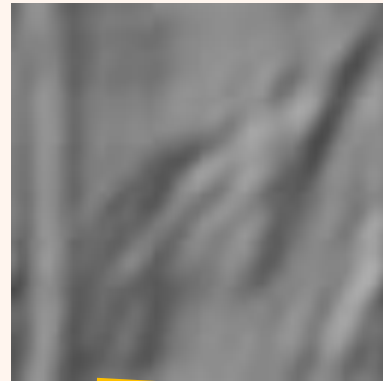
بازسازی تصویر با استفاده از تصاویر پایه



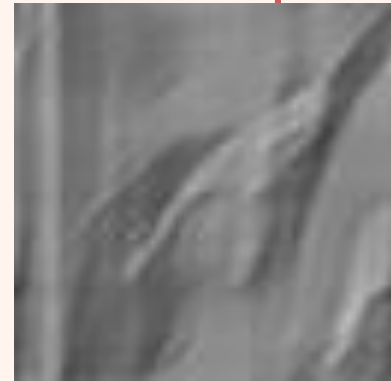
۱(۰.۰۲٪)



۱۶(۰.۳۹٪)



۱۰۰(۲٪)



۱۴۰۰(۹.۷٪)

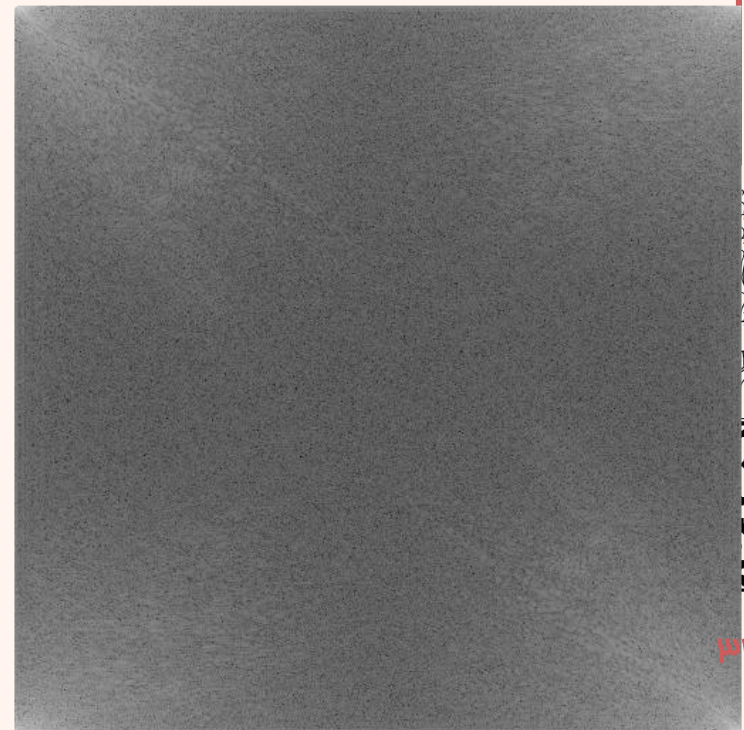
```
f = imread('lena.gif');  
imshow(f, [ ]);title('Original');  
F = fft2(f);  
S2=log(1+abs(F));  
figure;imshow(S2,[ ]);  
title('Log of Abs of F');  
Fc=fftshift(F);  
figure;imshow(log(1+abs(Fc)), [ ]);  
title('Log of Abs of shifted version');  
f2=real(ifft2(F));  
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed')
```

اندازه‌ی تبدیل با استفاده از لگاریتم

Original

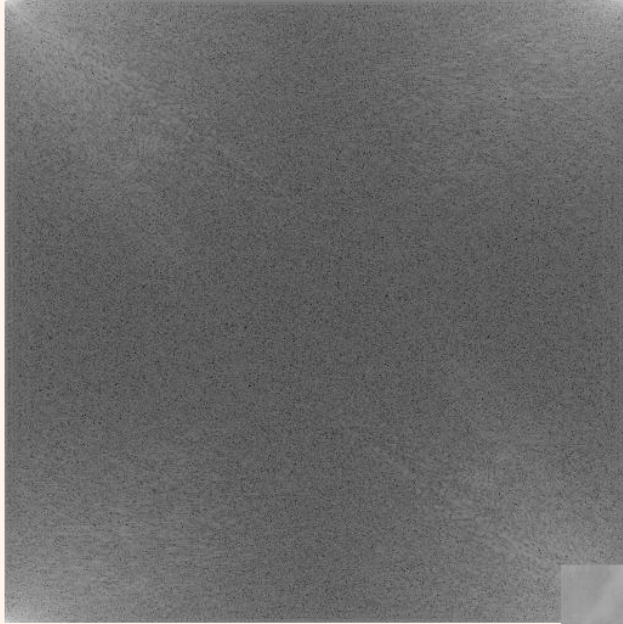


تصویر اصلی

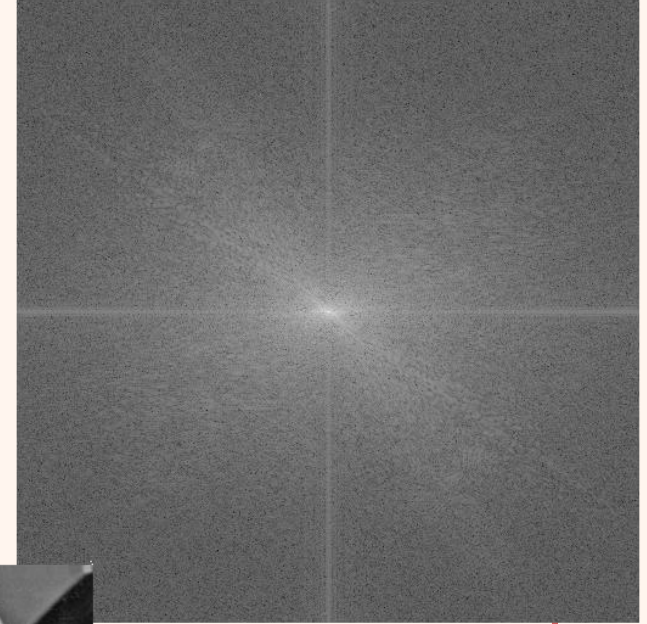


# مثال (ادامه...)

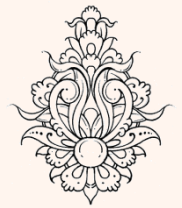
Log of Abs of F



Log of Abs of shifted version

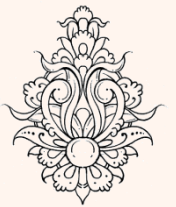


Reconstructed



تصویر دوباره سازی  
شده

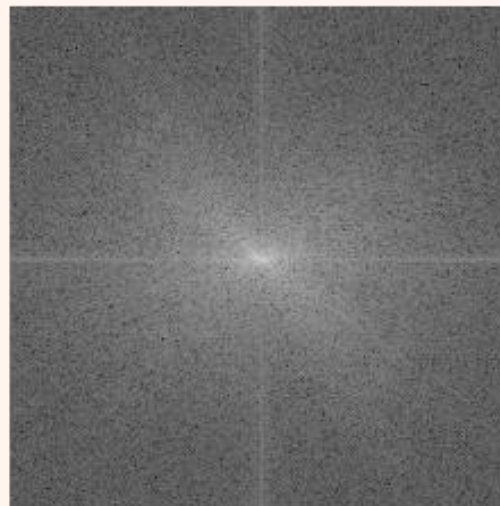
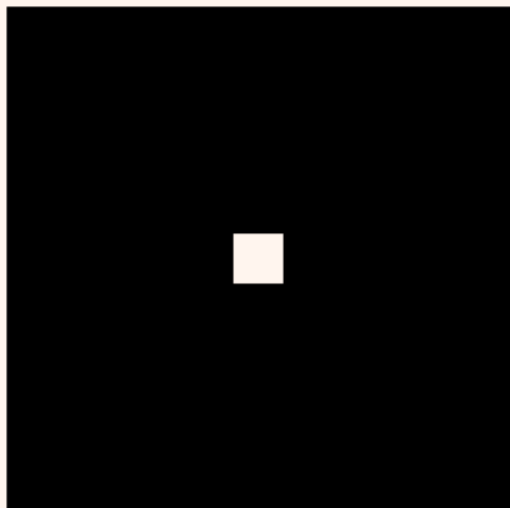
```
f = imread('lena.gif');  
figure,imshow(f,[ ]);title('Original');  
F = fft2(f);  
Fc=fftshift(F);  
mask=zeros(size(F));  
MskWd=floor(size(F,1)*0.1/2);  
mask(size(F,1)/2-MskWd:size(F,1)/2+MskWd,size(F,2)/2-  
MskWd:size(F,2)/2+MskWd)=1;  
figure,imshow(mask,[ ]);title('mask');  
figure,imshow(real(ifft2(fftshift(mask).*F)),[]),title('Compre  
ssed Image');
```



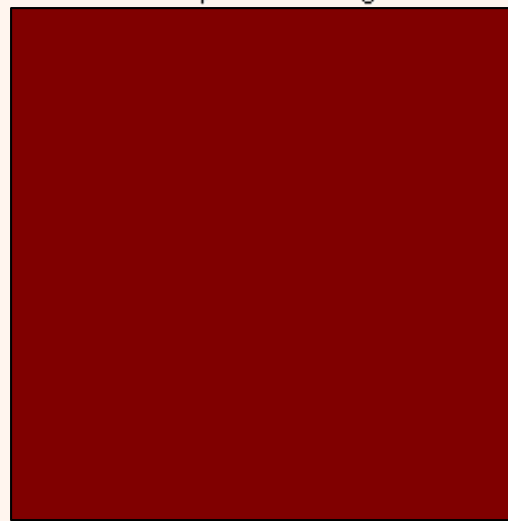
Original



mask



Compressed Image



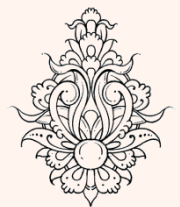
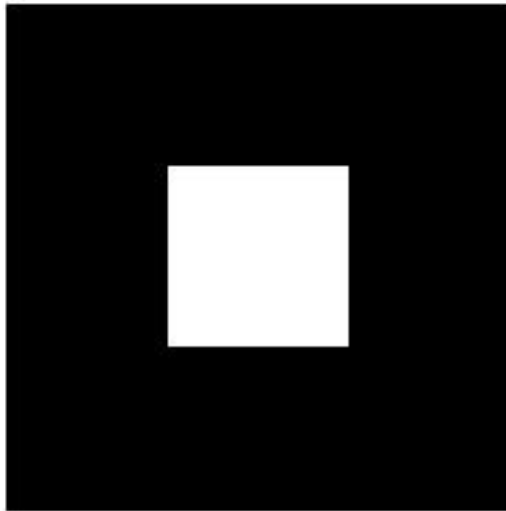
# مثال

```
f = imread('lena.gif');
F = fft2(f);
mask=zeros(size(F));
for k=1:2:floor(size(F,1)/2)
    MskWd=k;
    mask(size(F,1)/2-MskWd:size(F,1)/2+MskWd,size(F,2)/2-
MskWd:size(F,2)/2+MskWd)=1;
    subplot(121),imshow(mask),title(num2str(k*2));
    subplot(122),imshow(real(ifft2(fftshift(mask).*F)),[]);
    pause
end
```



# مثال (ادامه...)

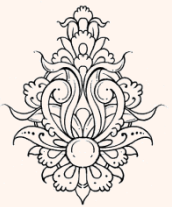
182



# انتقال در حوزه‌ی زمان و فرکانس

- انتقال در حوزه‌ی زمان و فرکانس اثرات متقابلی در تبدیل فوریه و معکوس آن دارند.
- انتقال در حوزه‌ی زمان تنها در فاز اثرگذار است و در اندازه تأثیری نخواهد داشت.

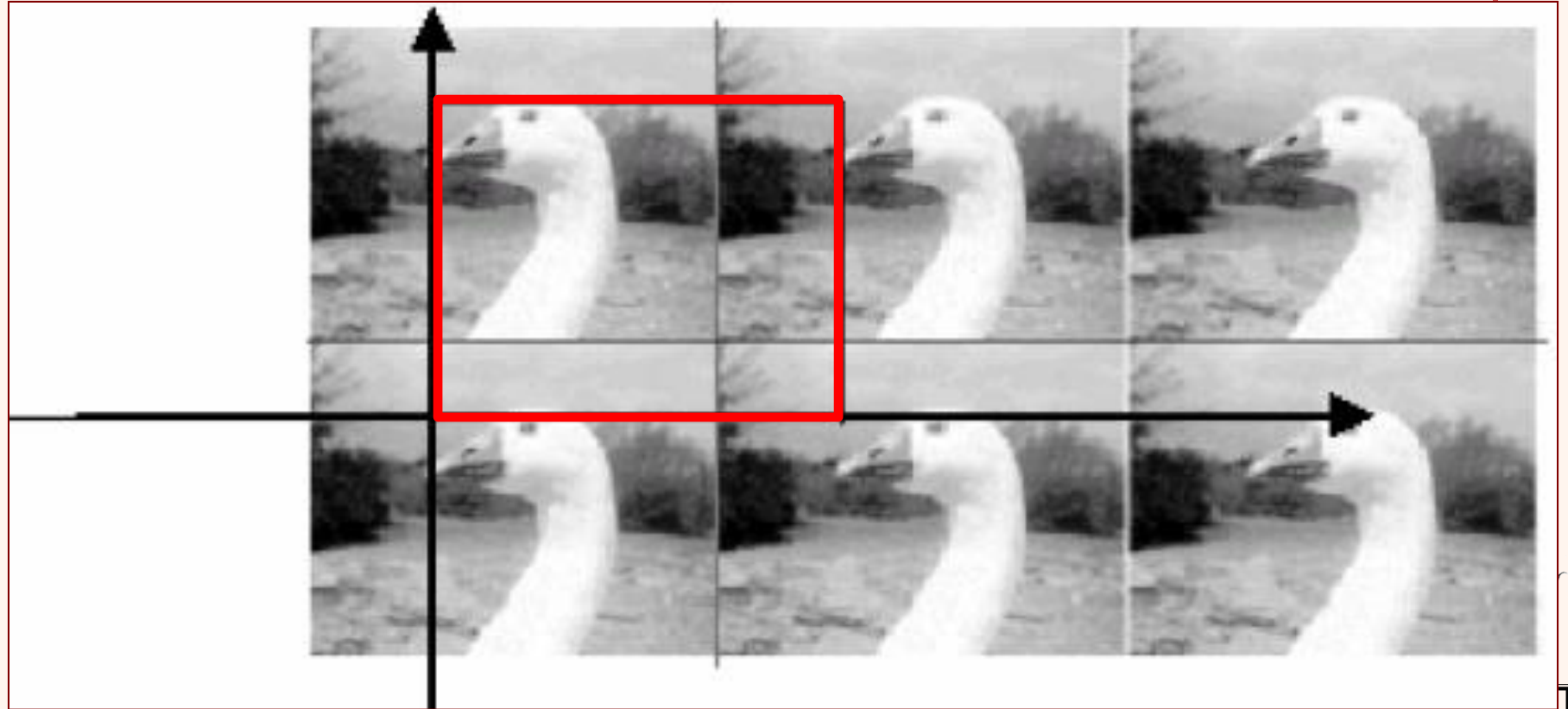
$$\begin{aligned} F\{x(n-m)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j(k+m)\omega} \quad \text{if} \quad n-m=k \\ &= e^{-jmw} X(\omega) \end{aligned}$$



$$f(m-m_0, n-n_0) \xleftrightarrow{\text{DFT}} F(u, v) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} m_0 u - j \frac{2\pi}{N} n_0 v\right)$$



# انتقال دایروی



انتقال قطعی تصویر متناوب شده یا انتقال دایروی سیگنال اصلی

کتابخانه  
سپهر  
بهشتی

# چرخش در حوزه زمان

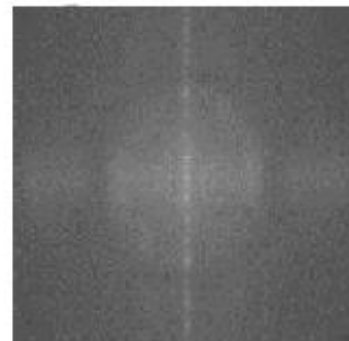
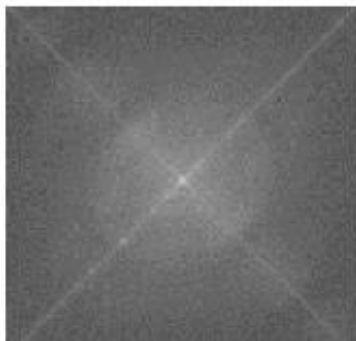
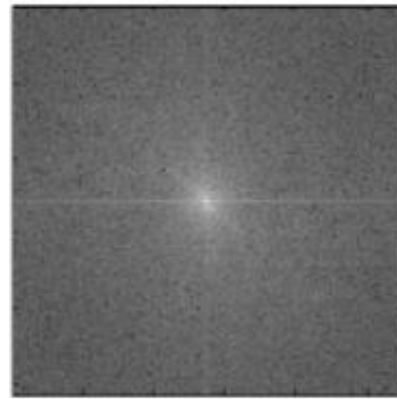
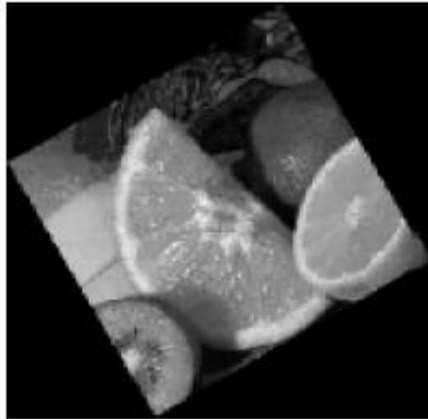
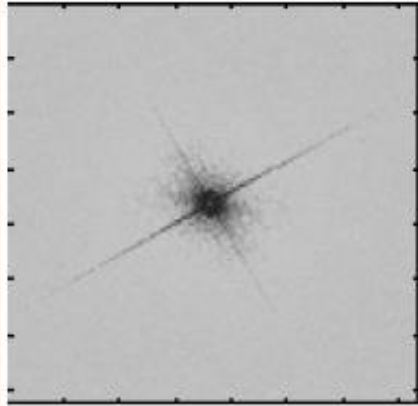
- چرخش در حوزه زمان، همان درجه چرخش در حوزه فرکانس را نتیجه می‌دهد.
- براساس مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} m &= r \cos \theta \\ n &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{in spatial domain}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \omega \cos \phi \\ v &= \omega \sin \phi \end{aligned} \right\} \text{in frequency domain}$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(m, n) &\longleftrightarrow f(r, \theta) \\ f(r, \theta) &\xrightarrow{DFT} F(\omega, \phi) \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} f(r, \theta + \theta_0) &\xrightarrow{DFT} F(\omega, \phi + \theta_0) \end{aligned} \right.$$

# مثال



## Search for LENA

It's like LENA, your memory is so fast  
 It's hard sometimes to describe it to you  
 I thought the water under the moon was  
 It only ever returns to the moon  
 And I don't know I don't know  
 I don't know your name unless it's in your  
 Your name is written in the moon  
 I don't know unless you tell me  
 And the moon is written in the moon  
 That's how I know unless you tell me  
 And I don't know unless you tell me  
 I don't know unless you tell me  
 I don't know unless you tell me  
 I don't know unless you tell me  
 I don't know unless you tell me

Thomas Collier

تصویر اصلی و پرفش یافته‌ی متناظر

پستگاه  
سپهر  
بهبودی

# تغییر مقیاس

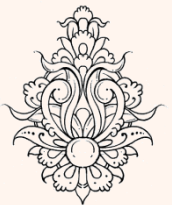
- گستردگی یا فشردگی در حوزه زمان-مکان نتیجه معکوس در حوزه فرکانس خواهد داشت.

$$f(am, bn) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

- متوسط سیگنال

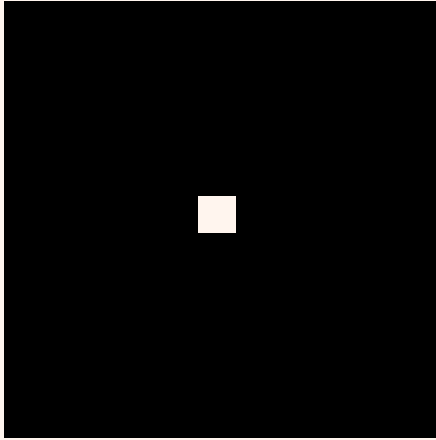
مقدار DC سیگنال از مولفه  $(0,0)$  به دست می‌آید

$$\text{Mean}[f(m, n)] = \bar{f}(m, n) = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) = \frac{1}{N} F(0, 0)$$

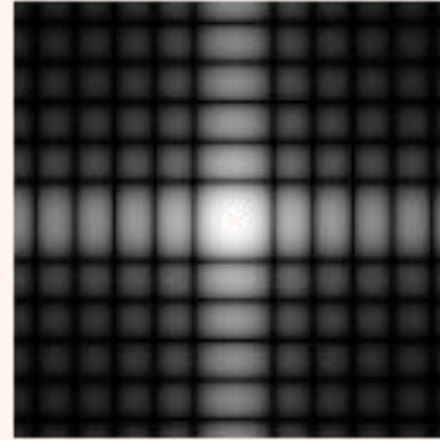


# تغییر مقیاس (ادامه...)

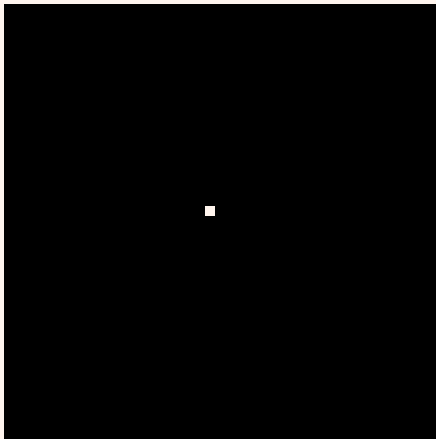
Original



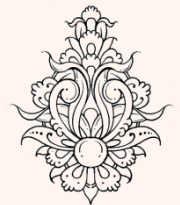
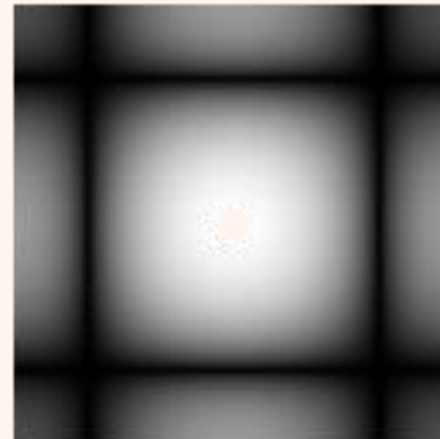
Log of Abs of shifted version



Original



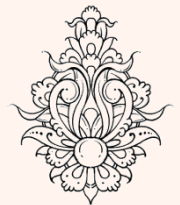
Log of Abs of shifted version



# اعمال فیلتر در دامنه‌ی فرکانس

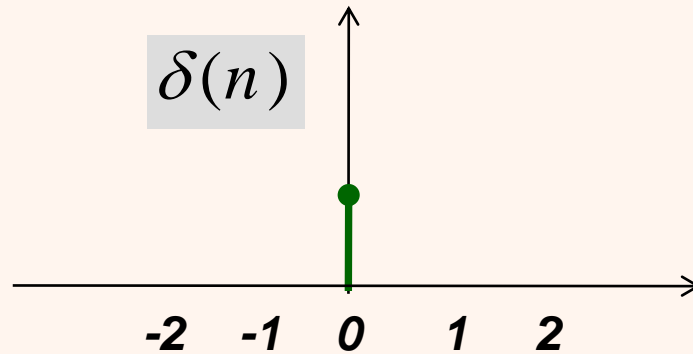
- در دامنه‌ی مکان اعمال فیلتر (LTI) معادل عملیات پیچیده‌ی کانولوشن است.
- در دامنه‌ی فرکانس کانولوشن معادل ضرب ماتریسی خواهد شد.
- توجه داشته باشید که برای فیلترهای کوچک، فیلتر کردن در دامنه‌ی مکان از لحاظ محاسباتی به صرفه‌تر است اما زمانی که ابعاد فیلتر افزایش می‌یابد، توصیه می‌شود در دامنه‌ی فرکانس این کار صورت پذیرد.

$$I(m, n) * H(m, n) \longleftrightarrow I(u, v) H(u, v)$$



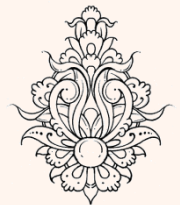
# تابع ضرب

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



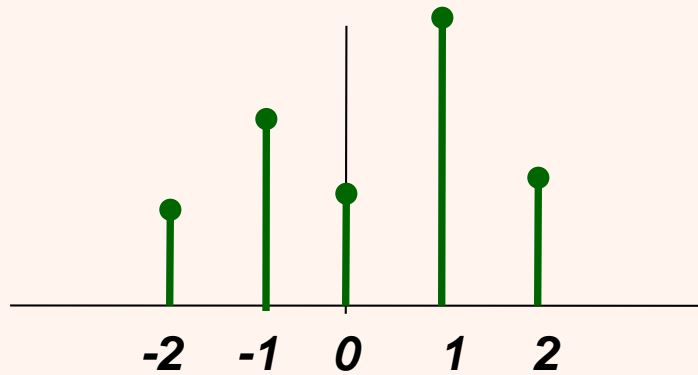
- می‌توان برای نمایش ساختار گسسته‌ی هر تابع، رابطه‌ای به صورت زیر داشت:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

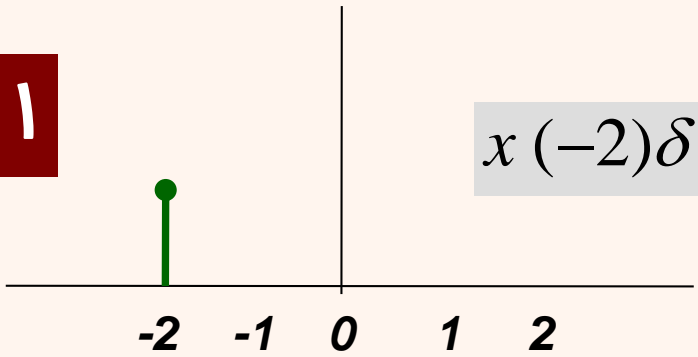


# تابع ضربیه (ادامه...)

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

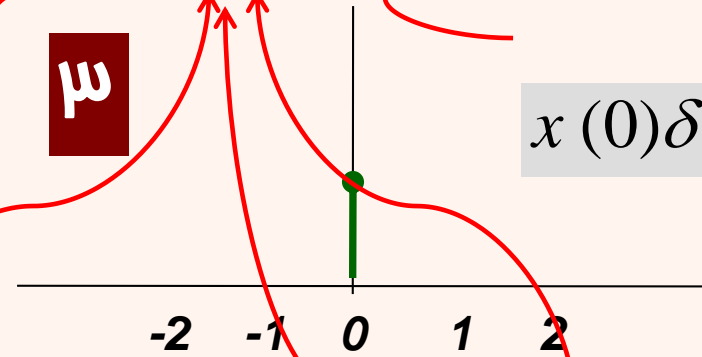


۱



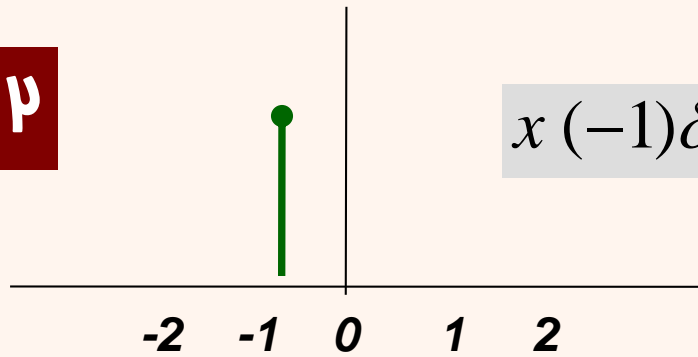
$$x(-2)\delta(n - (-2))$$

۳



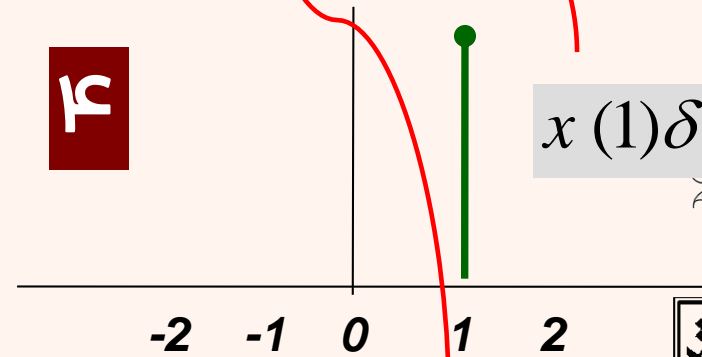
$$x(0)\delta(n - 0)$$

۲



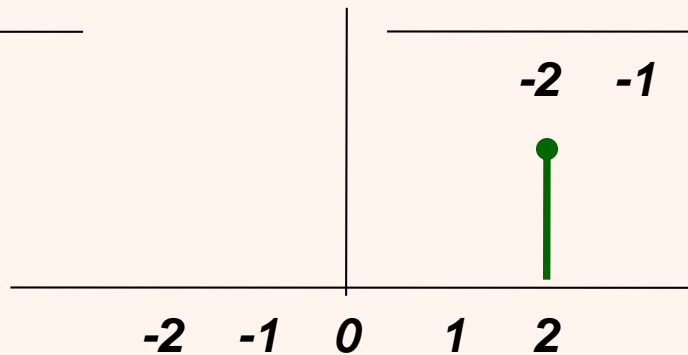
$$x(-1)\delta(n + 1)$$

۴



$$x(1)\delta(n - 1)$$

۵



$$x(2)\delta(n - 2)$$

دانشگاه شهید بهشتی



- اگر  $x$  ورودی سیستم باشد به وسیله تبدیل به خروجی  $y$  نگاشت می‌شود.

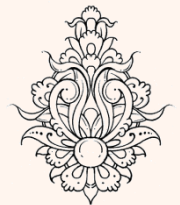
$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

- هر سیگنال را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

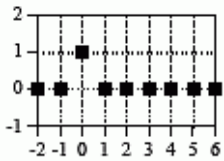
- پس خواهیم داشت:

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)\right]$$

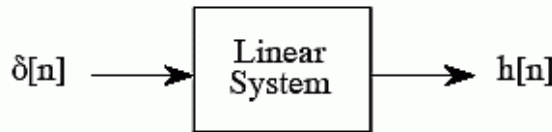
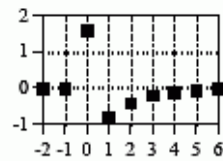


# سیستم خطی و ثابت

Delta Function



Impulse Response



Linearity  $ax_1(n) + bx_2(n) \rightarrow ay_1(n) + by_2(n)$

Time Invariance  $x(n - n_0) \rightarrow y(n - n_0)$

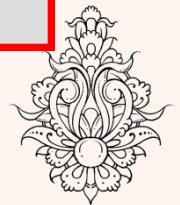
$$y(n) = T \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n - k)]$$

• حال باید دید پاسخ  $T[\delta(n-k)]$  چیست؟

– اگر  $h(n) = T[\delta(n)]$  باشد خواهیم داشت:

$$h(n - k) = T[\delta(n - k)]$$

$$\delta(n - k) \xrightarrow{T} h(n - k)$$



ادامه...

$$y(n) = T \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n-k)]$$

$$h(n-k) = T[\delta(n-k)]$$

$$\delta(n-k) \rightarrow T \rightarrow h(n-k)$$

$$y(n) = T \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$

**convolution**

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$



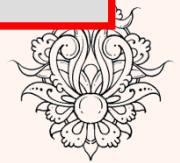
دانشگاه  
تهران  
پیشین

# کانولوشن دو بعدی

- نتیجه‌ی عبور سیگنال از فیلترهای خطی توسط کانولوشن سیگنال اصلی و پاسخ ضربه‌ی سیستم به دست می‌آید.

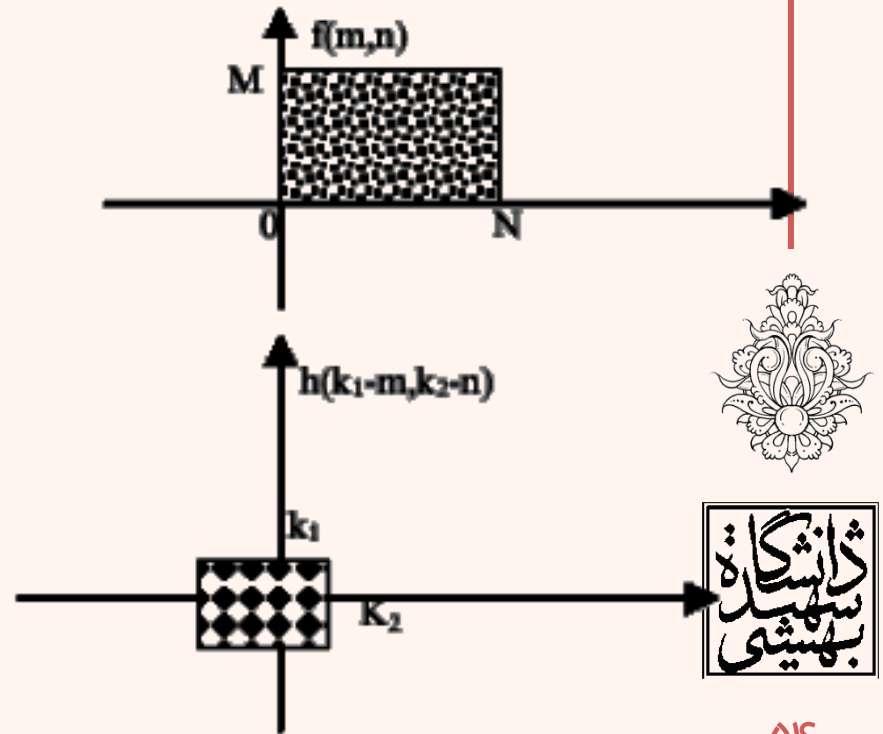
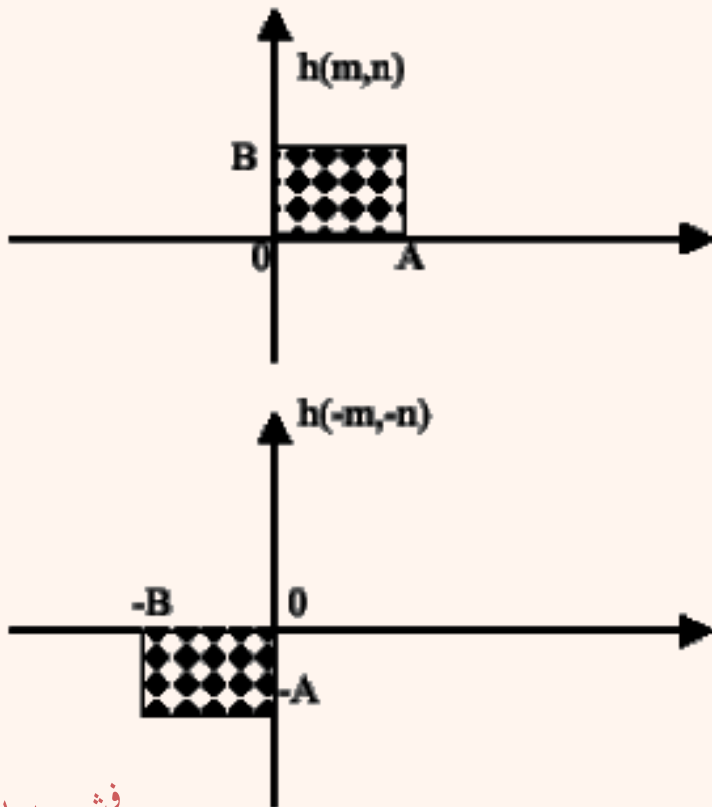
$$g(m, n) = f(m, n) * h(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) h(m-k, n-l)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(k, l) f(m-k, n-l)$$

- «\*» نشان‌دهنده‌ی کانولوشن خطی است، ابتدا  $h$  قرینه می‌شود و با انتقال به اندازه‌ی  $(m, n)$  رابطه مذکور محاسبه می‌شود.



# کانولوشن دو بعدی (ادامه...)

- اگر ماتریس  $f(m,n)$  به اندازه  $M \times N$  باشد و  $h$  به اندازه  $A \times B$ ، ماتریس  $g(m, n)$  دارای اندازه  $(M+A-1, N+B-1)$  خواهد بود.



# مثال

```
f=zeros(128,128);  
f(64:end,:)=255;  
figure,imshow(f,[ ]),title('Original');  
F=fft2(f);  
sig=5;  
H=lpfilter('gaussian',128,128,sig);  
figure,imshow(H,[ ]),title('LPF');  
figure,imshow(fftshift(H),[ ]),title('centered LPF');  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
figure,imshow(g,[ ]),title('Filtered');  
figure,imagesc(g(1:15,:));
```

Filtered



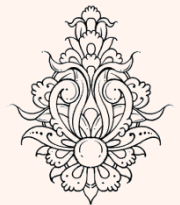
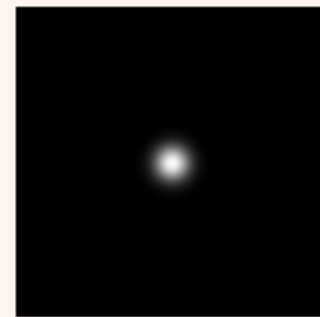
Original



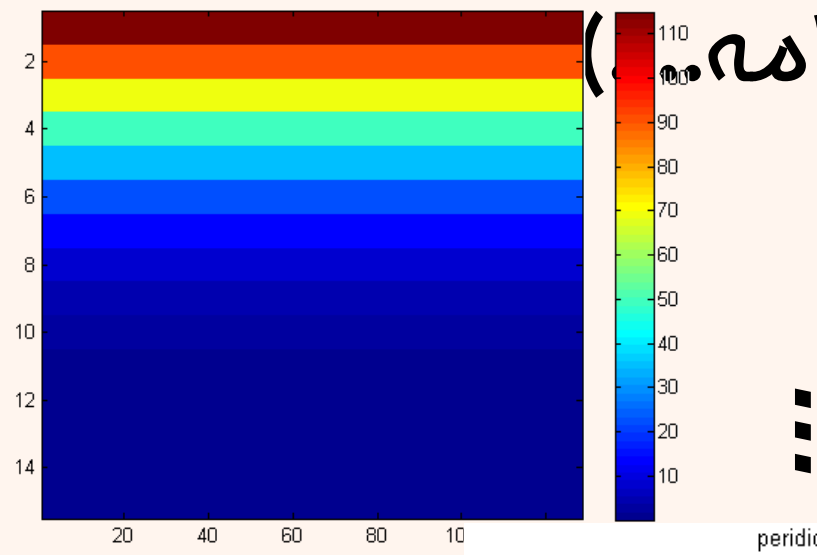
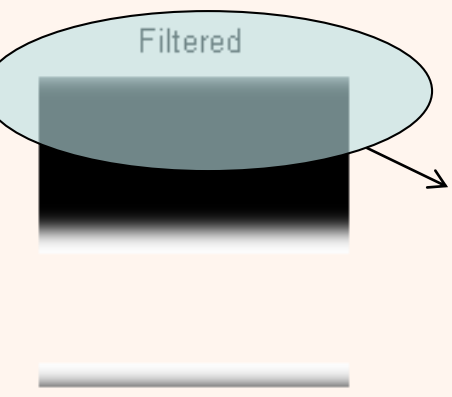
LPF



centered LPF

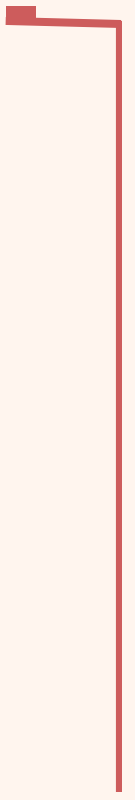
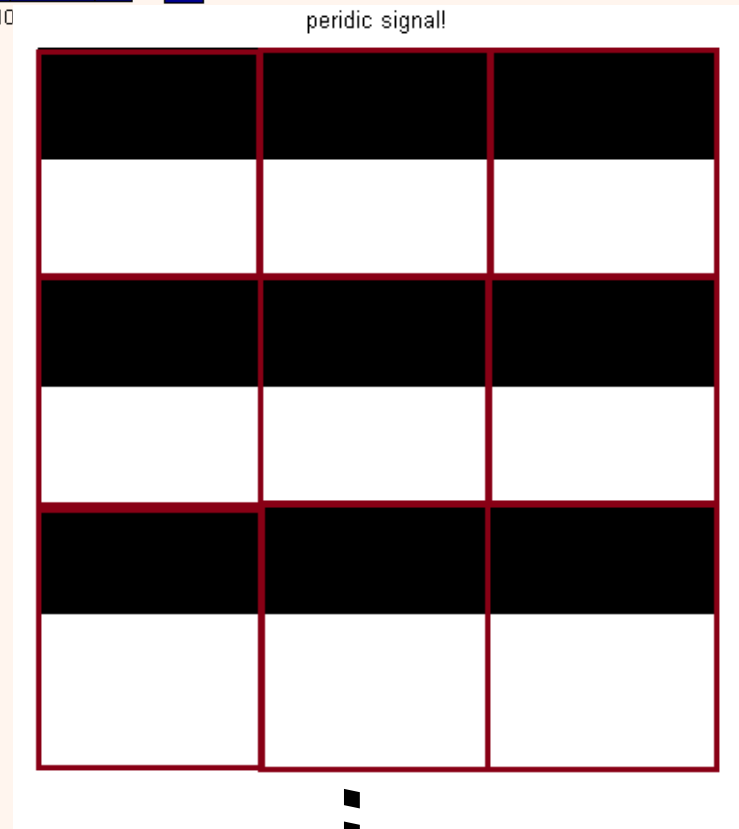


# مثال (ادامه)



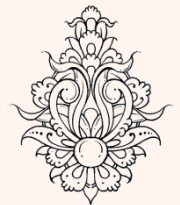
periodic signal!

...



# کانولوشن دایروی

- همانند سیگنال یک بعدی، رابطه‌ی کانولوشن دوبعدی به صورت خطی است و به طور کلی خواص کانولوشن دوبعدی مشابه کانولوشن یک بعدی است.
- برای استفاده در روابط **DFT** از «کانولوشن دایروی» استفاده می‌شود.
- برای تساوی کانولوشن خطی و دایروی لازم است در ابتدا اندازه‌ی دو ماتریس سیگنال اصلی و پاسخ ضربه، به اندازه‌ی حاصل کانولوشن خطی گسترش یابد.
- این فرآیند با افزایش صفر صورت می‌گیرد.



کانولوشن دایروی با تناوب  $(N+B-1) \times (M+A-1)$  معادل کانولوشن خطی است.



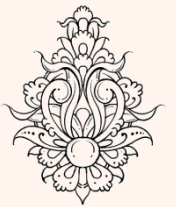
# افزایش صفر

$$f_e(m, n) = \begin{cases} f(m, n) & 0 \leq m \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & M \leq m \leq M_1, \quad N \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

$$h_e(m, n) = \begin{cases} h(m, n) & 0 \leq m \leq A-1, \quad 0 \leq n \leq B-1 \\ 0 & A \leq m \leq M_1, \quad B \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

$$M_1 = M + A - 1, \quad N_1 = N + B - 1$$

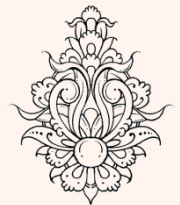
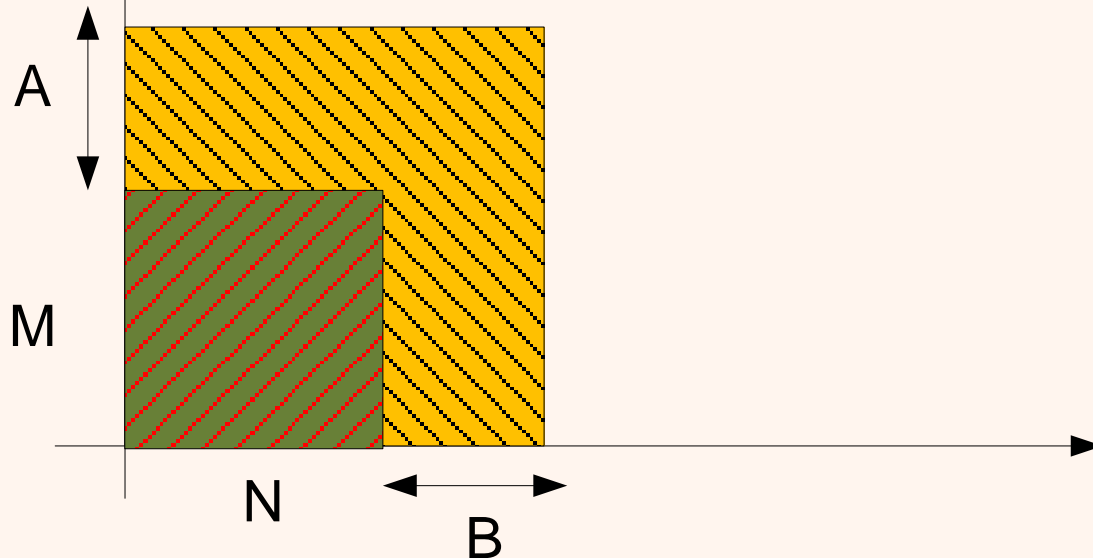
- فرضیه‌ی متناوب بودن  $f$  و  $h$  اعمال می‌شود، و کانولوشن متناوب محاسبه شده، یک دوره از آن در نظر گرفته می‌شود.



# افزایش صفر (ادامه...)

$$f_e(m, n) = \begin{cases} f(m, n) & 0 \leq m \leq M - 1, \quad 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & M \leq m \leq M_1, \quad N \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

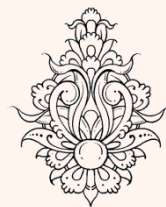
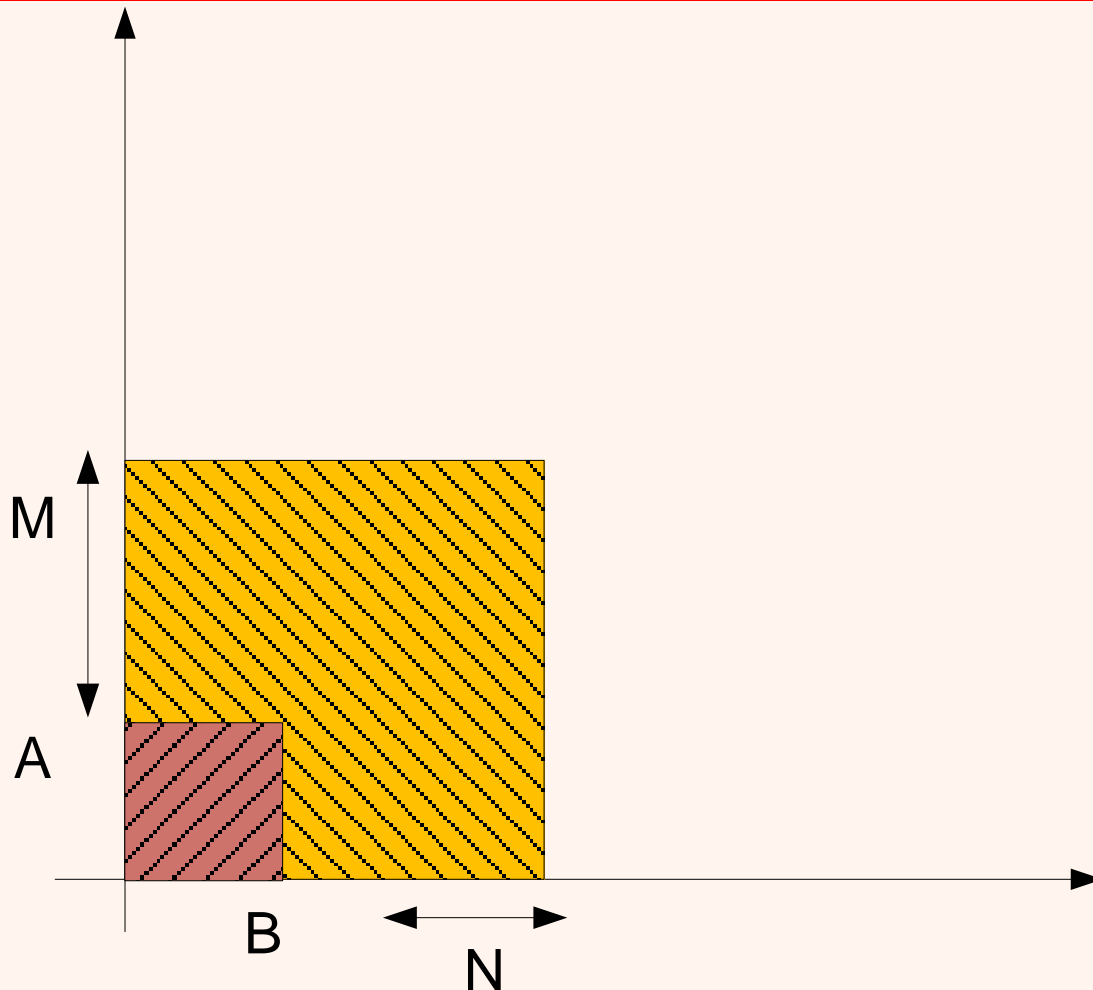
|     |              |
|-----|--------------|
| $f$ | $M \times N$ |
| $h$ | $A \times B$ |



# افزایش صفر (ادامه...)

$$h_e(m, n) = \begin{cases} h(m, n) & 0 \leq m \leq A - 1, \quad 0 \leq n \leq B - 1 \\ 0 & A \leq m \leq M_1, \quad B \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} f \quad M \times N \\ h \quad A \times B \end{array}$$



# محاسبه‌ی کانولوشن در حوزه‌ی فرکانس

$$f(m, n) * h(m, n) = \{f_e(m, n) \otimes h_e(m, n)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{N_1-1} f_e(k, l) h_e(m-k, n-l) \xleftrightarrow{\text{DFT}} F_e(u, v) \cdot H_e(u, v)$$

$$\text{if } X(\omega) = F\{x(n)\}, \quad H(\omega) = F\{h(n)\}$$

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i) = x(n) * h(n)$$

$$F\{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \right] e^{-j\omega n} \quad n-k = m$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(m) \right] e^{-j\omega(m+k)} = X(\omega)H(\omega)$$

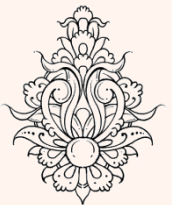
# فضای دوبعدی

$$f(m, n) * h(m, n) = \{f_e(m, n) \otimes h_e(m, n)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{N_1-1} f_e(k, l) h_e(m-k, n-l) \xleftrightarrow{DFT} F_e(u, v) \cdot H_e(u, v)$$

$$f_e(m, n) * h_e(m, n) \xleftrightarrow{DFT} F_e(u, v) \cdot H_e(u, v)$$

$$f_e(m, n) \cdot h_e(m, n) \xleftrightarrow{DFT} \{F_e(u, v) * H_e(u, v)\}$$



کانولوشن در موزه‌ی زمان مکان معادل ضرب در موزه‌ی فرکانس خواهد بود

ضرب در موزه‌ی زمان مکان معادل کانولوشن در موزه‌ی فرکانس است

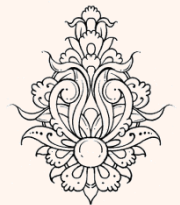


```
f=zeros(128,128);  
f(64:end,:)=255;  
PQ=paddedsize(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=5;  
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),2*sig);  
G=H.*F;  
g=real(iff2(G));  
figure,imshow(g,[ ]),title('Filtered');
```

Full Padded result

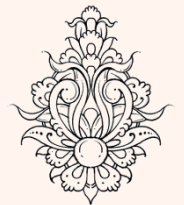
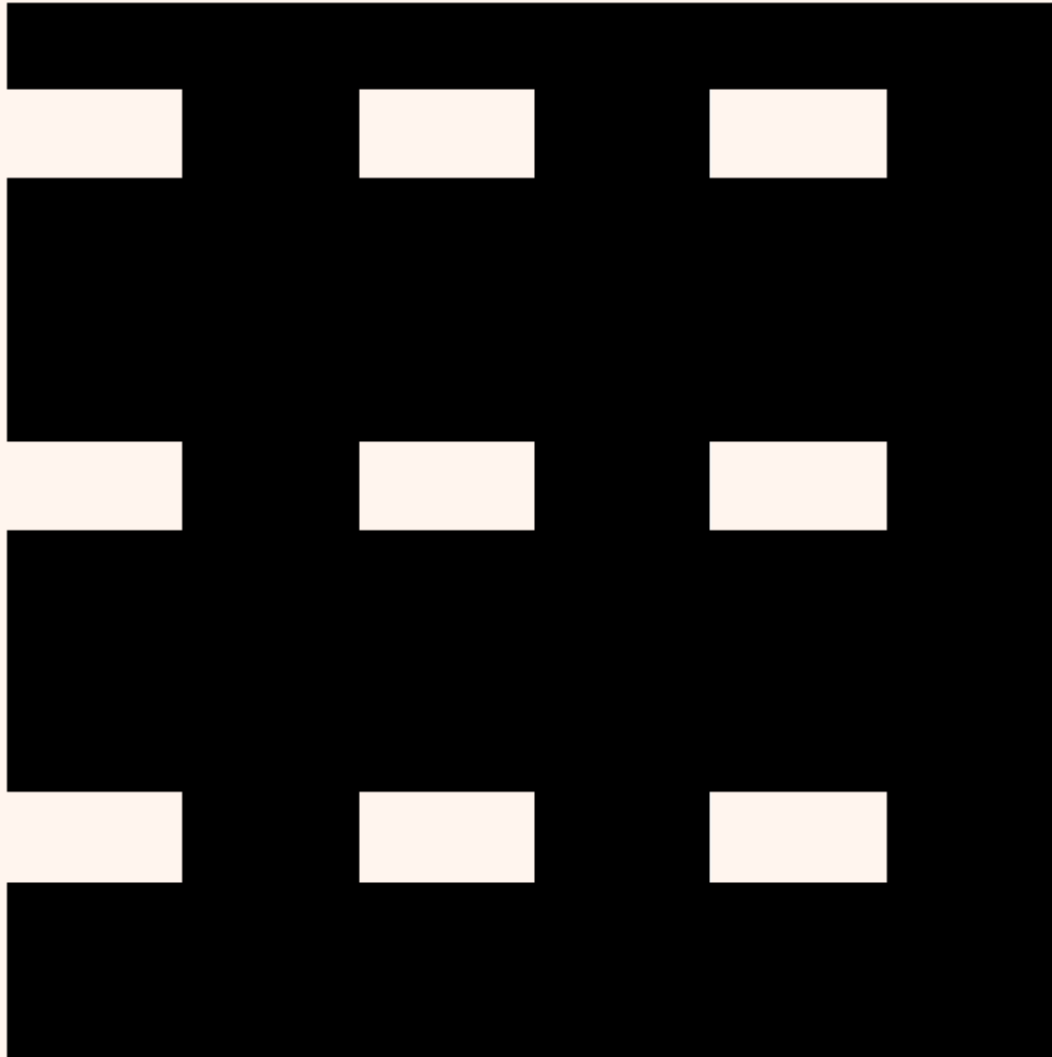


Filtered



# مثال (ادامه...)

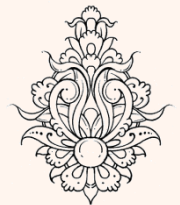
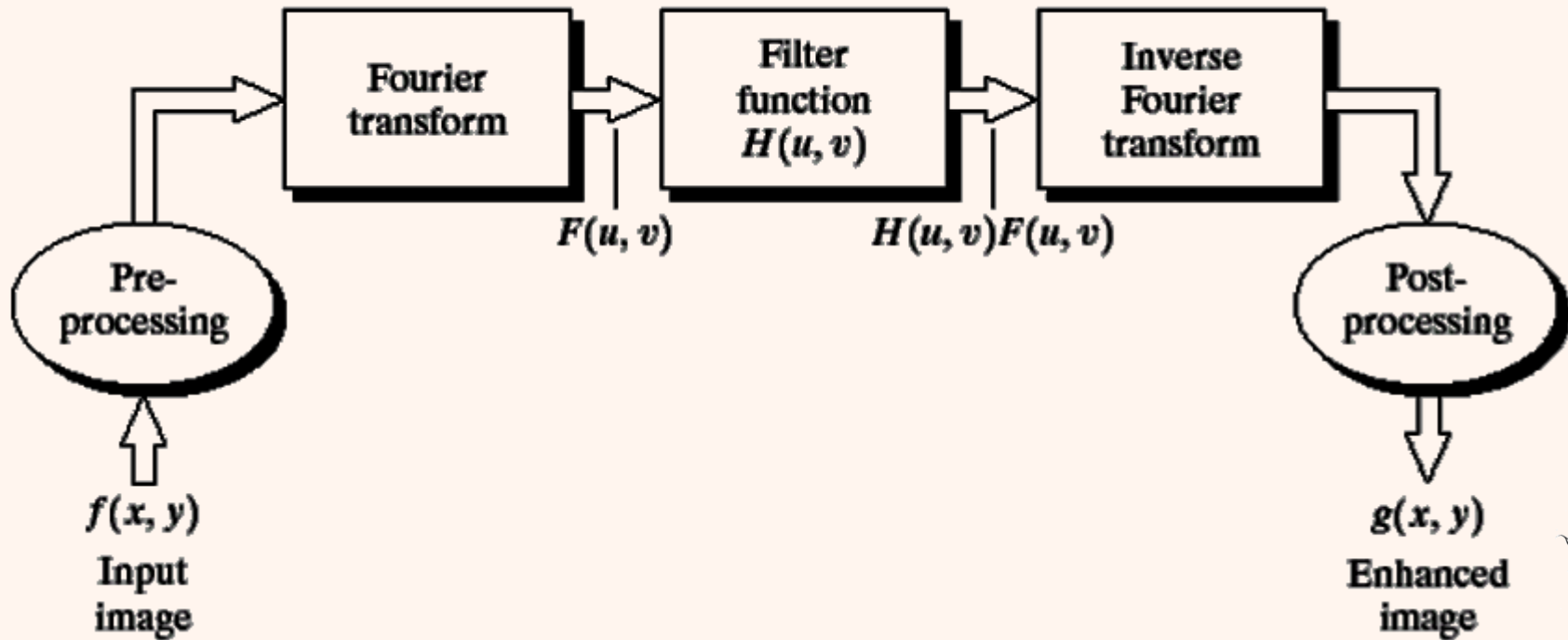
periodic signal!



# اعمال فیلتر در دامنه فرکانس

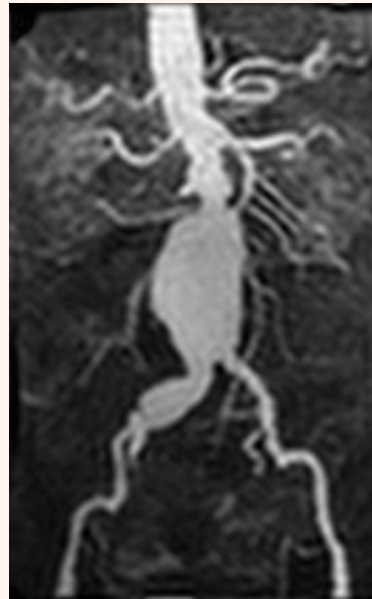
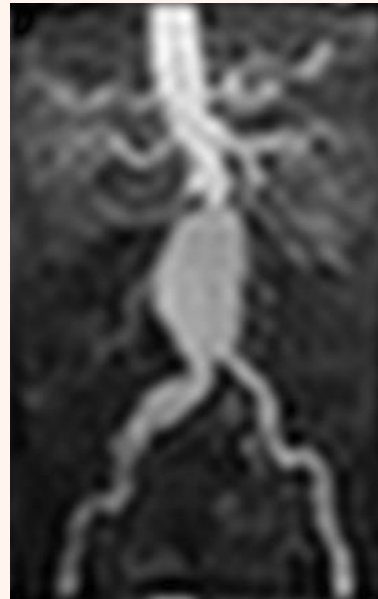
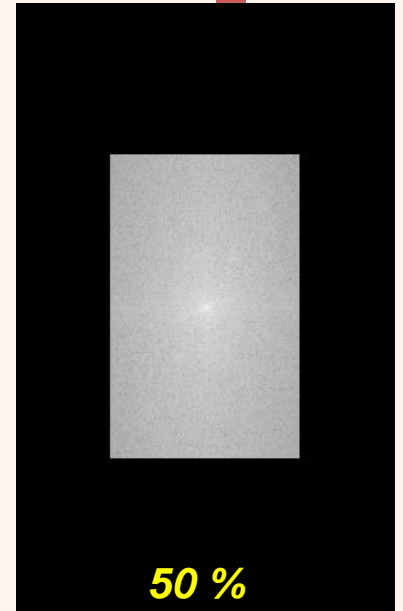
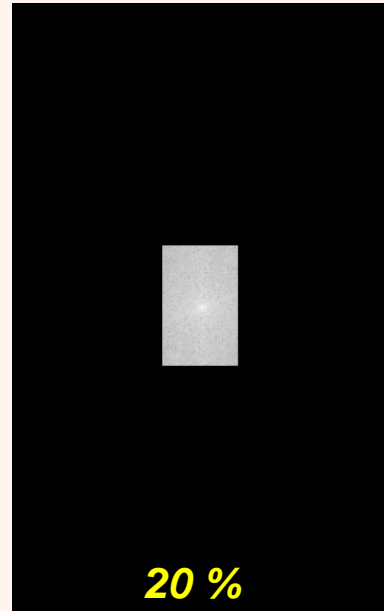
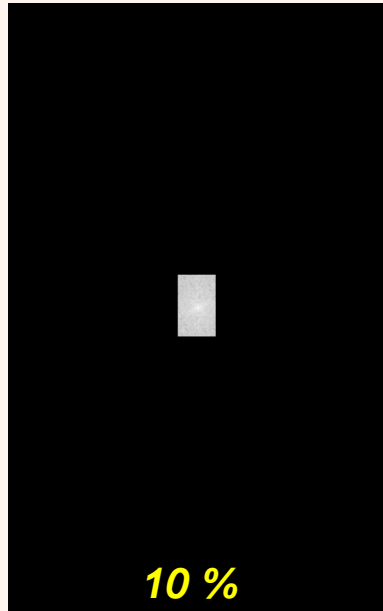
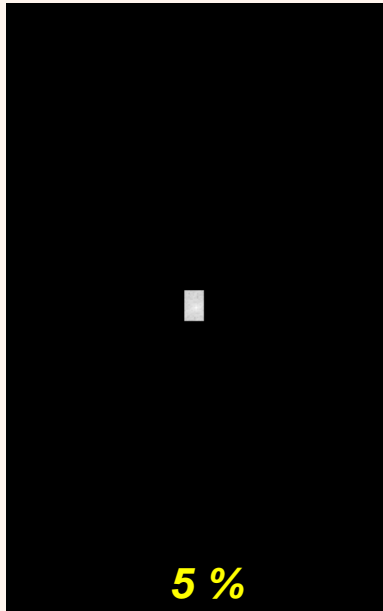
Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

Frequency domain filtering operation



در مواردی که پنجره‌ی مورد نظر بزرگ است اعمال فیلتر در دامنه فرکانس به لحاظ مناسبات از کارایی بیشتری برخوردار است.

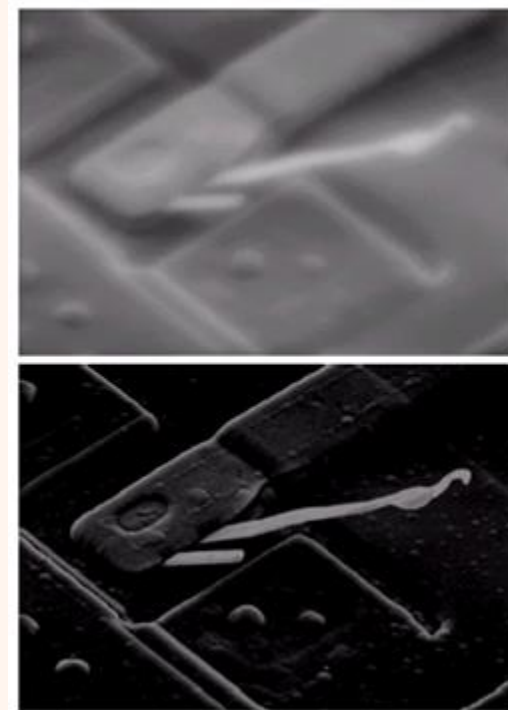
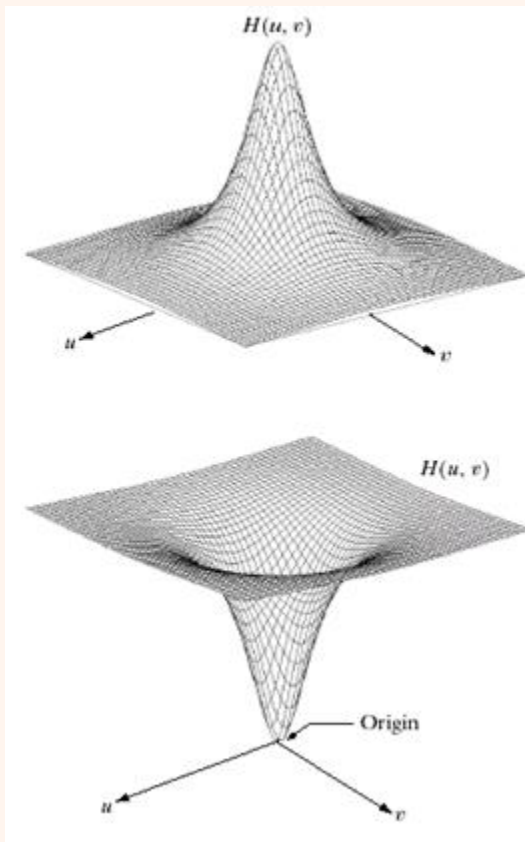
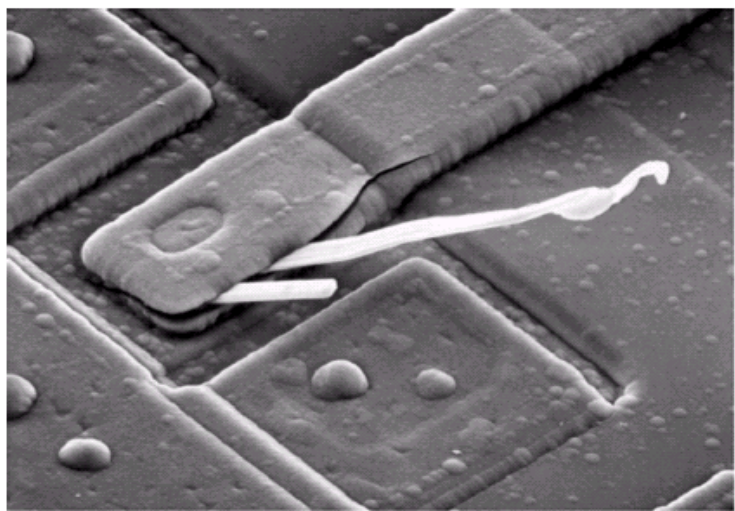




۴۴

Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

## Low Pass Filter



## High Pass Filter

بهشتی

# مراحل اعمال فیلتر در دامنه‌ی فرکانس

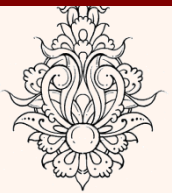
تعداد صفرهای بهینه برای اضافه کردن را با توجه به اندازه‌ی تصویر به دست آورید.

تبدیل فوری را برای تصویر با توجه به اندازه‌ی جدید به دست آورید.

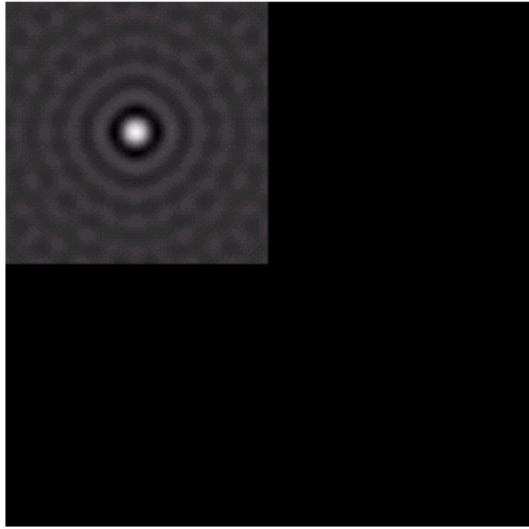
فیلتر مورد نظر را برای اندازه‌ی جدید به دست آورید. (اندازه‌ی فیلتر و تصویر اصلی باید یکسان باشد)

تصویر و فیلتر را در هم ضرب نمایید.

از نتیجه‌ی به دست آمده تبدیل معکوس فوری گرفته برای اندازه‌ی تصویر اصلی آنرا برش دهید.



# مثال



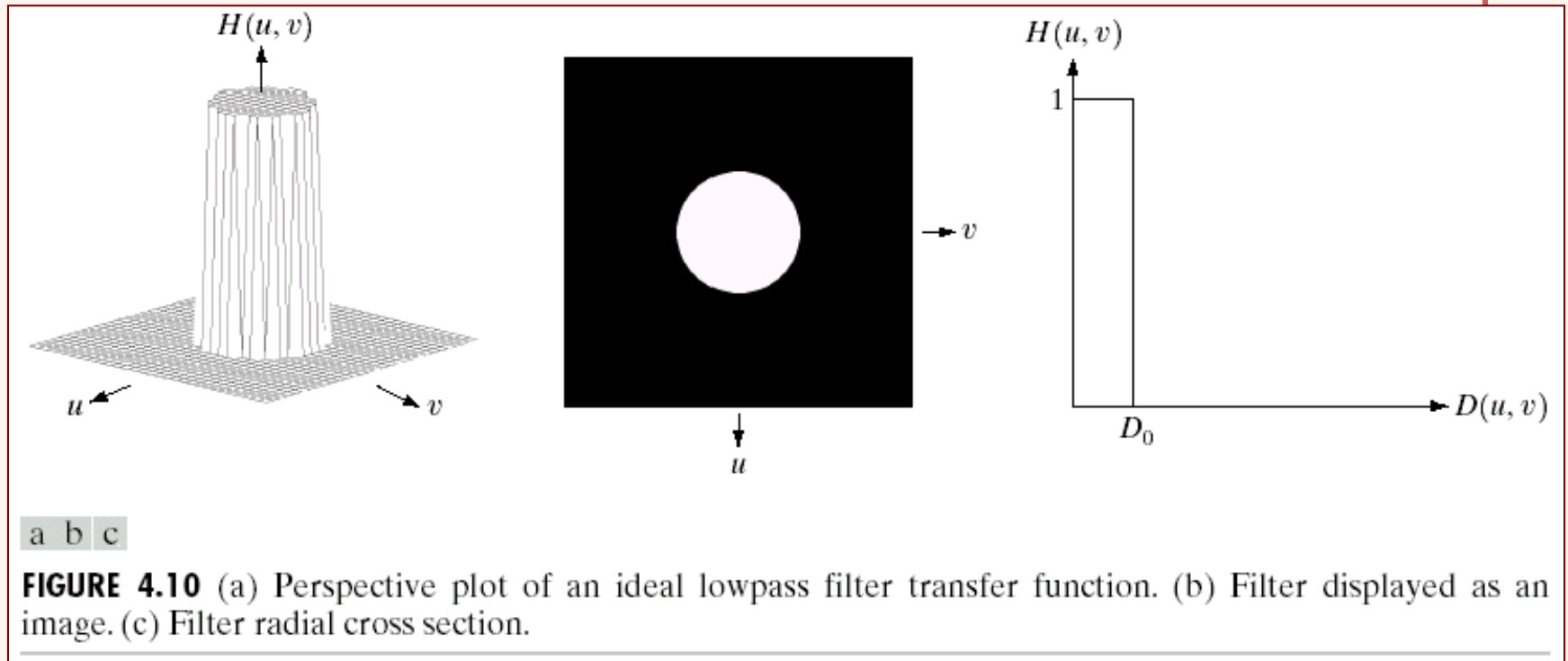
*Padded Lowpass Filter in the Spatial domain*



*Result of filtering with padding*



# فیلتر ایده آل



# اعمال فیلتر ایده آل

## Ideal filter

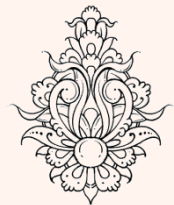
```
f = imread('cameraman.tif');  
PQ=paddedsz(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('ideal',PQ(1),PQ(2),sig);  
imshow(fftshift(H),[ ]);  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
figure;  
imshow(g,[ ]);
```

Filtered



Org

Ideal Filter



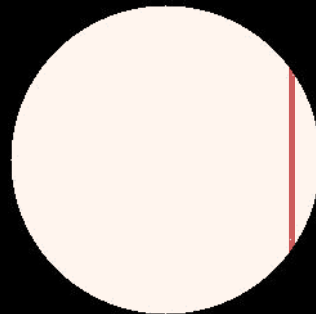
Sig=10



Sig=20

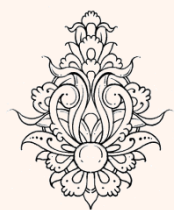


Sig=120



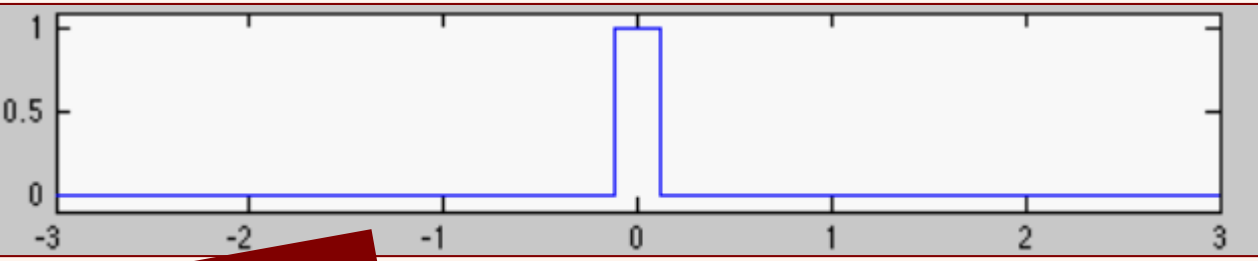


**Ringing  
Artifact**

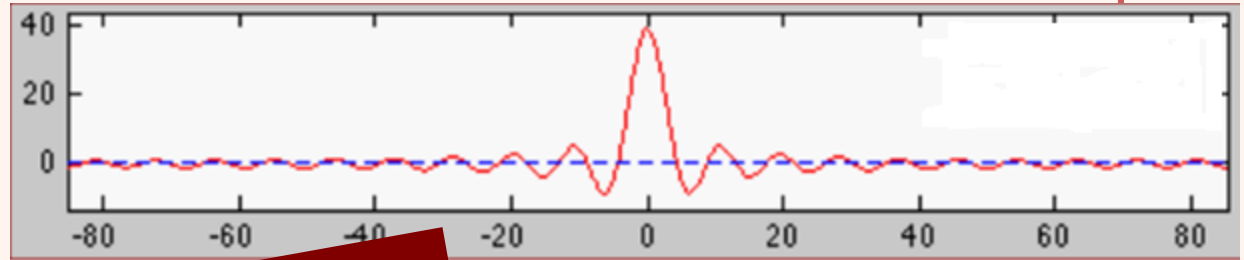


تراشگاه  
سپیدی  
بهشتی

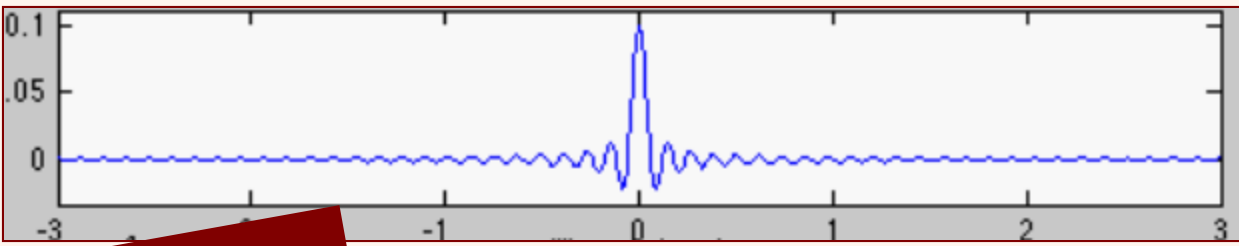




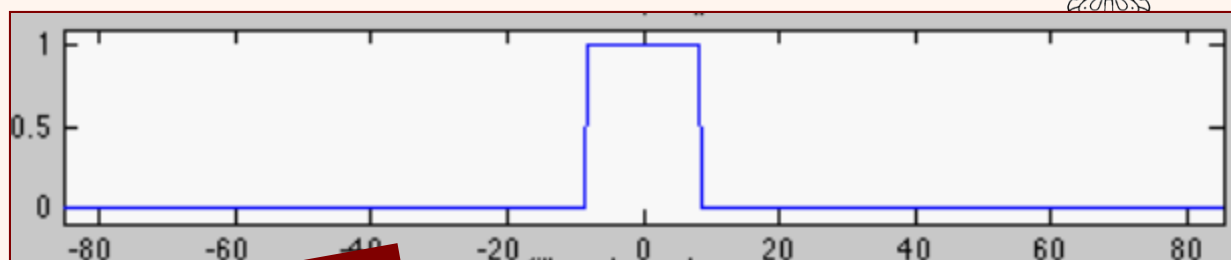
*Spatial*



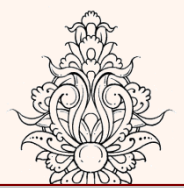
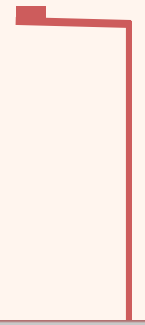
*Frequency*

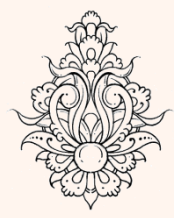
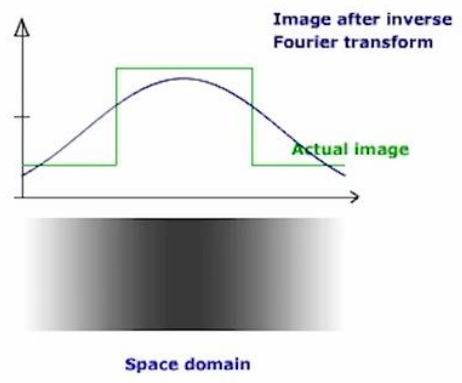
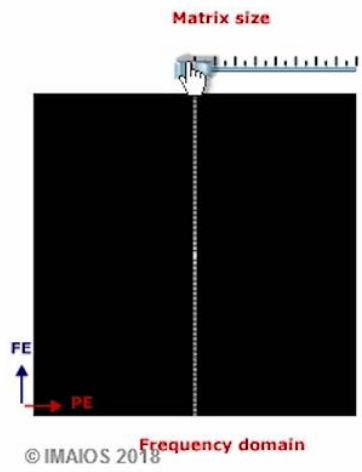


*Spatial*



*Frequency*





# فیلتر پایین‌گذر گاوسی

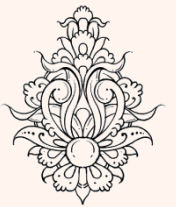
- ساختار فیلتر مذکور مانند زیر است:

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2}$$

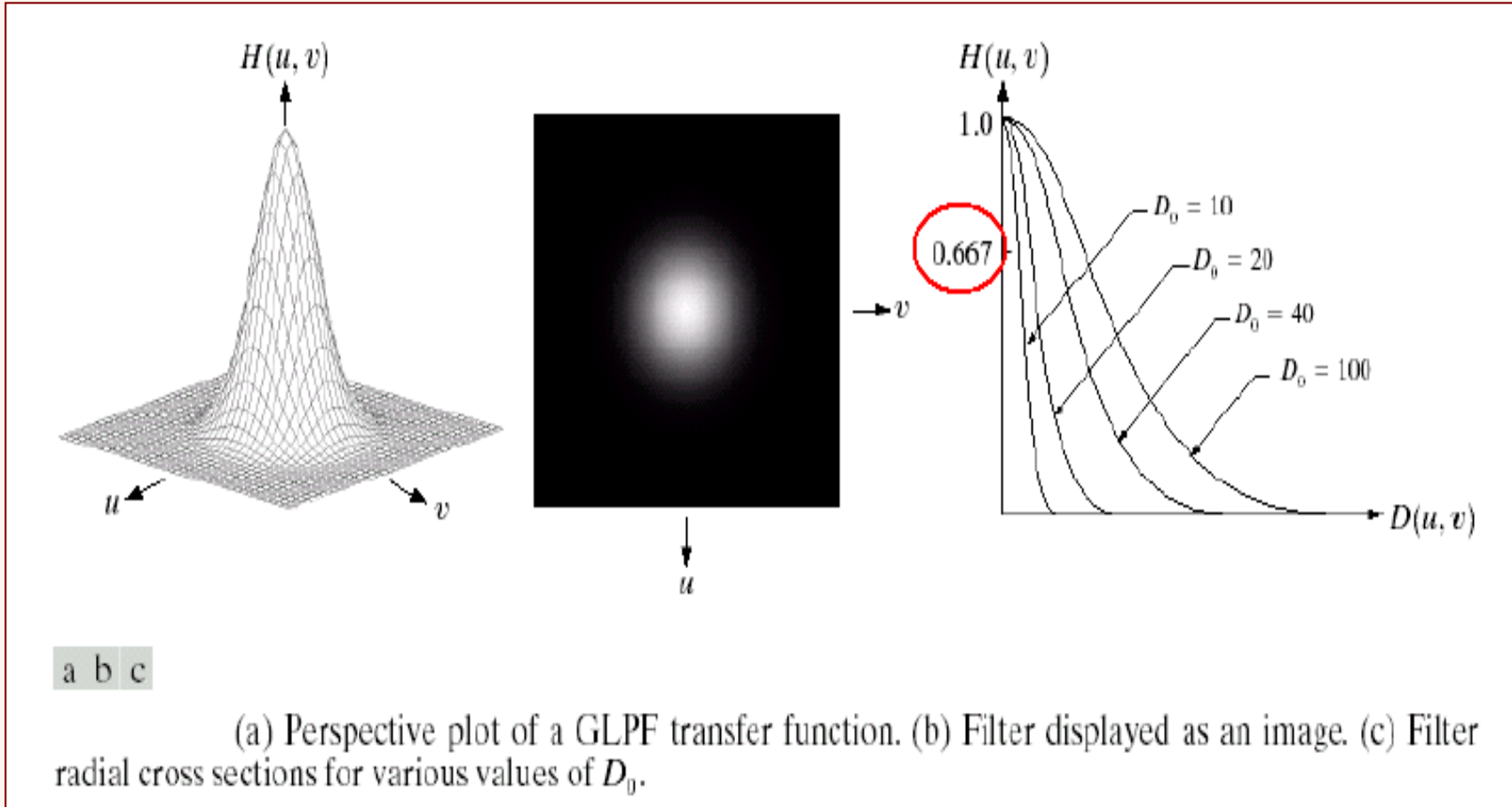
$D(u, v)$  بیان‌گر فاصله از مرکز است.

- اگر  $\sigma = D_0$

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$



# فیلتر پایین‌گذر گاوسی



```
f = imread('cameraman.tif');  
imshow(f, [ ]);  
PQ=paddedsized(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),sig);  
figure;  
imshow(fftshift(H), [ ]);  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
figure;  
imshow(g, [ ]);
```

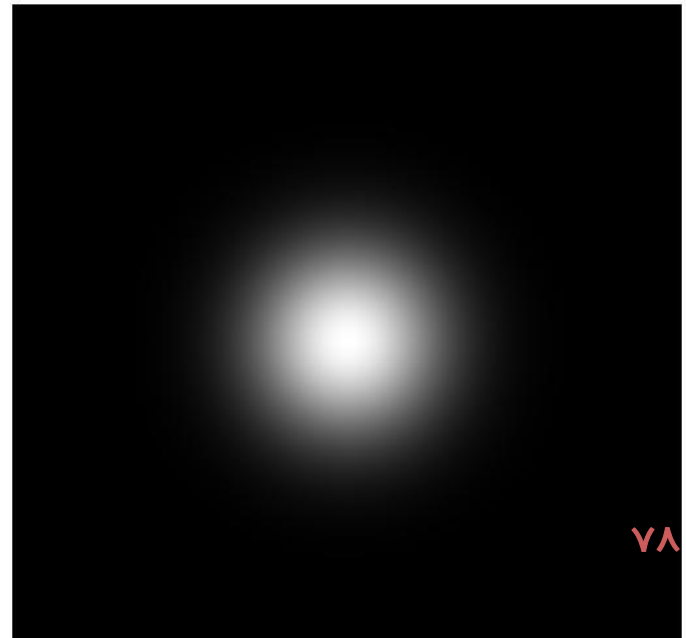


Filtered

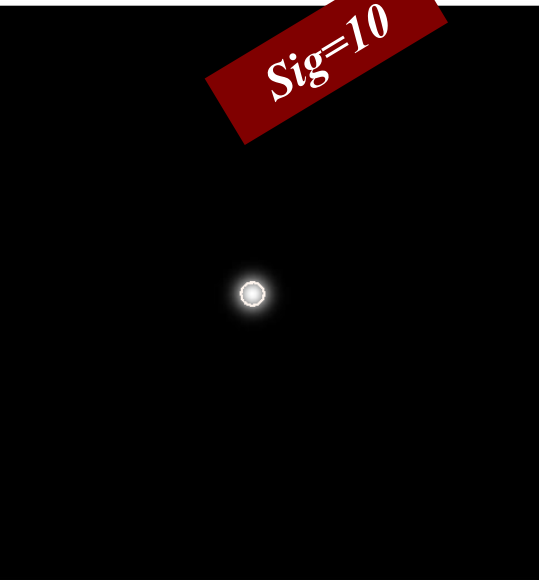


Org

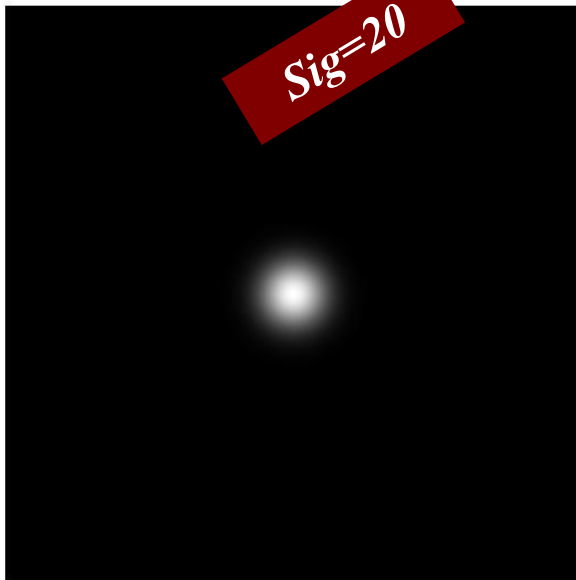
Gaussian Filter



Sig=10



Sig=20



Sig=120



## fax transmissions

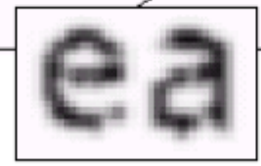
a b

(a) Sample text of poor resolution (note broken characters in magnified view).  
(b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



شاهین  
سپهر  
بهرین

## از جزئیات ریز صرفنظر می‌شود

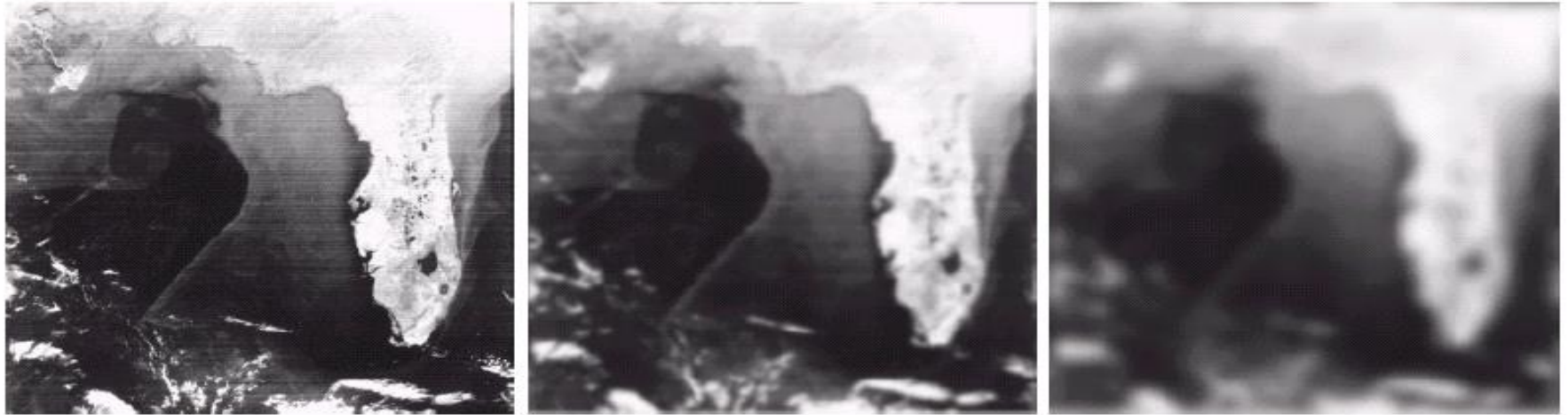


a b c

(a) Original image ( $1028 \times 732$  pixels). (b) Result of filtering with a GLPF with  $D_0 = 100$ . (c) Result of filtering with a GLPF with  $D_0 = 80$ . Note reduction in skin fine lines in the magnified sections of (b) and (c).



## • کاهش خطوط ناشی از اسکن نمودن



a b c

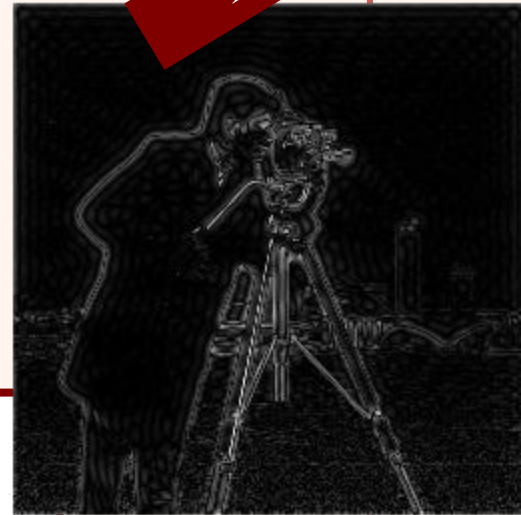
(a) Image showing prominent scan lines. (b) Result of using a GLPF with  $D_0 = 30$ . (c) Result of using a GLPF with  $D_0 = 10$ . (Original image courtesy of NOAA.)

## High Pass Filter

```
f = imread('cameraman.tif');  
imshow(f, []);  
PQ=paddedsize(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('ideal',PQ(1),PQ(2),sig);  
Hh=1-H;  
figure;  
imshow(fftshift(Hh), []);  
G=Hh.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
Figure;imshow(g, []);  
Figure;imshow(abs(g), []);
```

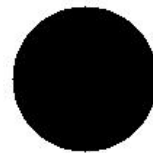
## فیلتر بالا

Filtered



Org

Ideal High  
pass



Filtered



۸۳

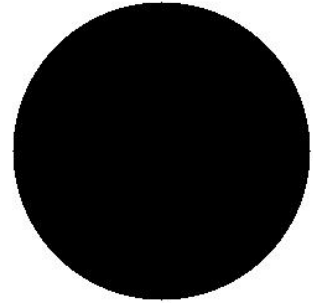
Sig=10



Sig=20



Sig=120



## High Pass Filter

```
f = imread('cameraman.tif');  
imshow(f, []);  
PQ=paddedsize(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),sig);  
Hh=1-H;  
figure;  
imshow(fftshift(Hh), []);  
G=Hh.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
Figure;imshow(g, []);  
Figure;imshow(abs(g), []);
```

## فیلتر بالا



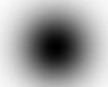
Gaussian High  
pass



Sig=10



Sig=20



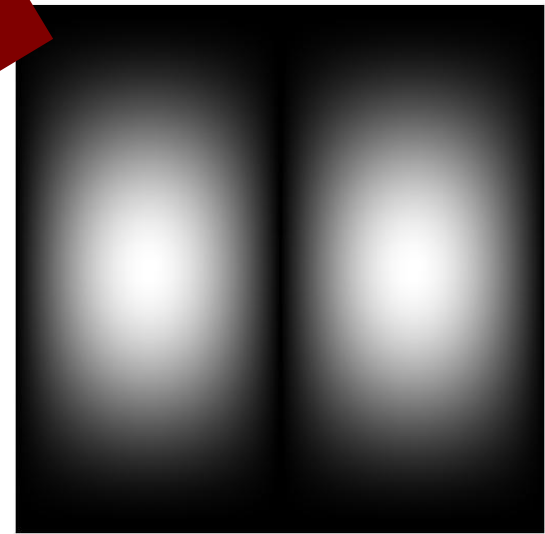
Sig=120



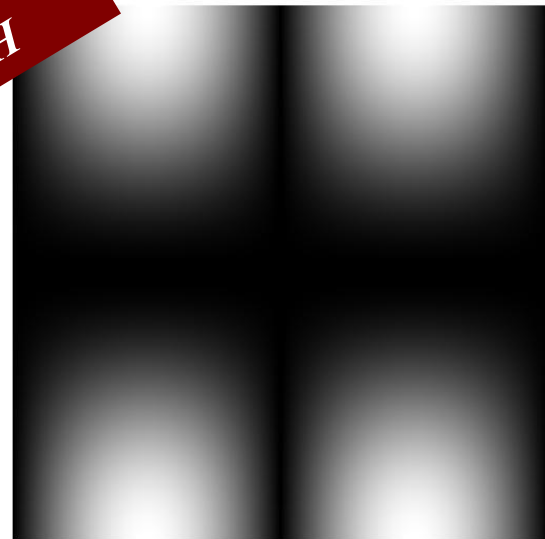
# به دست آوردن معادل فیلتر

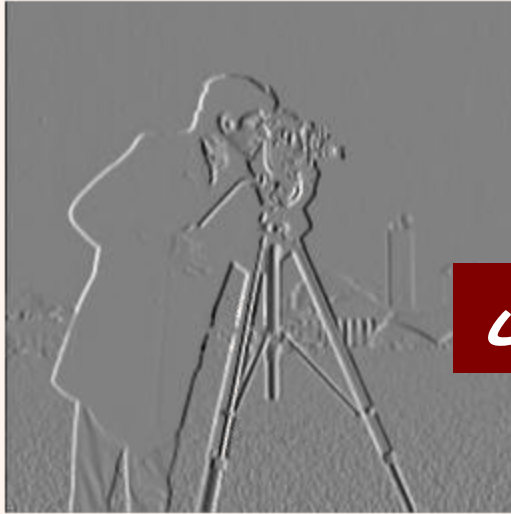
```
clear all,clc;
f = imread('cameraman.tif');
imshow(f,[ ]);
h=fspecial('sobel');
PQ=paddedsize(size(f));
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
H1=freqz2(h,PQ(1),PQ(2));
H=fftshift(H1);
figure;imshow(abs(H1),[ ]);
figure;imshow(abs(H),[ ]);
G=H.*F;
g=real(ifft2(G));
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));
figure;imshow(g,[ ]);
figure;imshow(abs(g),[ ]);
gs=imfilter(double(f),h);
figure;imshow(gs,[ ]);
figure;imshow(abs(gs),[ ]);
d=abs(gs-g);
max(d(:))
```

H1

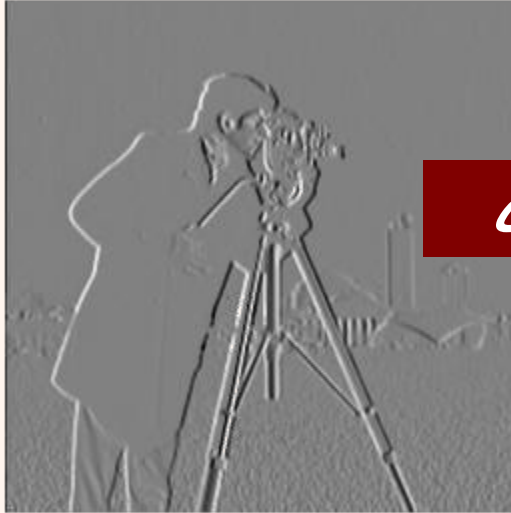


H





دامنه‌ی فرکانس



دامنه‌ی زمان-مکان

