Information Compression

مقدمات(۳)

تبدیل فوریه ۲

فشرده‌سازی اطلاعات
۴۰-۱۰-۷۰۲-۰۱
بخش پنجم
قسمت سوم

دانشگاه شهید بهشتی
پژوهشکده‌ی فضای مجازی
بهار ۱۳۹۸
احمد محمودی ازناوه

http://faculties.sbu.ac.ir/~a_mahmoudi/

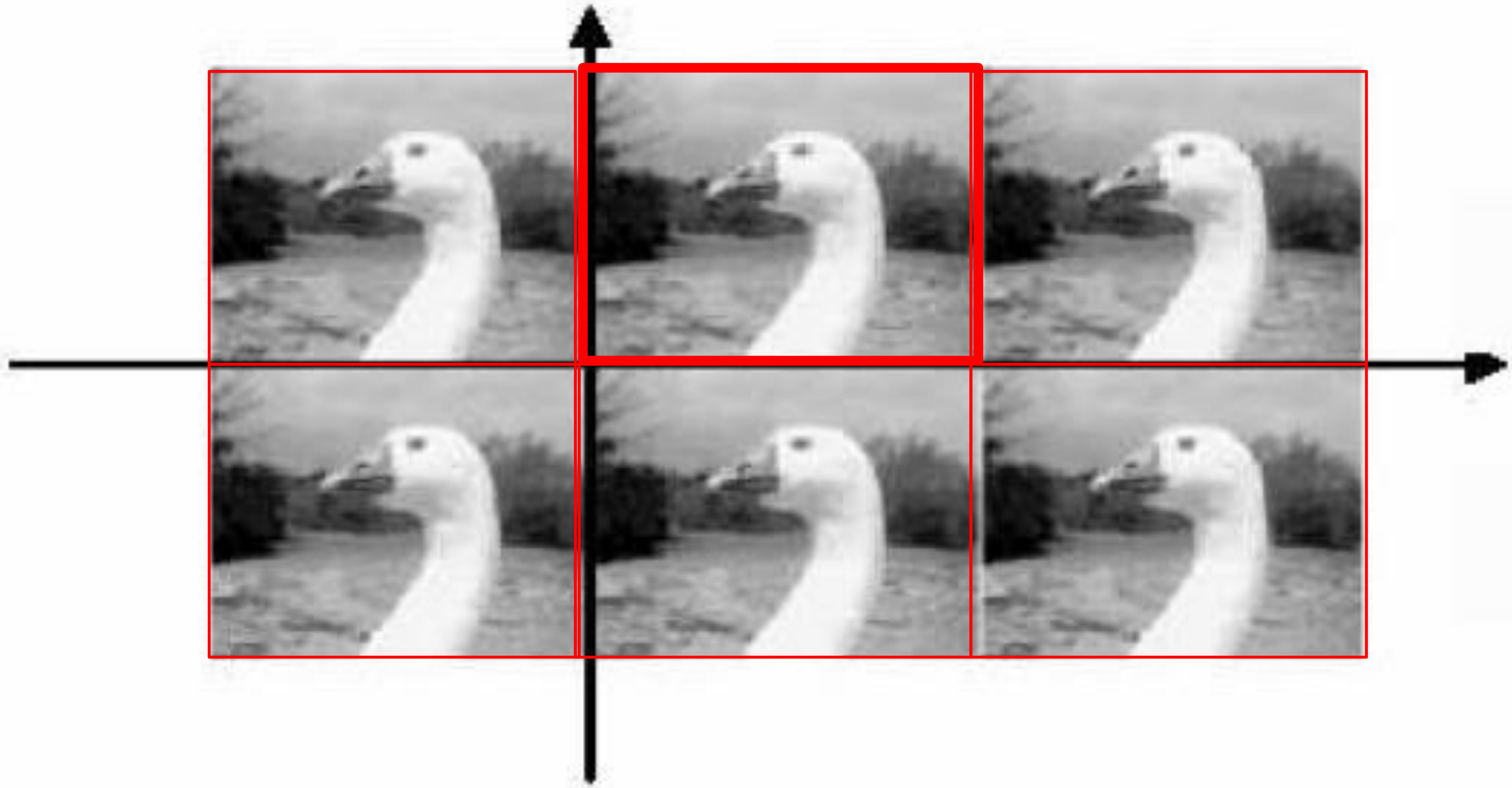
فهرست مطالب

- تصاویر پایه‌ی تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دوبعدی
- تحلیل در حوزه‌ی فرکانس
  - فیلتر پایین‌گذر گاوسی
  - تحلیل سایر فیلترها

تبدیل فوریه گسسته(ادامه...)

- برای محاسبات کامپیوتری از تبدیل گسسته‌ی فوریه (DFT) استفاده می‌شود.
- به همین جهت برای پردازش تصویر دیجیتال هم خواهیم داشت:
  - همانند تبدیل گسسته‌ی یک بعدی می‌باید ماتریس تصویر ابتدا متناوب گردد.

متناوب نمودن تصویر



چگونگی متناوب کردن تصویر (سیگنال دوبعدی)

تبدیل گسسته‌ی یک بعدی

$\{ z(n) \} \Leftrightarrow \{ Z(k) \}$
$n, \; k = 0, 1, \ldots, N-1$
$W_N = \exp\{ -j2\pi / N \}$

$$\begin{cases} Z(k) = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cdot W_N^{nk} \\ z(n) = \dfrac{1}{\sqrt{N}} \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} Z(k) \cdot W_N^{-nk} \end{cases}$$

- ماتریس یکانی DFT به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{n,k} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{nk} \right\}, \qquad 0 \le k, n \le N-1$$

- بردارهای پایه‌ی تبدیل یکانی DFT ستون‌های F^{T} یا همان F است. (زیرا F ماتریسی متقارن است).
- تذکر: برای این که ماتریس تبدیل یکانی باشد، رابطه‌ی تبدیل در $\sqrt{N}$ ضرب شده است.

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N_0-1} \alpha(K,n) x(n)$$

ماتریس تبدیل

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^{2} & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^{2} & W_N^{4} & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

$W_N = \exp\{-j2\pi / N\}$

ماتریس تبدیل یک‌بعدی (چهارنمونه)

For $N = 4$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad X = \mathbf{F}x$$

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{nk} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right\}$$

ماتریس تبدیل یک‌بعدی (ادامه...)

$$X(0) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{0}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(0)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(0)}{4}}.$$

$$X(1) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{1}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(1)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(1)}{4}}.$$

$$X(2) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{2}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(2)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(2)}{4}}.$$

$$X(3) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{3}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(3)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(3)}{4}}.$$

ماتریس تبدیل یک‌بعدی (ادامه...)

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل یک‌بعدی (مثال)

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}[0] \\ \boldsymbol{X}[1] \\ \boldsymbol{X}[2] \\ \boldsymbol{X}[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\boldsymbol{j} & -1 & \boldsymbol{j} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \boldsymbol{j} & -1 & -\boldsymbol{j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

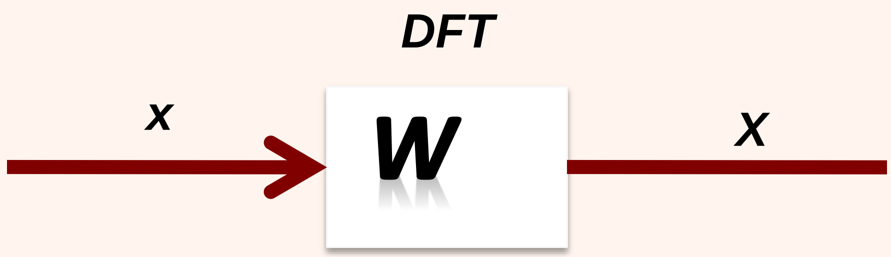
ماتریس تبدیل یک‌بعدی (چهارنمونه)

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

تبدیل معکوس

$$\boxed{X = Wx \rightarrow DFT}$$



$$\boxed{x = W^{H} X \rightarrow IDFT}$$

Fast Fourier Transform

- به وسیله‌ی دستور *fft* می‌توان DFT یک سیگنال را محاسبه نمود.

Y = fft(X,n) returns the n-point DFT

- اگر طول X از n کم‌تر باشد عموماً به همان تعداد صفر به انتهای سیگنال اضافه شود.

تبدیل فوریه دوبعدی گسسته

برای سادگی ماتریس را مربعی در نظر می‌گیریم

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\exp(-j2\pi(ux/N+vy/N))$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\exp(j2\pi(ux/N+vy/N))$$

$$t_f=\frac{1}{N}\exp(-j2\pi(ux/N+vy/N))$$

$$t_b=\frac{1}{N}\exp(j2\pi(ux/N+vy/N))$$

$$t_b=t_f^{*T}=t_f^{-1}\Rightarrow \textit{unitary}\ \text{matrix}$$

خاصیت جدایی‌پذیری تبدیل فوریه

- تبدیل فوریه دارای خاصیت خطی است.
- تبدیل فوریه تبدیلی جدایی‌پذیر است.

$f(m,n)$ → تبدیل فوریه‌ی یک بعدی روی هر سطر → $F'(m,V)$ → تبدیل فوریه‌ی یک بعدی روی هر ستون → $F(u,v)$

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)\exp(-j2\pi(um/N+vn/N))$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\exp(-j2\pi um/N)\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)\exp(-j2\pi vn/N)$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}F'(m,v)\exp(-j2\pi um/N)$$

$$W_N = \exp^{(-j2\pi/N)}$$

تصاویر پایه

- برای تبدیل دو بعدی فوریه تصاویر پایه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A(u,v) = \begin{bmatrix} 1 \\ W_N^{u} \\ W_N^{2u} \\ . \\ . \\ W_N^{(N-1)u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & W_N^{v} & W_N^{2v} & . & . & W_N^{(N-1)v} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^{2} & \cdots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^{2} & W_N^{4} & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

تصاویر پایه

$$W_N = \exp^{(-j2\pi/N)}$$

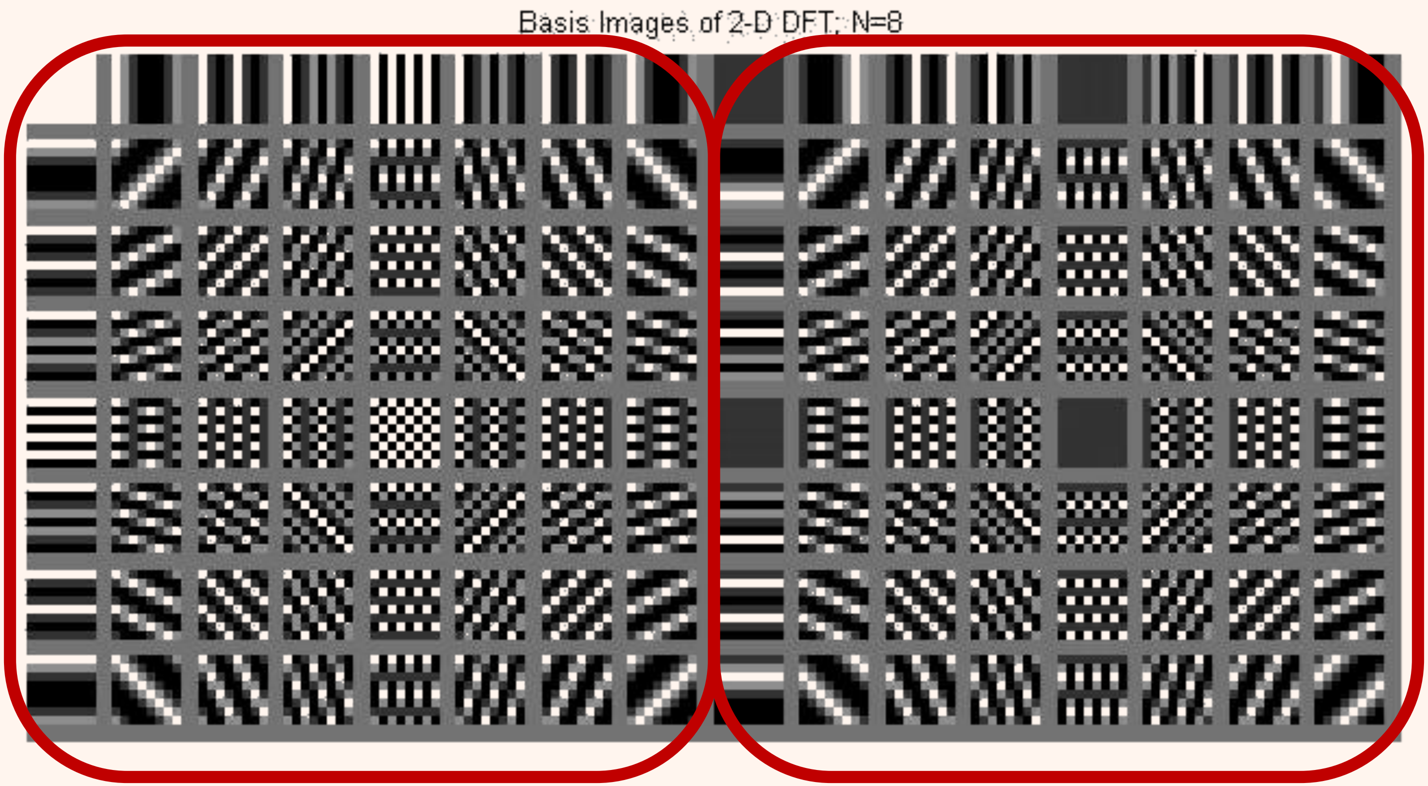
$$A(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & W_N^{v} & W_N^{2v} & .. & W_N^{(N-1)v} \\ W_N^{u} & W_N^{u+v} & W_N^{u+2v} & .. & W_N^{u+(N-1)v} \\ W_N^{2u} & W_N^{2u+v} & W_N^{2u+2v} & .. & W_N^{2u+(N-1)v} \\ . & . & . & .. & . \\ . & . & . & .. & . \\ W_N^{(N-1)u} & W_N^{(N-1)u+v} & W_N^{(N-1)u+2v} & .. & W_N^{(N-1)u\,(N-1)v} \end{bmatrix}$$

به دست آوردن تصاویر پایه

$$\mathbf{F}=\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}w_N^{nk}\right\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{N}}e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right\}$$

```
N=8;
F=zeros(N,N);
for n=1:N
    for k=1:N
        F(n,k)=exp(-j*2*(pi/N)*(n-1)*(k-1));
    end
end
A=cell(N,N);
for u=1:N
    for v=1:N
        A{u,v}=(F(:,u)*F(v,:));
    end
end
```

تصاویر پایه



قسمت حقیقی

قسمت موهومی

نکات

- هر یک از تصاویر پایه نشان‌دهنده‌ی خواص مولفه‌های مربوط است.
- مؤلفه‌ی (۰,۰) نشان‌دهنده‌ی مقدار میانگین یا مقدار DC تصویر است.
- طبق خواص تبدیل فوریه داریم:

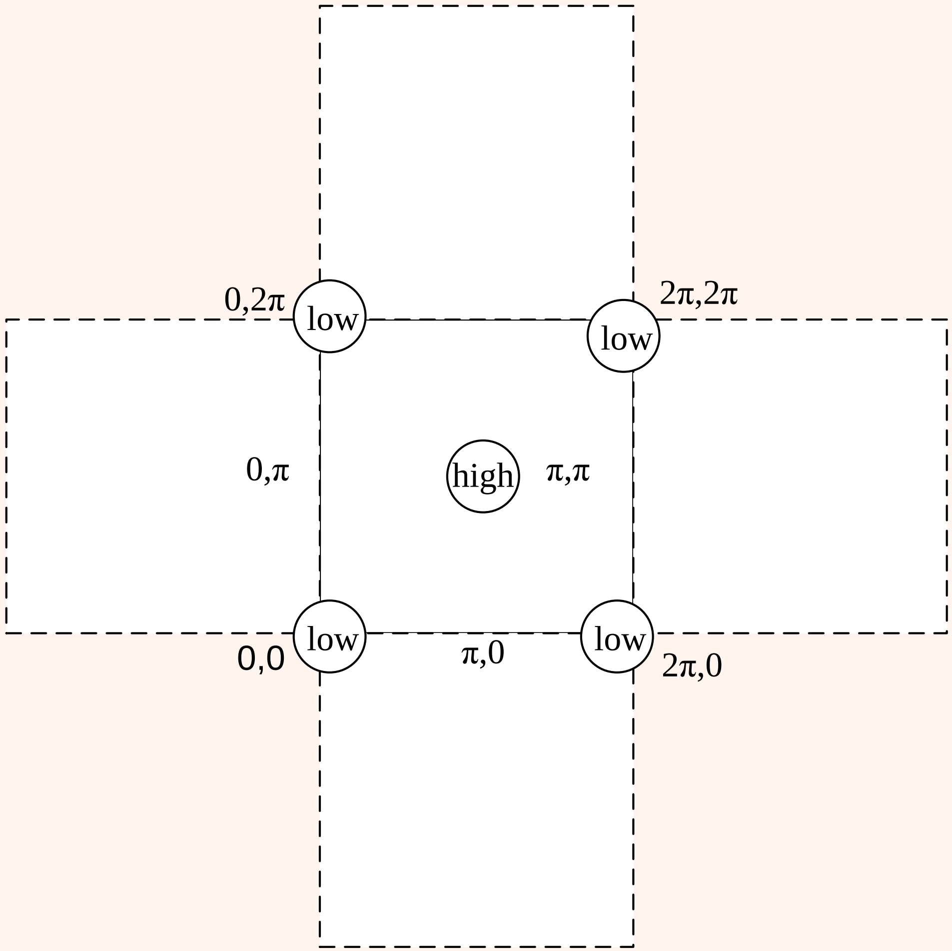
real(i,j)==real(N-1-i,N-1-j)

- بیشترین فرکانس متعلق به مولفه‌ی (۴و۴) است(برای تبدیل ۸×۸).
- هرچه به مرکز نزدیک می‌شویم فرکانس افزایش می‌یابد.

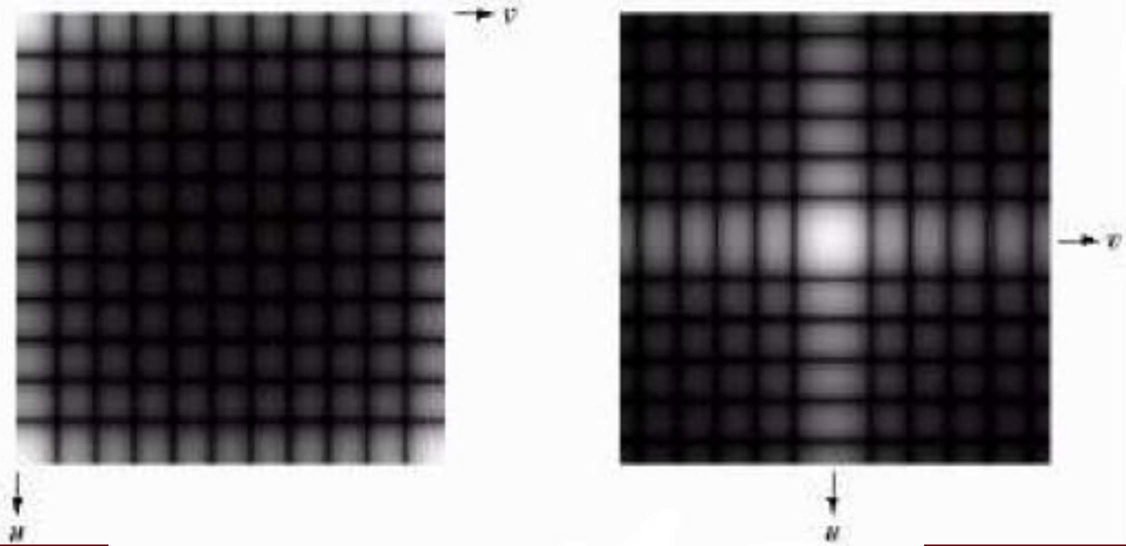
نکات

- تصاویر پایه‌ی افقی و عمودی نشان‌دهنده‌ی وجود چنین ساختارهایی در تصویرند.
- اگر ضرایب متناظر با هر یک از تصاویر پایه صفر باشد یعنی میزان اشتراک چنین تصویرپایه‌ای در ساختن تصویر اصلی صفر است.
- به صورت کلی هر ضریب میزان دخالت تصویر پایه‌ی متناظر را در ساختن تصویر اصلی نشان می‌دهد.

دامنه‌ی فرکانس سیگنال‌های زمان‌گسسته

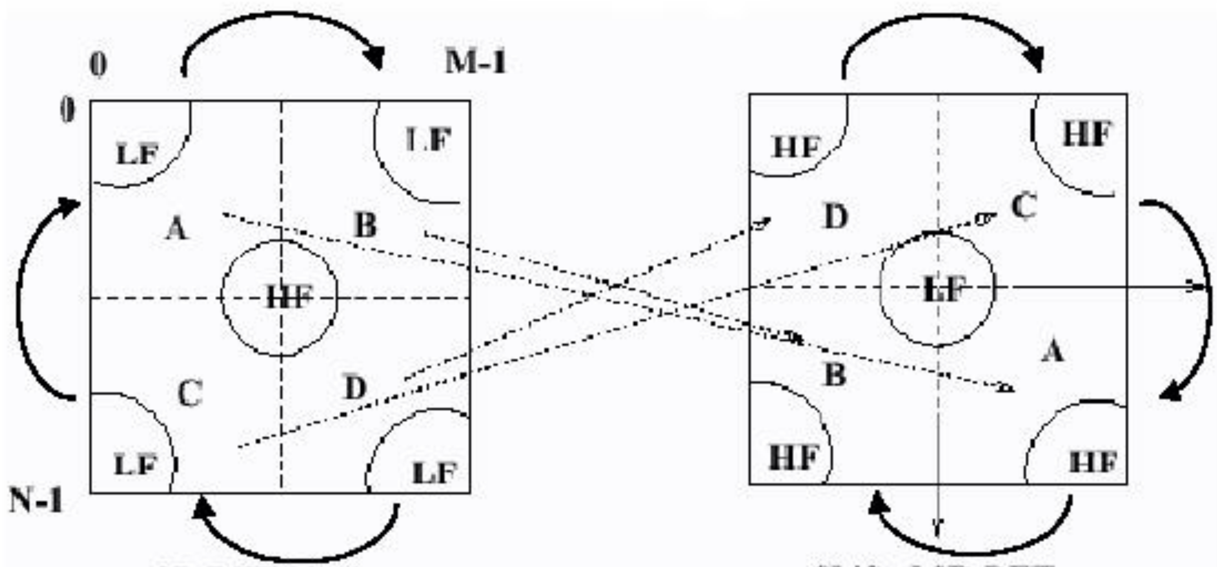


نمایش اندازه‌ی تبدیل فوریه در دو روش



مبدا بالا (سمت چپ)

مبدا وسط



2D DFT block

Shifted 2D DFT

Fourier Spectrum

$$|F(u,v)| = \left[R^2(u,v) + I^2(u,v)\right]^{1/2}$$

Phase Angle

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

$$F(u,v) = |F(u,v)| e^{-j\phi(u,v)}$$

Power Spectrum

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

تاثیر فاز

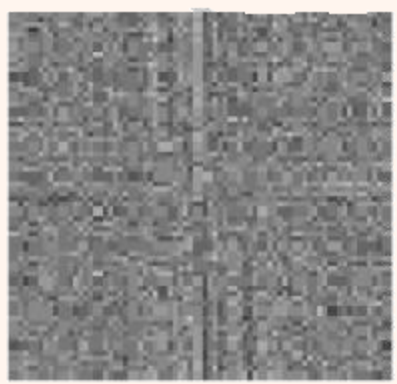
- تبدیل فوریه دارای دو مقدار حقیقی و موهومی است.
- جهت تحلیل مقادیر اندازه و فاز محاسبه می‌شود که برای تبدیل معکوس به هر دوی این مقادیر نیاز است.

تصویر اصلی

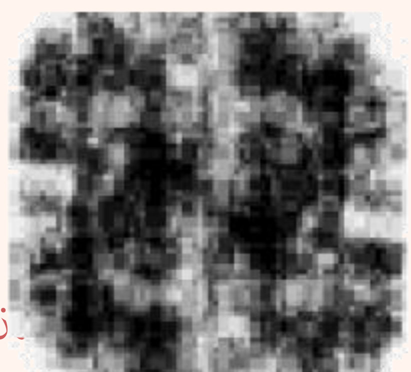
اندازه‌ی تبدیل فوریه (مبدا به وسط انتقال یافته)

اندازه‌ی تبدیل با استفاده از لگاریتم

فاز تبدیل فوریه

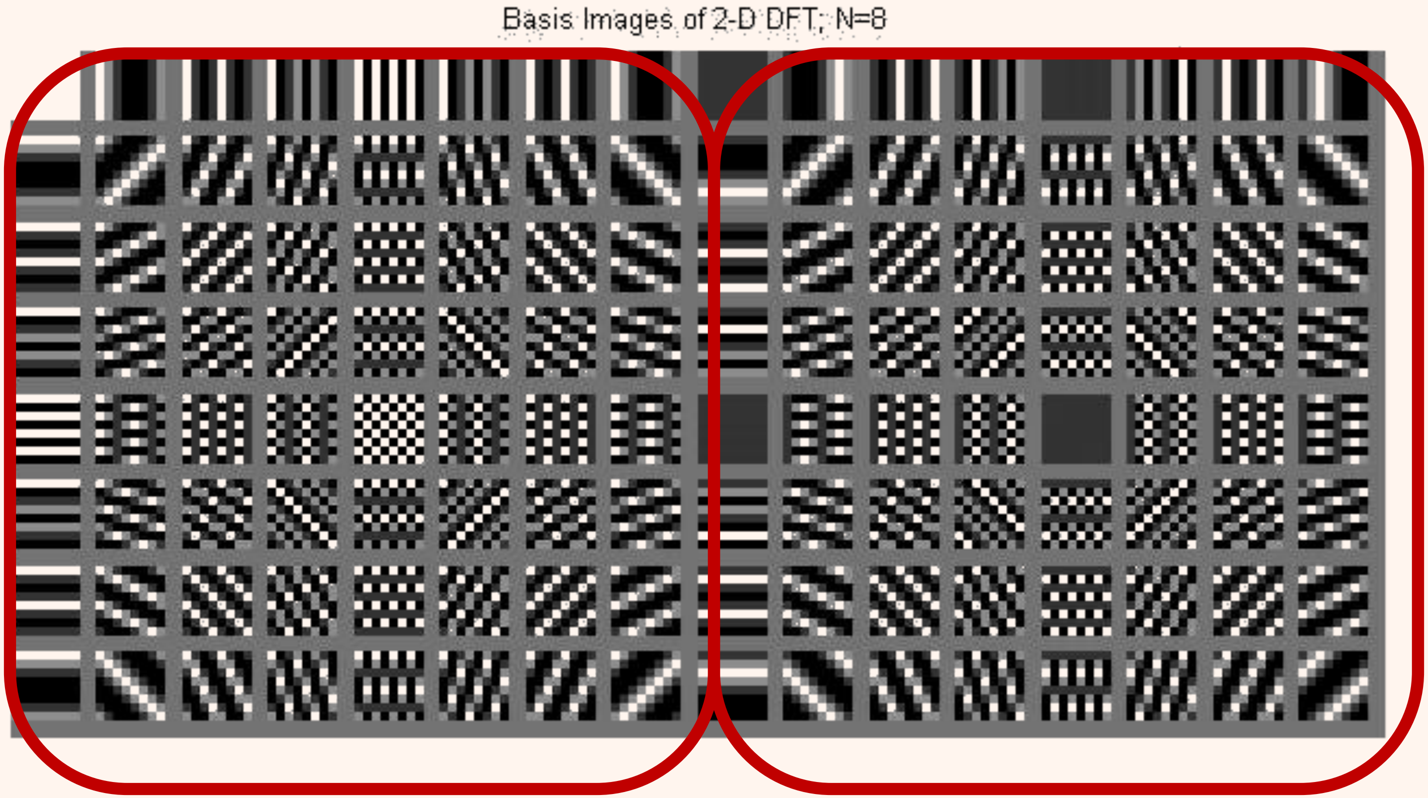


تصویر بازسازی شده با اندازه تبدیل و فاز صفر



نه‌ای

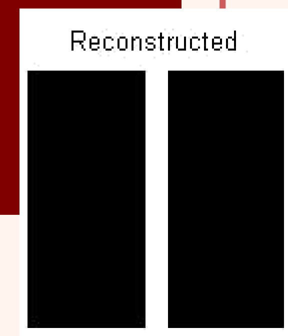
تصاویر پایه

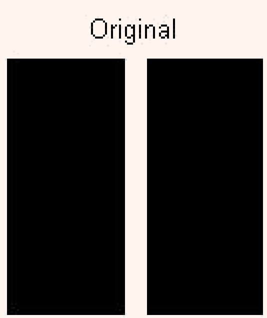


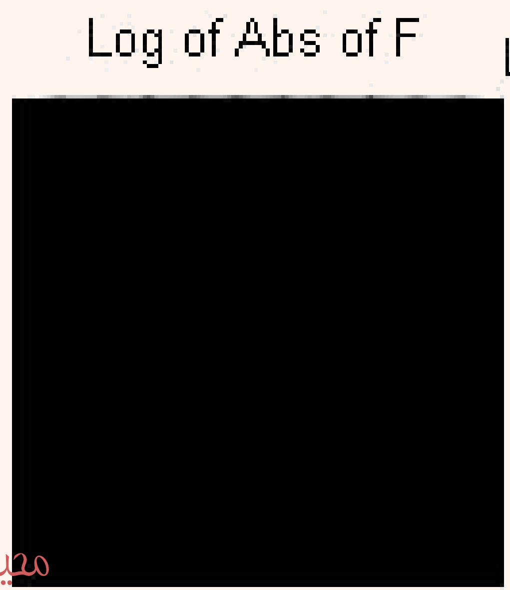
قسمت حقیقی

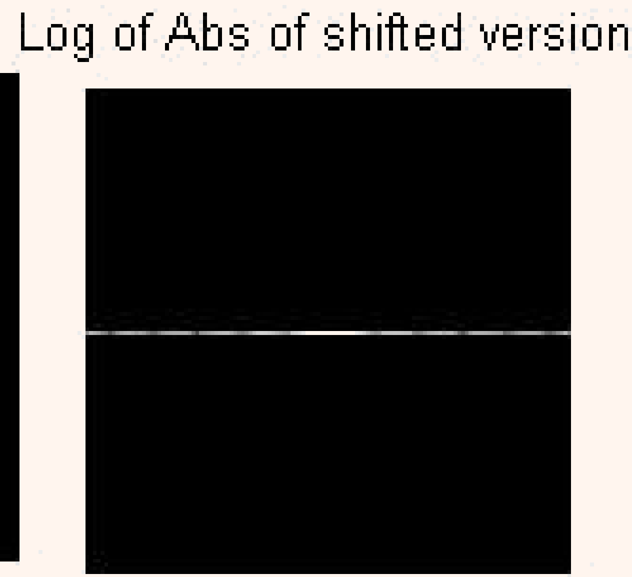
قسمت موهومی

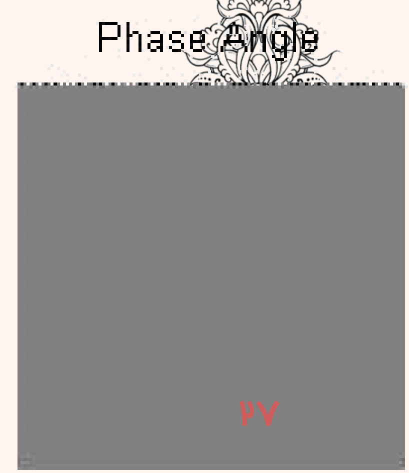
```
f=zeros(128,128);
f(:,60:70)=1;
imshow(f,[ ]);title('Original');
F = fft2(f);
S2=log(1+abs(F));
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');
Fc=fftshift(F);
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of Abs of shifted version');
Phase=atan2(imag(F),real(F));
figure;imshow(Phase,[ ]);title('Phase Angle');
f2=real(ifft2(F));
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```









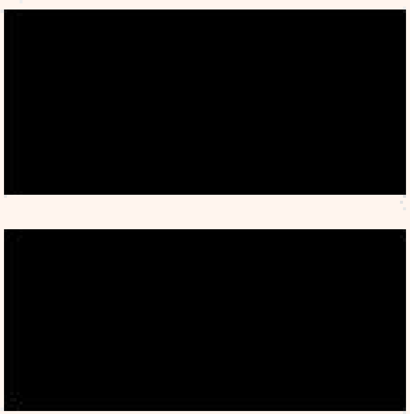


مثال

```
f=zeros(128,128);
f(60:70,:)=1;
imshow(f,[ ]);title('Original');
F = fft2(f);
S2=log(1+abs(F));
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');
Fc=fftshift(F);
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of
Abs of shifted version');
f2=real(ifft2(F));
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```

Reconstructed

Original

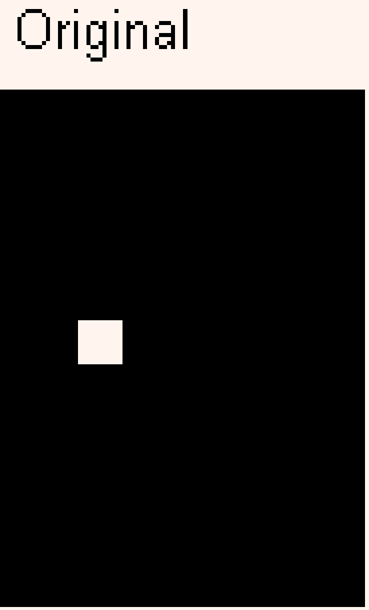


Log of Abs of F

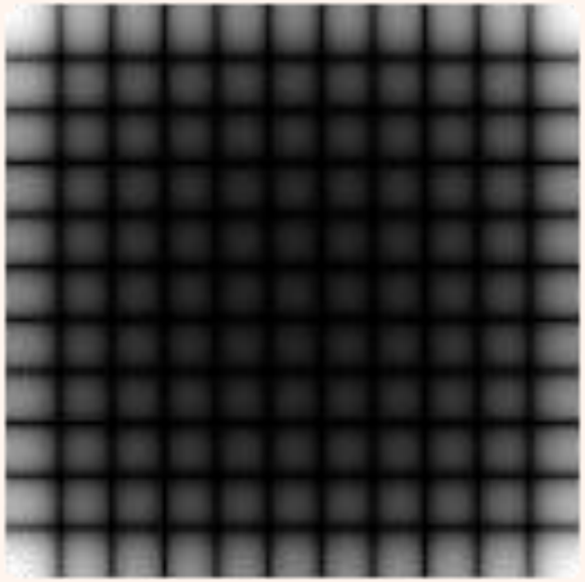
Log of Abs of shifted version

مثال ۳

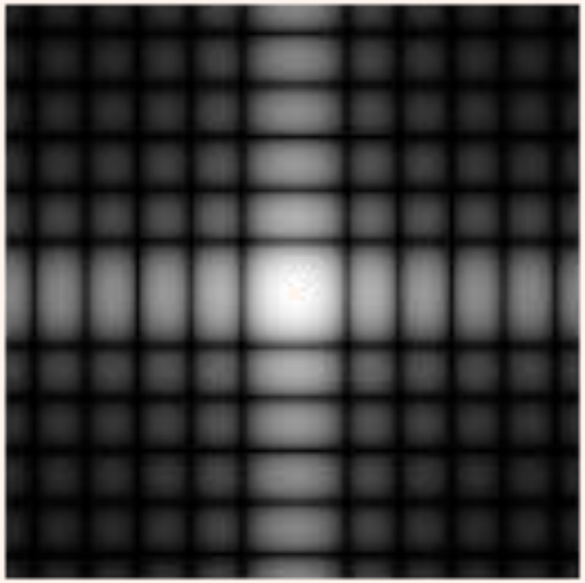
```
f=zeros(128,128);
f(58:68,58:68)=1;
imshow(f,[ ]);title('Original');
F = fft2(f);
S2=log(1+abs(F));
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');
Fc=fftshift(F);
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of Abs of
shifted version');
f2=real(ifft2(F));
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```



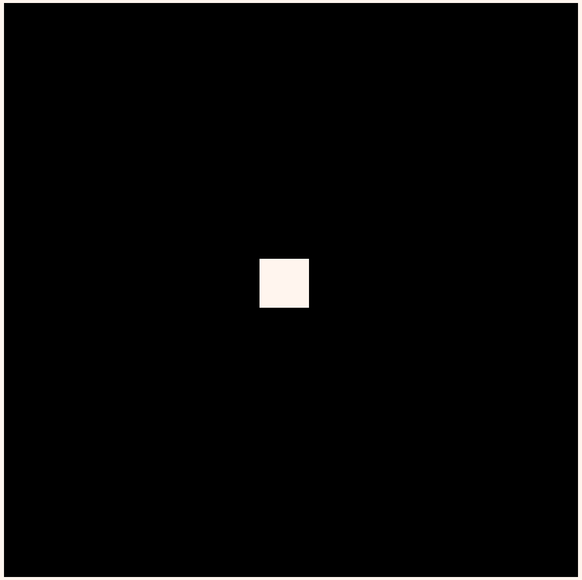
Log of Abs of F



Log of Abs of shifted version



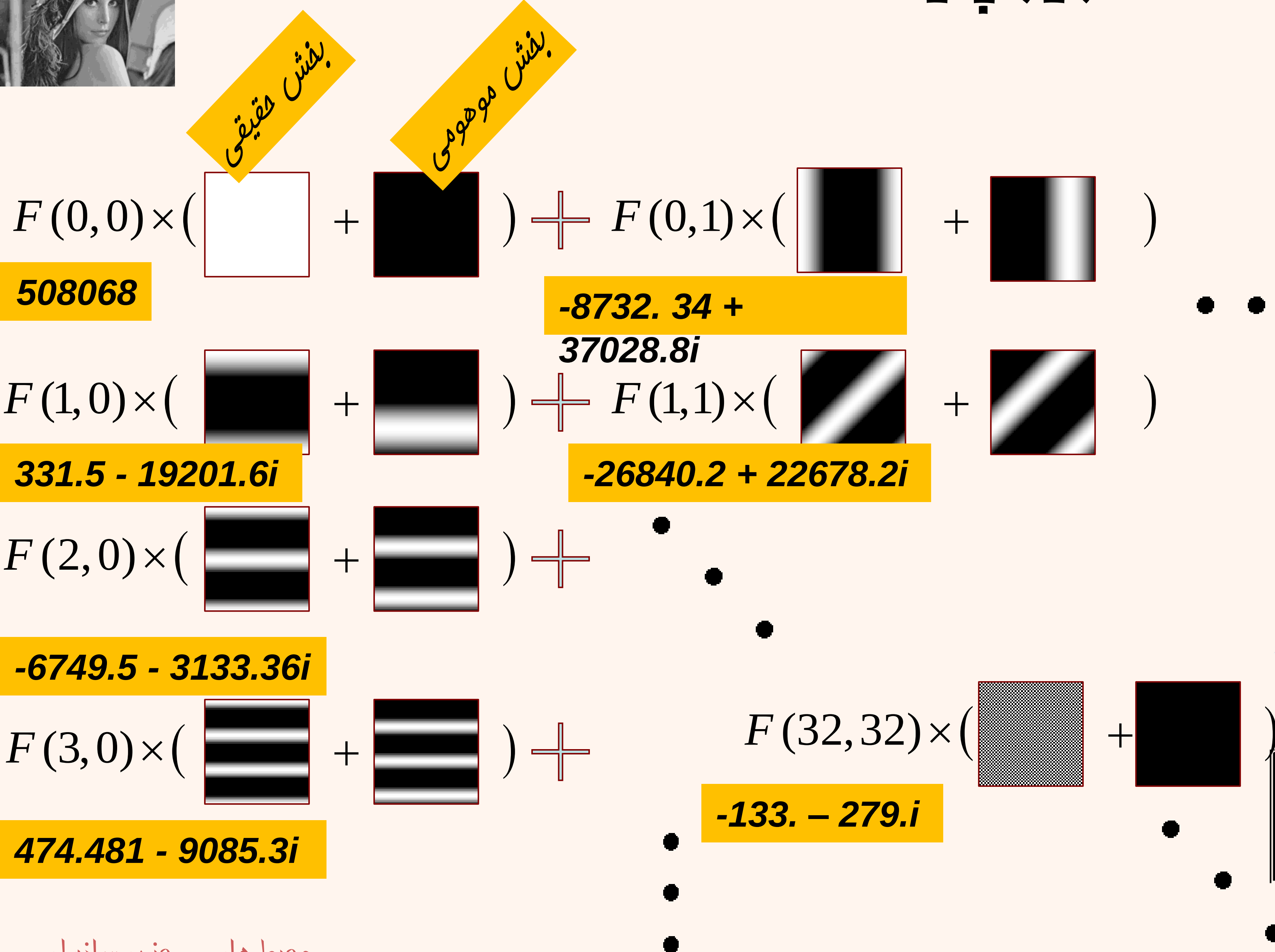
Reconstructed



خصوصیات تبدیل فوریه

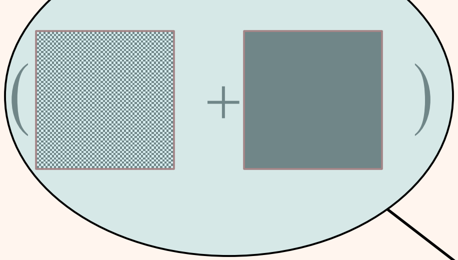
- جهت نشان دادن خواص فرکانسی (تغییرات روشنایی در تصویر)، از تبدیل فوریه استفاده می‌شود.
  - نواحی با روشنایی یکسان فرکانس صفر
  - نواحی با تغییرات روشنایی تدریجی فرکانس پایین
  - نواحی با تغییرات روشنایی ناگهانی فرکانس بالا

تصاویر پایه

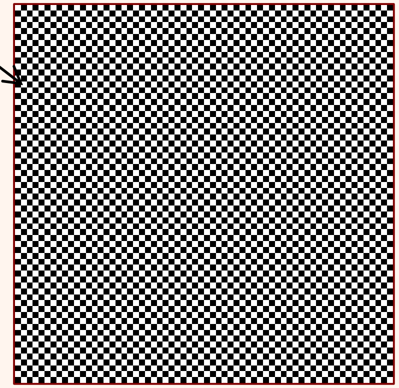


بخش حقیقی
بخش موهومی
$F(0,0)\times($ + $)$ +
508068
$F(0,1)\times($ + $)$
-8732. 34 + 37028.8i
$F(1,0)\times($ + $)$ +
331.5 - 19201.6i
$F(1,1)\times($ + $)$
-26840.2 + 22678.2i
$F(2,0)\times($ + $)$ +
-6749.5 - 3133.36i
$F(3,0)\times($ + $)$ +
474.481 - 9085.3i
$F(32,32)\times($ + $)$
-133. – 279.i

تصاویر پایه

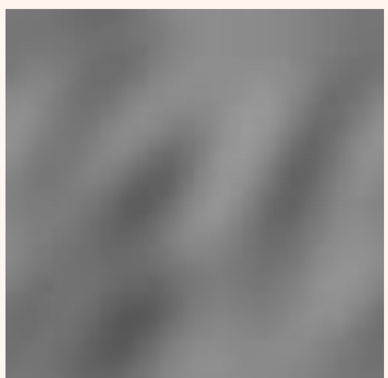
$F(32,32)\times($  $)$

-133. – 279.i



بازسازی تصویر با استفاده از تصاویر پایه

۱(۰.۰۲٪)



۱۶(۰.۳۹٪

۱۰۰(۲٪)

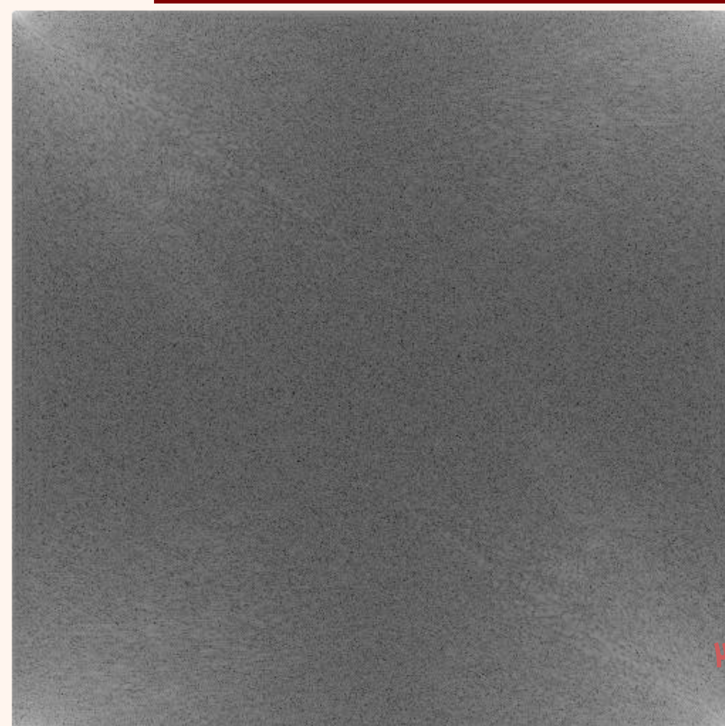
۴۰۰(۹.۷٪)

```
f = imread('lena.gif');
imshow(f,[ ]);title('Original');
F = fft2(f);
S2=log(1+abs(F));
figure;imshow(S2,[ ]);
title('Log of Abs of F');
Fc=fftshift(F);
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);
title('Log of Abs of shifted version');
f2=real(ifft2(F));
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```

اندازه‌ی تبدیل با استفاده از لگاریتم

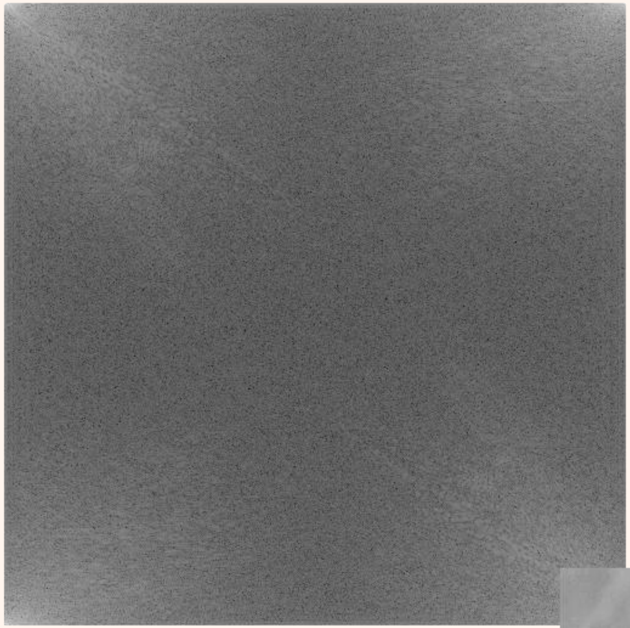
Original

تصویر اصلی

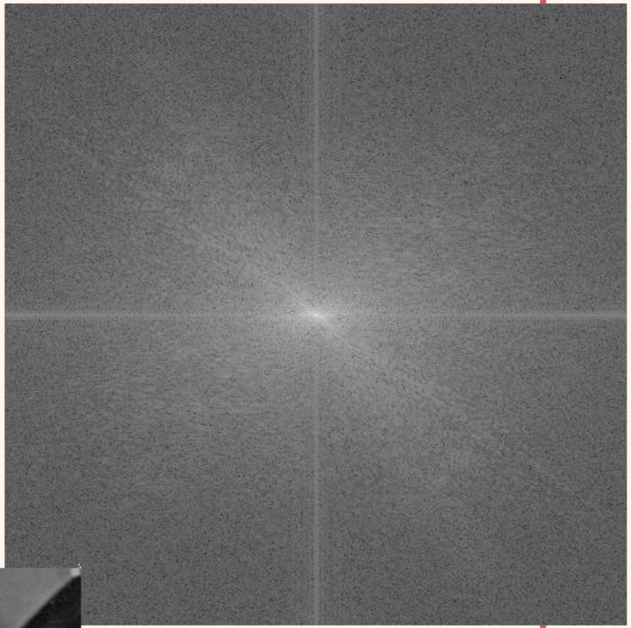


مثال (ادامه...)

Log of Abs of F



Log of Abs of shifted version



Reconstructed

تصویر دوباره‌سازی شده

مثال

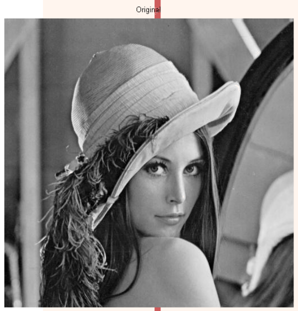
```
f = imread('lena.gif');
figure,imshow(f,[ ]);title('Original');
F = fft2(f);
Fc=fftshift(F);
mask=zeros(size(F));
MskWd=floor(size(F,1)*0.1/2);
mask(size(F,1)/2-MskWd:size(F,1)/2+MskWd,size(F,2)/2-
MskWd:size(F,2)/2+MskWd)=1;
figure,imshow(mask,[ ]);title('mask');
figure,imshow(real(ifft2(fftshift(mask).*F)),[]),title('Compre
ssed Image') ;
```


Original
mask
Compressed Image

مثال

```
f = imread('lena.gif');
F = fft2(f);
mask=zeros(size(F));
for k=1:2:floor(size(F,1)/2)
    MskWd=k;
    mask(size(F,1)/2-MskWd:size(F,1)/2+MskWd,size(F,2)/2-
MskWd:size(F,2)/2+MskWd)=1;
    subplot(121),imshow(mask),title(num2str(k*2));
    subplot(122),imshow(real(ifft2(fftshift(mask).*F)),[]);
    pause
end
```

مثال (ادامه...)



انتقال در حوزه‌ی زمان و فرکانس

- انتقال در حوزه‌ی زمان و فرکانس اثرات متقابلی در تبدیل فوریه و معکوس آن دارند.
- انتقال در حوزه‌ی زمان تنها در فاز اثرگذار است و در اندازه تاثیری نخواهد داشت.

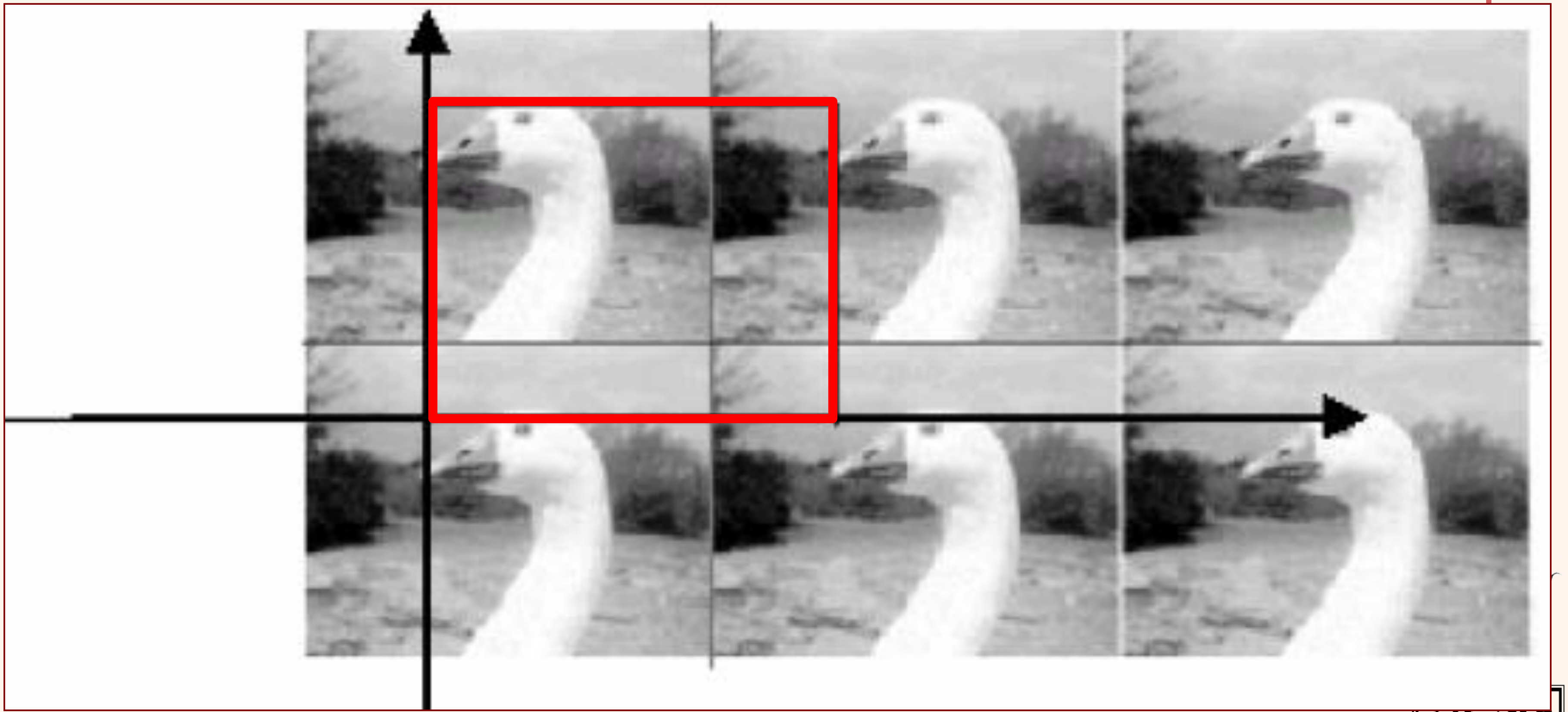
$$F\{x(n-m)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m) e^{-jn\omega}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j(k+m)\omega} \quad \text{if} \qquad n-m=k$$

$$= e^{-jmw} X(\omega)$$

$$f(m-m_0, n-n_0) \xleftrightarrow{DFT} F(u,v)\exp(-j\frac{2\pi}{N}m_0 u - j\frac{2\pi}{N}n_0 v)$$

انتقال دایروی



انتقال خطی تصویر متناوب شده یا انتقال دایروی سیگنال اصلی

چرخش در حوزه‌ی زمان

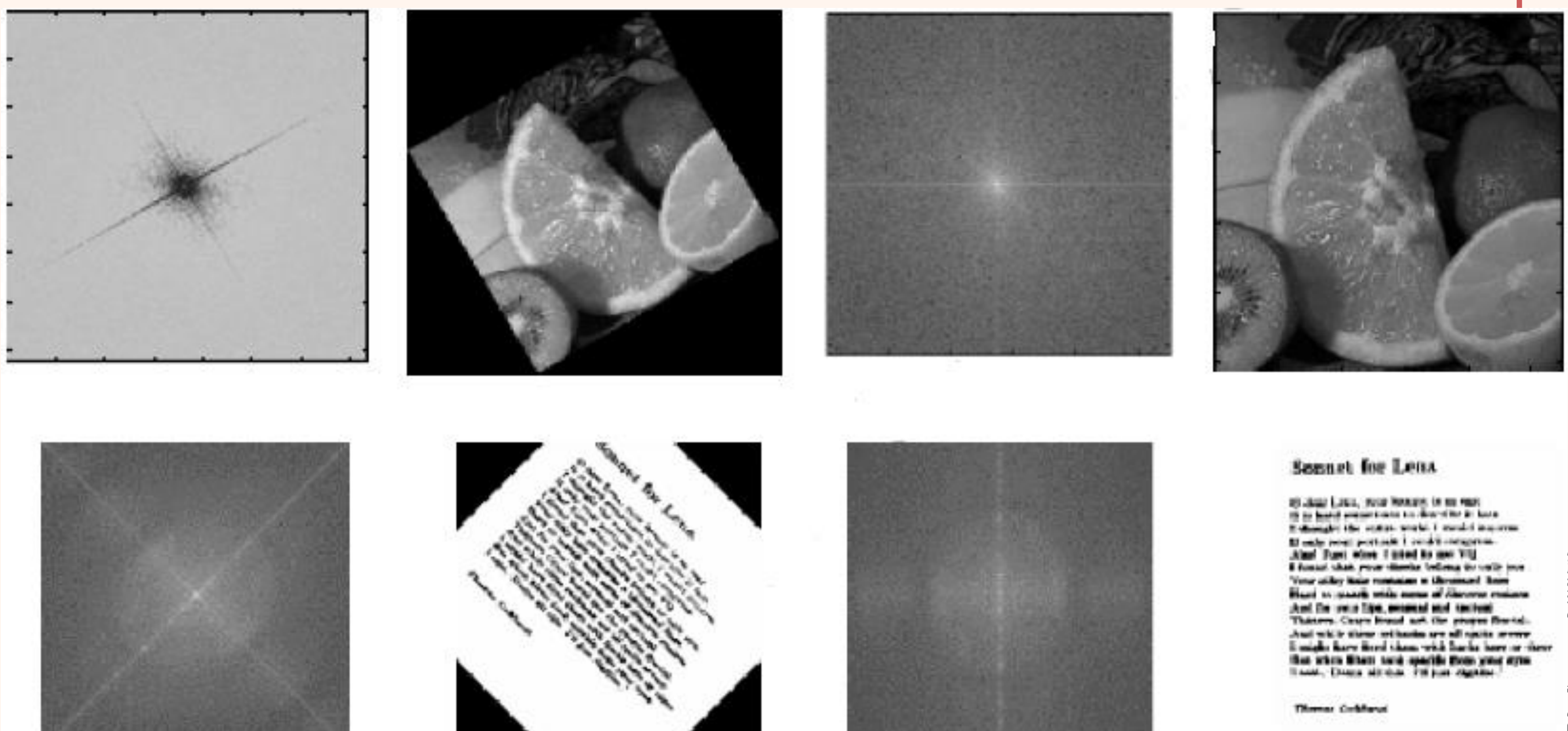
- چرخش در حوزه‌ی زمان، همان درجه چرخش در حوزه‌ی فرکانس را نتیجه می‌دهد.
- براساس مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} m &= r\cos\theta \\ n &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} in\ \text{spatial domain}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \omega\cos\phi \\ v &= \omega\sin\phi \end{aligned}\right\} in\ \text{frequency domain}$$

$$\begin{cases} f(m,n) \longleftrightarrow f(r,\theta) \\ f(r,\theta) \xleftrightarrow{DFT} F(\omega,\phi) \end{cases} \quad \{ f(r,\theta+\theta_0) \xleftrightarrow{DFT} F(\omega,\phi+\theta_0)$$

مثال



تصویر اصلی و چرخش‌یافته‌ی متناظر

تغییر مقیاس

- گستردگی یا فشردگی در حوزه‌ی زمان-مکان نتیجه‌ی معکوس در حوزه‌ی فرکانس خواهد داشت.

$$f(am,bn) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$$

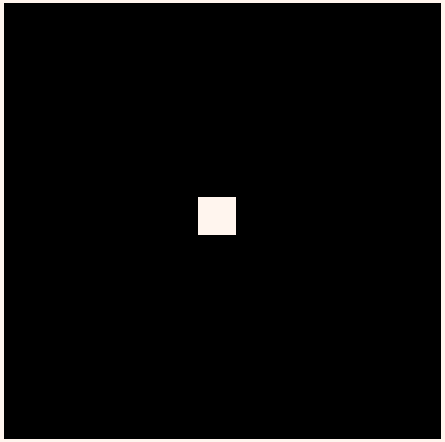
- متوسط سیگنال

مقدار DC سیگنال از مولفه‌ی (0,0) به دست می‌آید

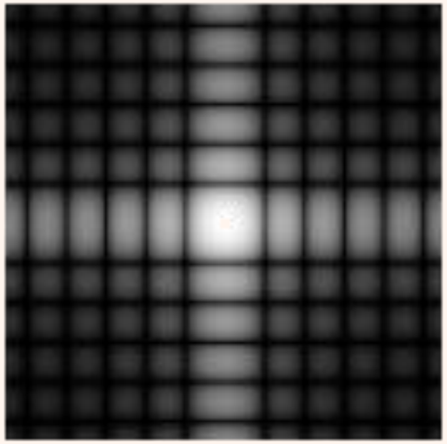
$$Mean[f(m,n)] = \bar{f}(m,n) = \frac{1}{N^2}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n) = \frac{1}{N}F(0,0)$$

تغییر مقیاس(ادامه...)

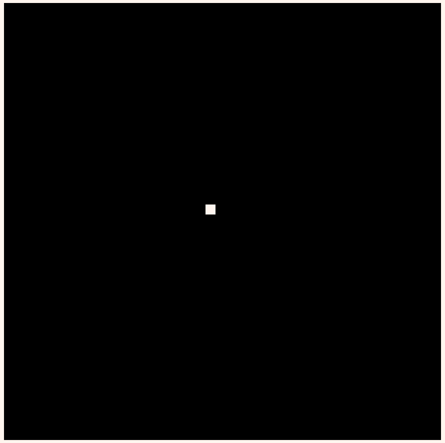
Original



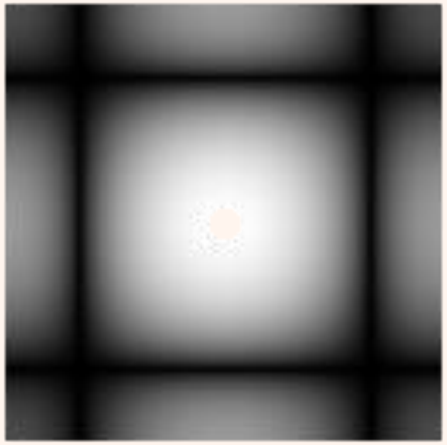
Log of Abs of shifted version



Original



Log of Abs of shifted version



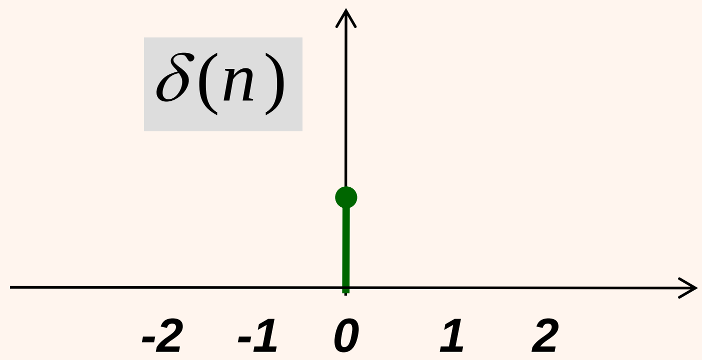
اعمال فیلتر در دامنه‌ی فرکانس

- در دامنه‌ی مکان اعمال فیلتر (LTI) معادل عملیات پیچیده‌ی کانولوشن است.
- در دامنه‌ی فرکانس کانولوشن معادل ضرب ماتریسی خواهد شد.
- توجه داشته باشید که برای فیلترهای کوچک، فیلتر کردن در دامنه‌ی مکان از لحاظ محاسباتی به صرفه‌تر است اما زمانی که ابعاد فیلتر افزایش می‌یابد، توصیه می‌شود در دامنه‌ی فرکانس این کار صورت پذیرد.

$$I(m,n) * H(m,n) \longleftrightarrow I(u,v) H(u,v)$$

تابع ضربه

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

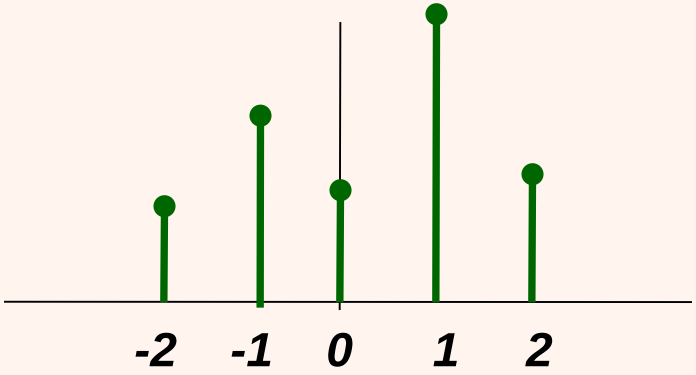


- می‌توان برای نمایش ساختار گسسته‌ی هر تابع، رابطه‌ای به صورت زیر داشت:

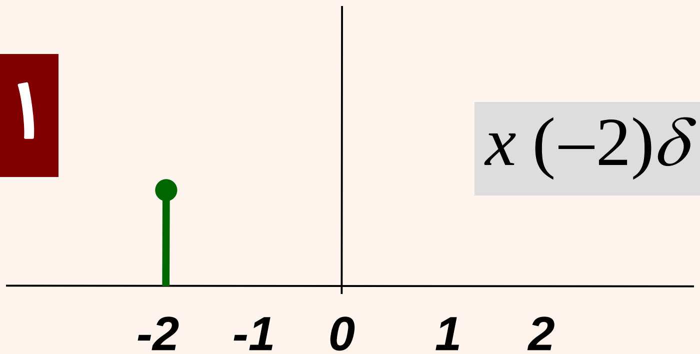
$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

تابع ضربه (ادامه...)

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

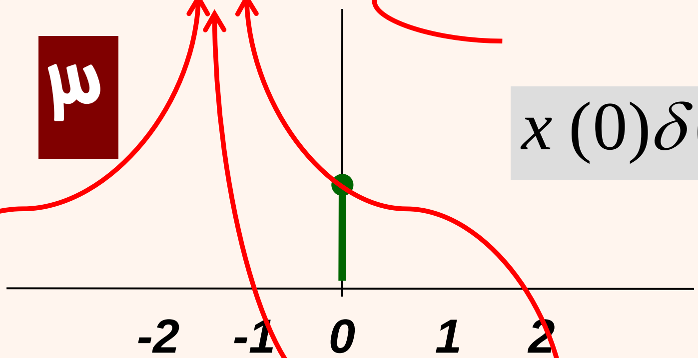


۱



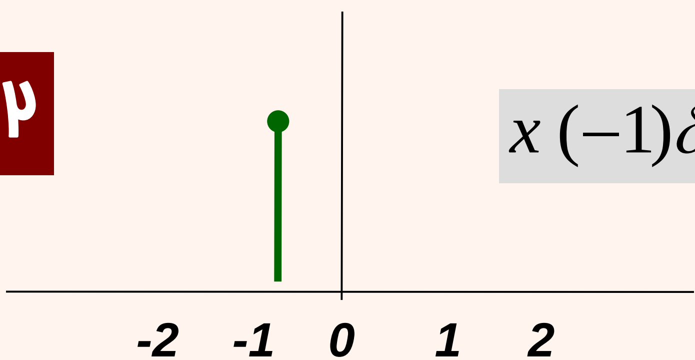
$x(-2)\delta(n-(-2))$

۳



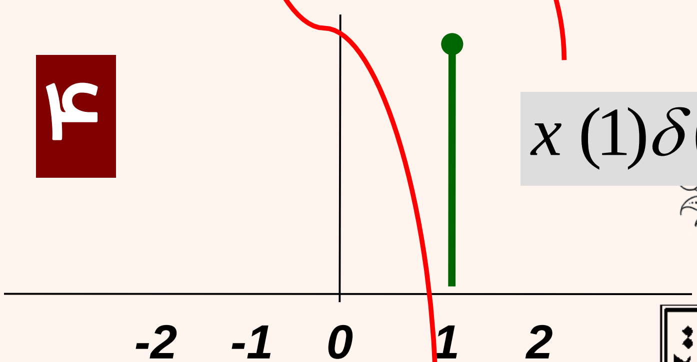
$x(0)\delta(n-0)$

۲



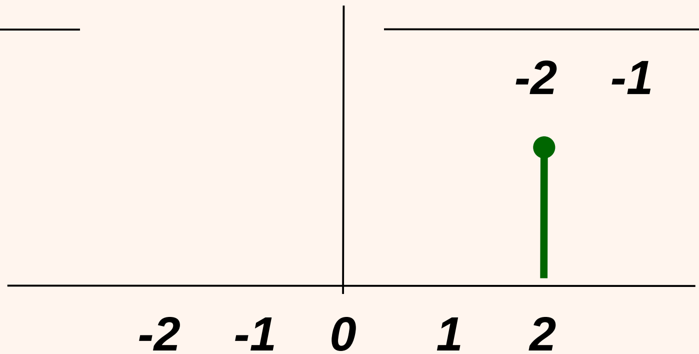
$x(-1)\delta(n+1)$

۴



$x(1)\delta(n-1)$

۵



$x(2)\delta(n-2)$

- اگر x ورودی سیستم باشد به وسیله‌ی تبدیل به خروجی y نگاشت می‌شود.

$$\boxed{x(n) \xrightarrow{T} y(n)}$$

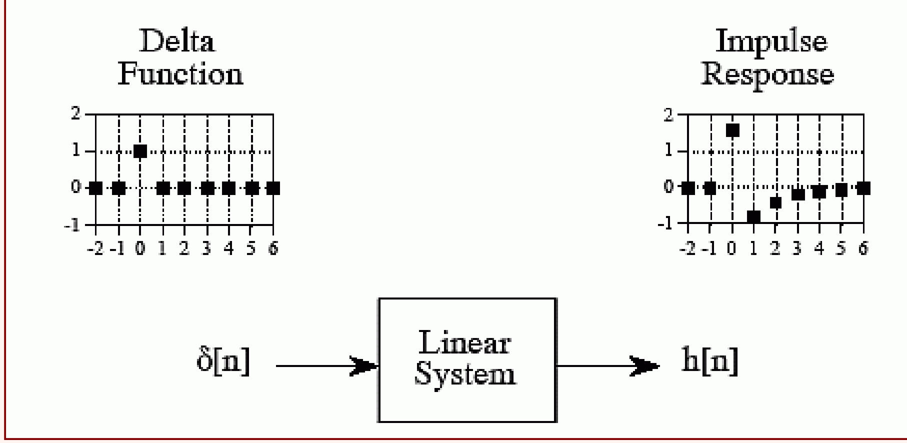
- هر سیگنال را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)}$$

- پس خواهیم داشت:

$$\boxed{y(n) = T[x(n)] = T[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)]}$$

سیستم خطی و تغ



$$\text{Linearity} \quad a x_1(n) + b x_2(n) \rightarrow a y_1(n) + b y_2(n)$$

$$\text{Time Invariance} \quad x(n-n_0) \rightarrow y(n-n_0)$$

$$y(n) = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n-k)]$$

- حال باید دید پاسخ $T[\delta(\text{n-k})]$ چیست؟
  - اگر $h(n) = T[\delta(n)]$ باشد خواهیم داشت:

$$h(n-k) = T[\delta(n-k)]$$

$$\delta(n-k) \xrightarrow{T} h(n-k)$$

ادامه...

$$y(n) = T[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$h(n-k) = T[\delta(n-k)]$$

$$\delta(n-k) \to T \to h(n-k)$$

$$y(n) = T[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Convolution

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

کانولوشن دوبعدی

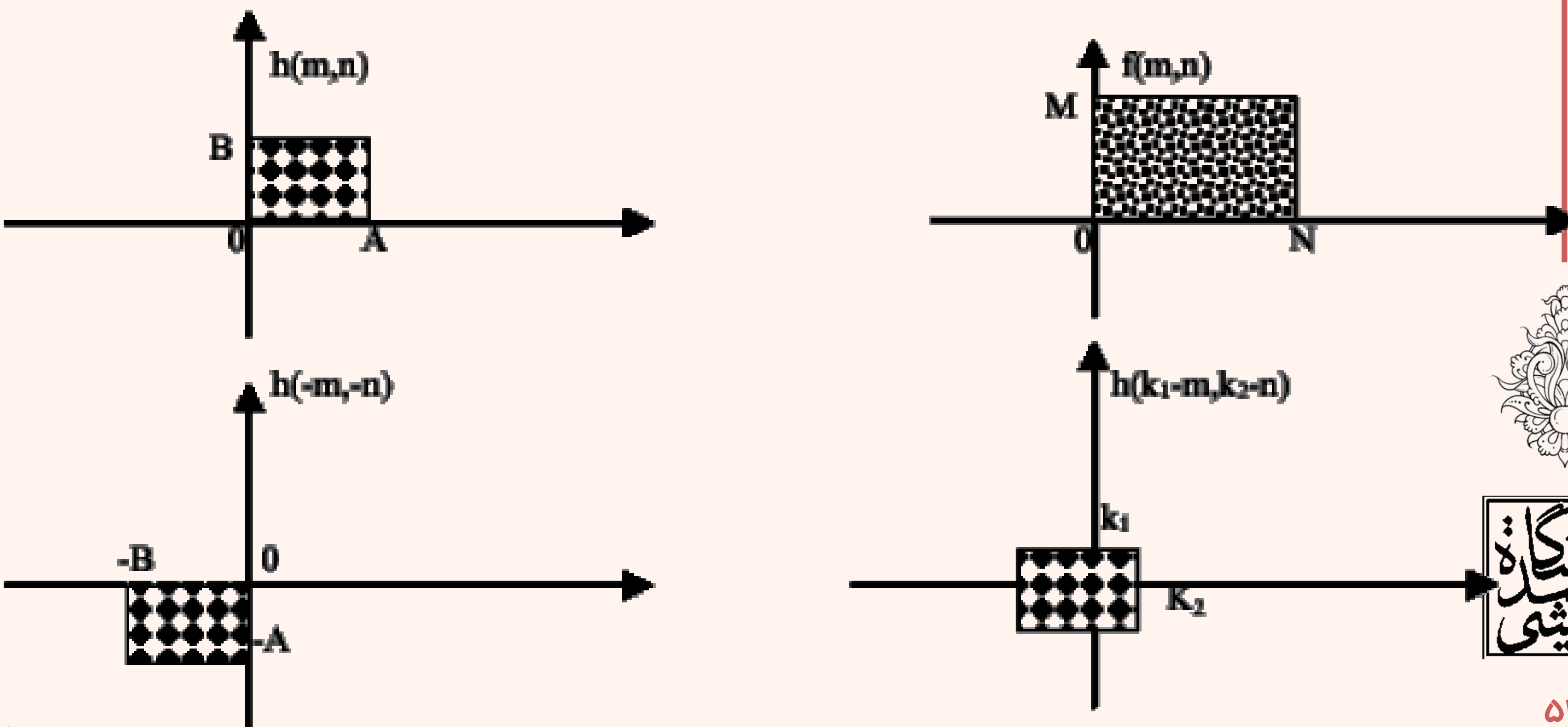
- نتیجه‌ی عبور سیگنال از فیلترهای خطی توسط کانولوشن سیگنال اصلی و پاسخ ضربه‌ی سیستم به دست می‌آید.

$$g(m,n)=f(m,n)*h(m,n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}f(k,l)h(m-k,n-1)$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}h(k,l)f(m-k,n-1)$$

- «$*$» نشان‌دهنده‌ی کانولوشن خطی است، ابتدا h قرینه می‌شود و با انتقال به اندازه‌ی (m, n) رابطه مذکور محاسبه می‌شود.

کانولوشن دوبعدی(ادامه...)

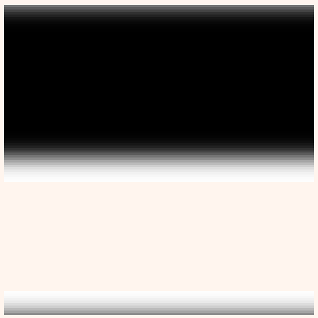
- اگر ماتریس $f(m,n)$ به اندازه‌ی $M\times N$ باشد و h به اندازه‌ی $A\times B$، ماتریس $g(m, n)$ دارای اندازه‌ی $(M+A-1, N+B-1)$ خواهد بود.



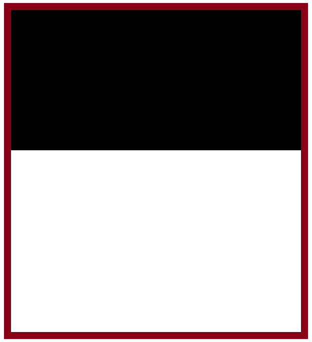
مثال

```
f=zeros(128,128);
f(64:end,:)=255;
figure,imshow(f,[ ]),title('Original');
F=fft2(f);
sig=5;
H=lpfilter('gaussian',128,128,sig);
figure,imshow(H,[ ]),title('LPF');
figure,imshow(fftshift(H),[
]),title('centered LPF');
G=H.*F;
g=real(ifft2(G));
figure,imshow(g,[ ]),title('Filtered');
figure,imagesc(g(1:15,:));
```

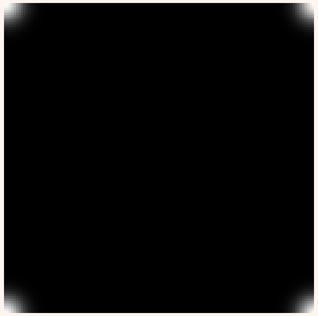
Filtered



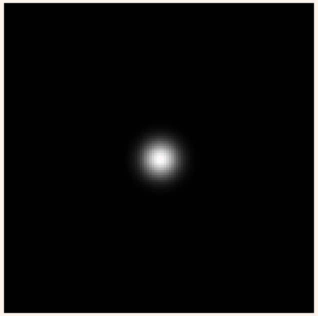
Original



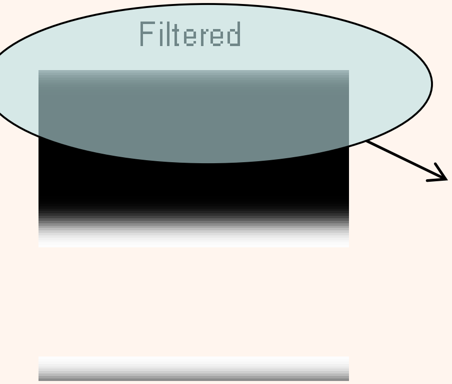
LPF

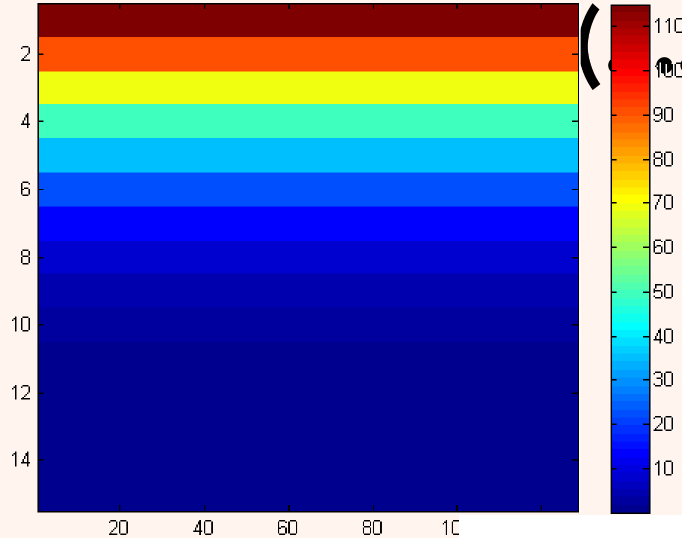


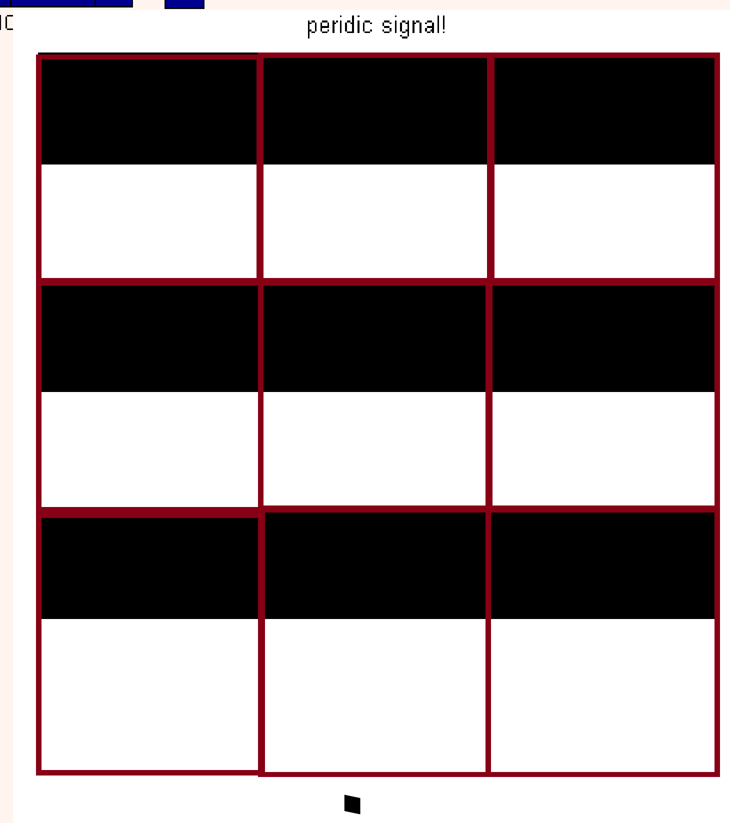
centered LPF



مثال (ادامه...)


Filtered


2
4
6
8
10
12
14
20
40
60
80
10
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10


peridic signal!

کانولوشن دایروی

- همانند سیگنال یک بعدی، رابطه‌ی کانولوشن دوبعدی به صورت خطی است و به طور کلی خواص کانولوشن دوبعدی مشابه کانولوشن یک‌بعدی است.
- برای استفاده در روابط DFT از «کانولوشن دایروی» استفاده می‌شود.
- برای تساوی کانولوشن خطی و دایروی لازم است در ابتدا اندازه‌ی دو ماتریس سیگنال اصلی و پاسخ ضربه، به اندازه‌ی حاصل کانولوشن خطی گسترش یابد.
- این فرآیند با افزایش صفر صورت می‌گیرد.

کانولوشن دایروی با تناوب (N+B-1)×(M+A-1) معادل کانولوشن خطی است.

افزایش صفر

$$f_e(m,n) = \begin{cases} f(m,n) & 0 \le m \le M-1, \quad 0 \le n \le N-1 \\ 0 & M \le m \le M_1, \quad N \le n \le N_1 \end{cases}$$

$$h_e(m,n) = \begin{cases} h(m,n) & 0 \le m \le A-1, \quad 0 \le n \le B-1 \\ 0 & A \le m \le M_1, \quad B \le n \le N_1 \end{cases}$$

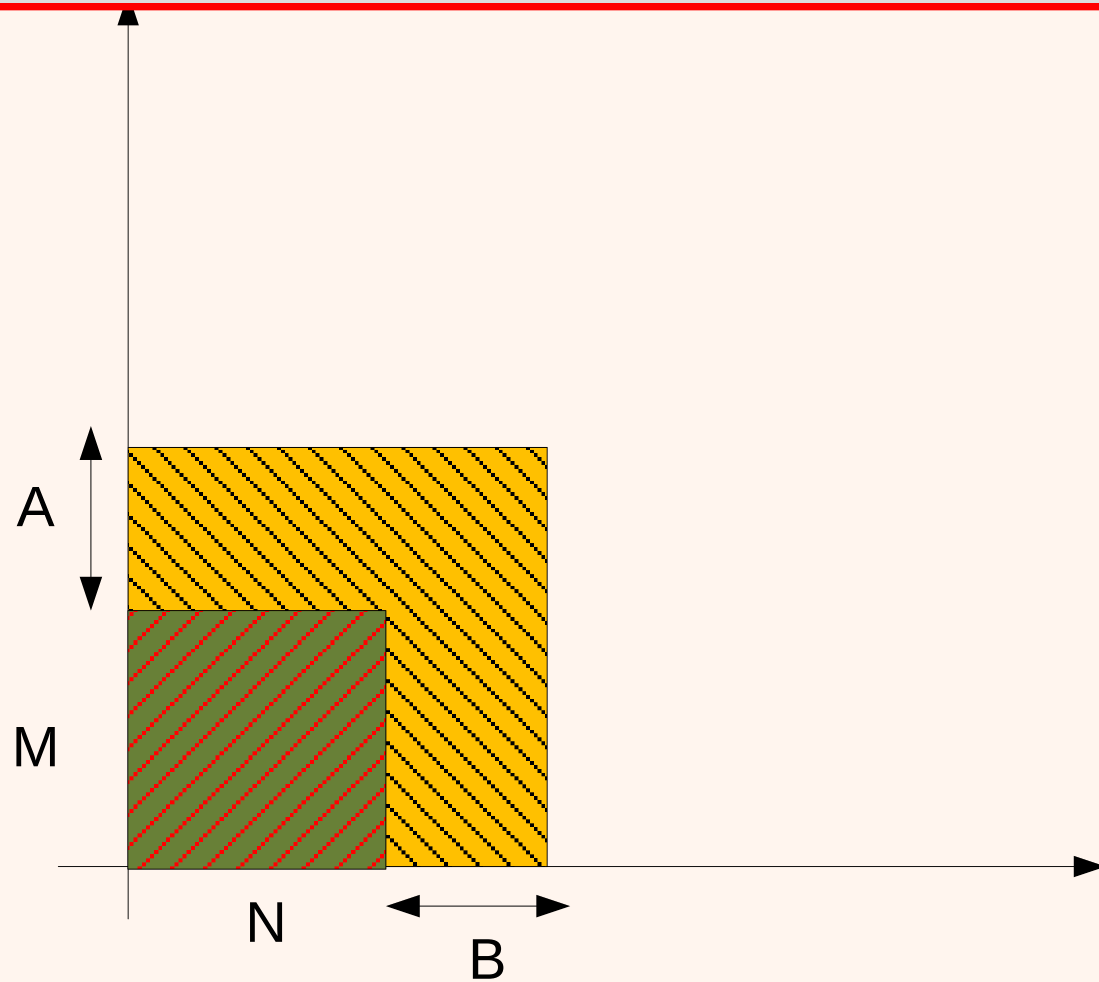
$$M_1 = M + A - 1, \qquad N_1 = N + B - 1$$

- فرضیه‌ی متناوب بودن f و h اعمال می‌شود، و کانولوشن متناوب محاسبه شده، یک دوره از آن در نظر گرفته می‌شود.

افزایش صفر (ادامه...)

$$f_e(m,n)=\begin{cases} f(m,n) & 0\le m\le M-1,\quad 0\le n\le N-1 \\ 0 & M\le m\le M_1,\quad N\le n\le N_1 \end{cases}$$

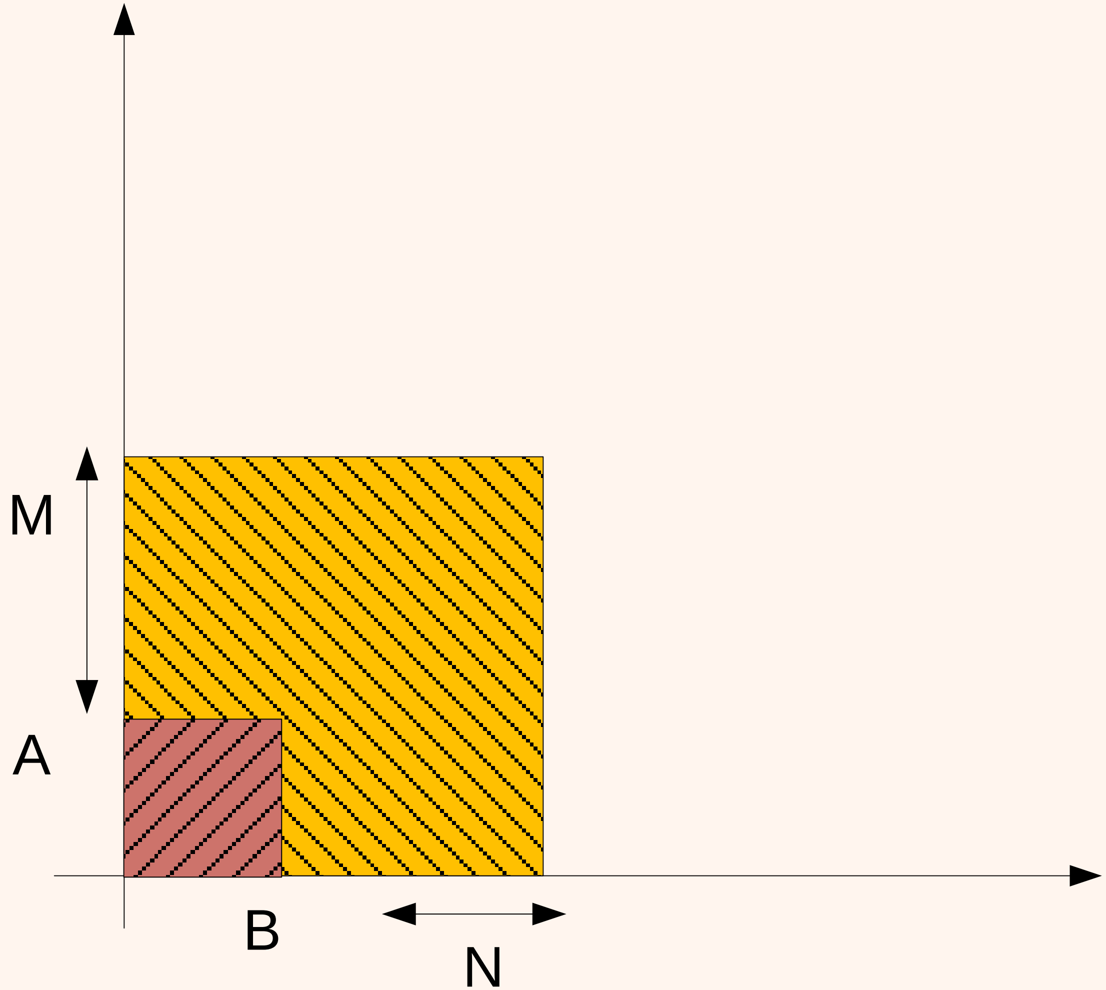
$$\begin{matrix} f & M\times N \\ h & A\times B \end{matrix}$$



افزایش صفر (ادامه...)

$$h_e(m,n) = \begin{cases} h(m,n) & 0 \le m \le A-1, \quad 0 \le n \le B-1 \\ 0 & A \le m \le M_1, \quad B \le n \le N_1 \end{cases}$$

f	$M \times N$
h	$A \times B$



محاسبه‌ی کانولوشن در حوزه‌ی فرکانس

$$f(m,n) * h(m,n) = \{ f_e(m,n) \otimes h_e(m,n) \}$$

$$= \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{N_1-1} f_e(k,l) h_e(m-k, n-l) \xleftrightarrow{DFT} F_e(u,v).H_e(u,v)$$

$$\text{if} \;\; X(\omega) = F\{x(n)\}, \qquad H(\omega) = F\{h(n)\}$$

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) h(n-i) = x(n) * h(n)$$

$$F\{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)] e^{-jwn} \qquad n-k=m$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(m)] e^{-jw(m+k)} = X(\omega) H(\omega)$$

فضای دوبعدی

$$f(m,n) * h(m,n) = \{ f_e(m,n) \otimes h_e(m,n) \}$$
$$= \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{N_1-1} f_e(k,l) h_e(m-k, n-l) \xleftrightarrow{DFT} F_e(u,v).H_e(u,v)$$

$$f_e(m,n) * h_e(m,n) \xleftrightarrow{DFT} F_e(u,v).H_e(u,v)$$

$$f_e(m,n).h_e(m,n) \xleftrightarrow{DFT} \{F_e(u,v) * H_e(u,v)\}$$

کانولوشن در حوزه‌ی زمان مکان معادل ضرب در حوزه ی فرکانس خواهد بود

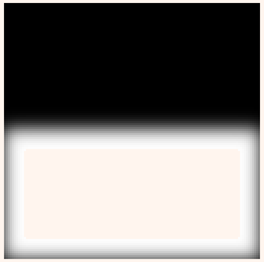
ضرب در حوزه‌ی زمان مکان معادل کانولوشن در حوزه ی فرکانس است

مثال

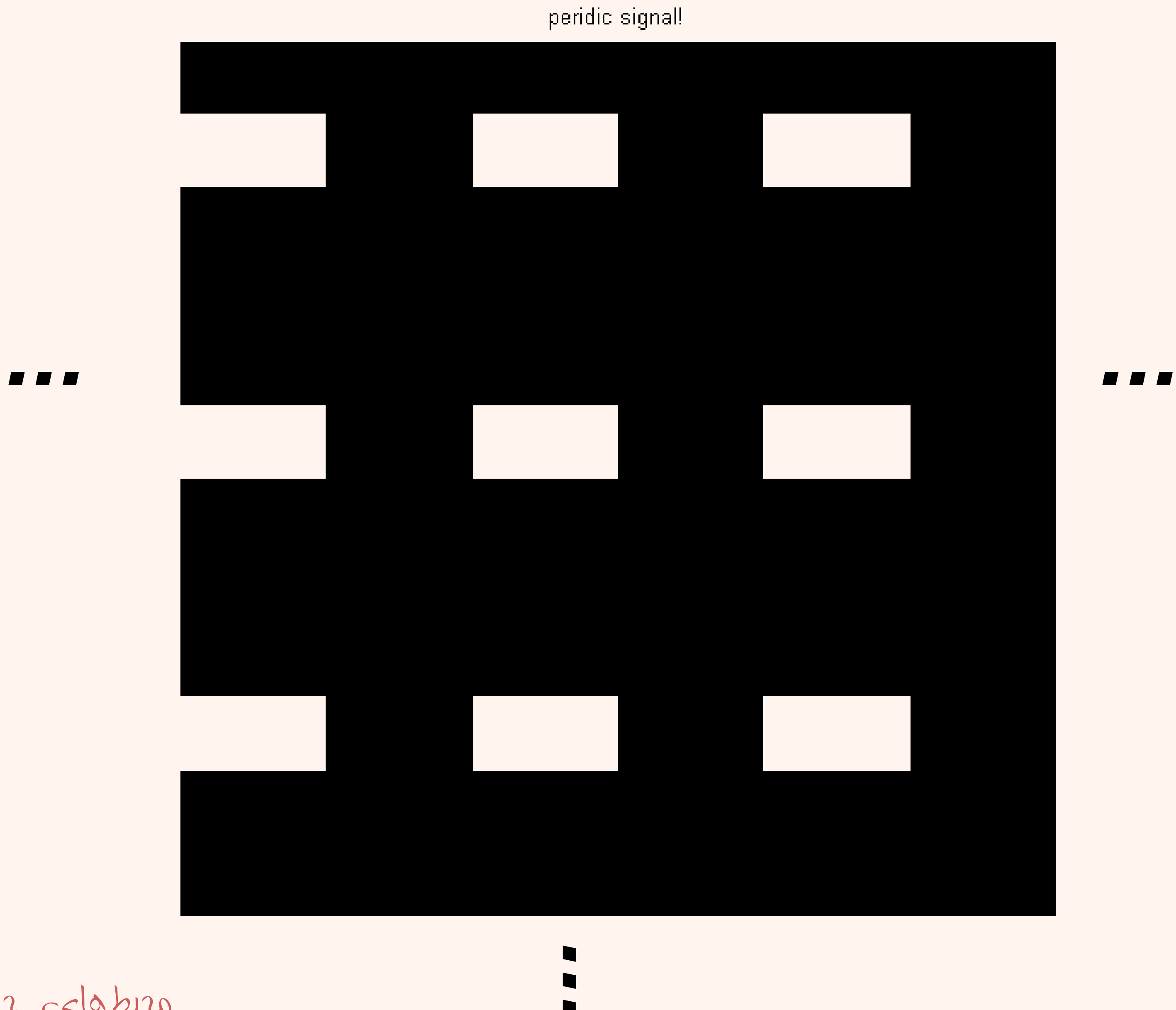
```
f=zeros(128,128);
f(64:end,:)=255;
PQ=paddedsize(size(f));
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
sig=5;
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),2*sig);
G=H.*F;
g=real(ifft2(G));
figure,imshow(g,[ ]),title('Filtered');
```

Full Padded result

Filtered

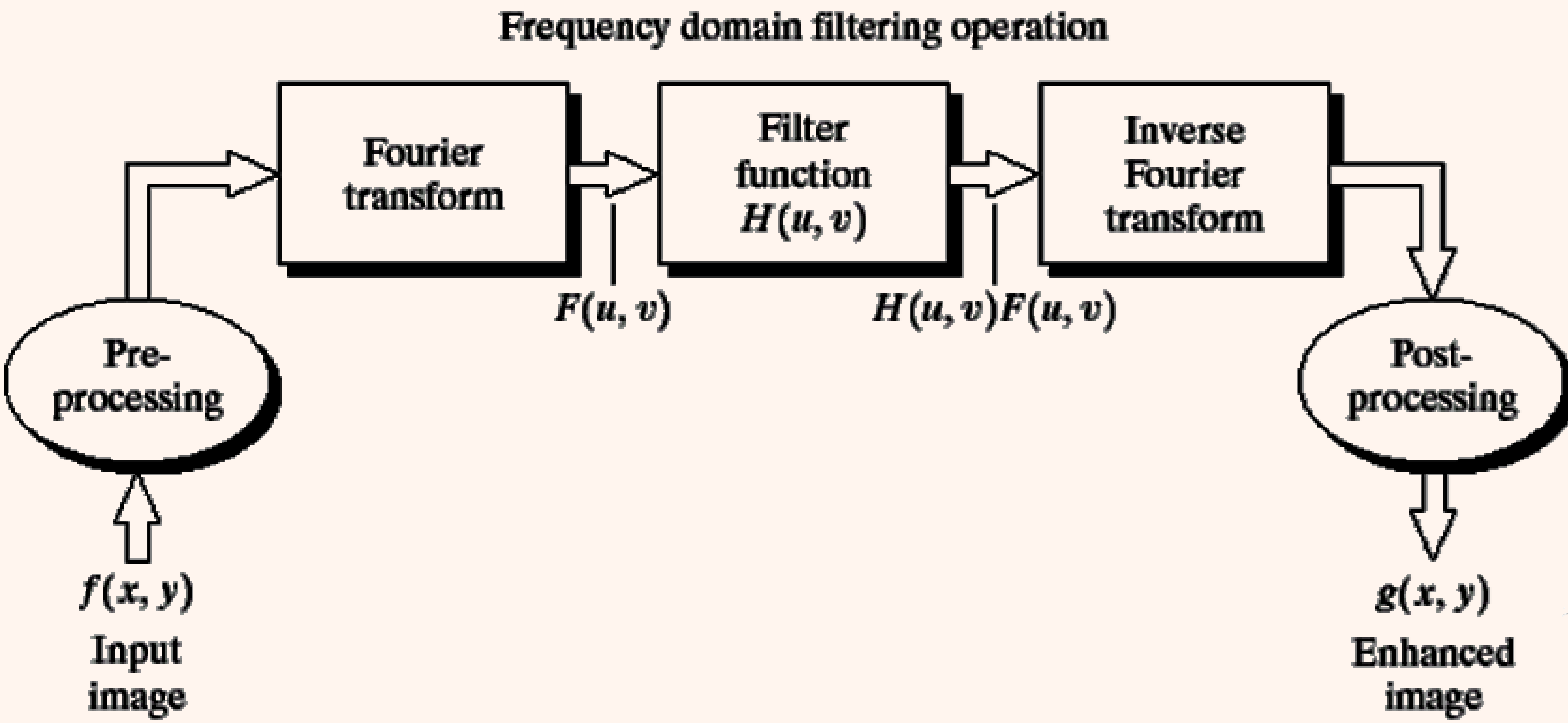


مثال(ادامه...)

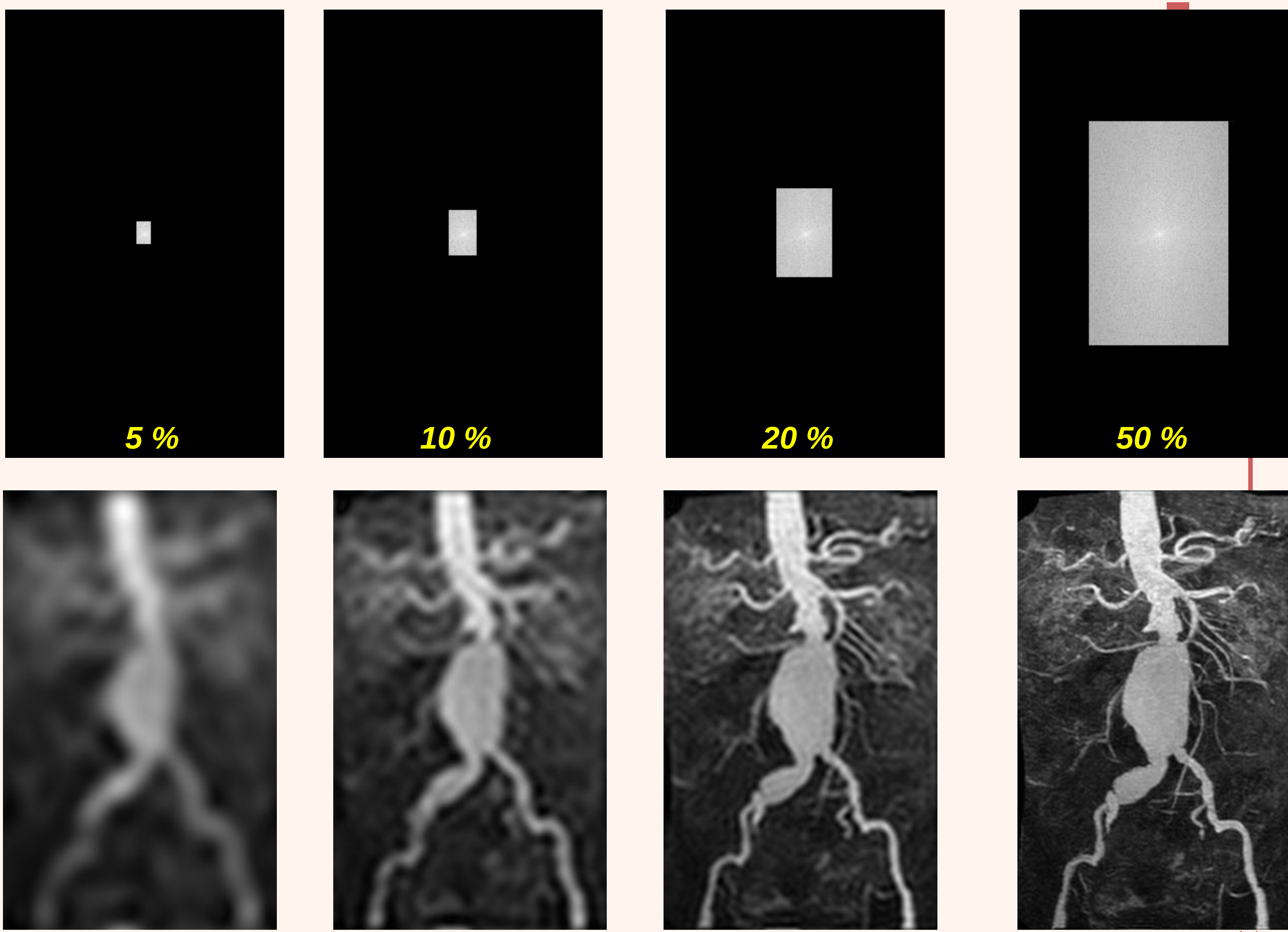


اعمال فیلتر در دامنه‌ی فرکانس

Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

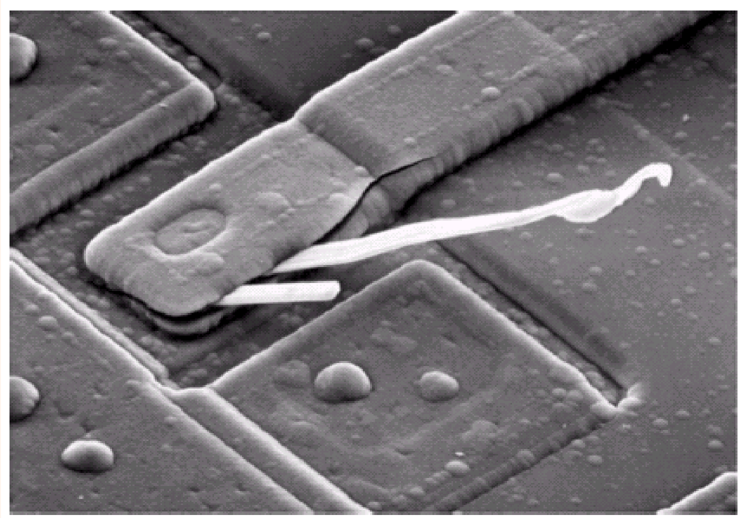


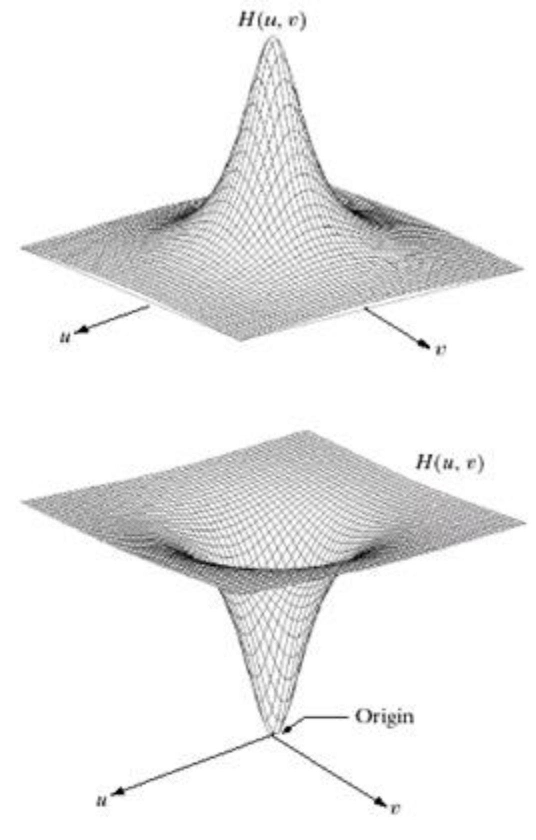
در مواردی که پنجره‌ی مورد نظر بزرگ است اعمال فیلتر در دامنه‌ی فرکانس به لحاظ محاسبات از کارایی بیشتری برخوردار است.

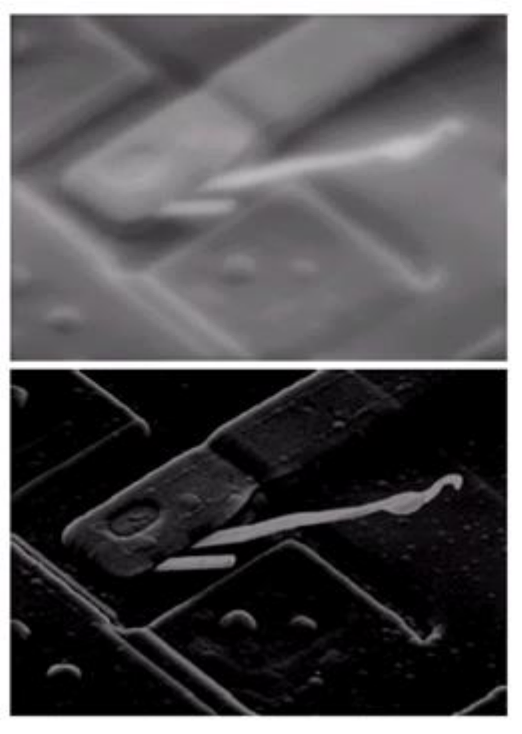

5 %
10 %
20 %
50 %

Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

Low Pass Filter







High Pass Filter

مراحل اعمال فیلتر در دامنه‌ی فرکانس

تعداد صفرهای بهینه برای اضافه کردن را با توجه به اندازه‌ی تصویر به دست آورید.

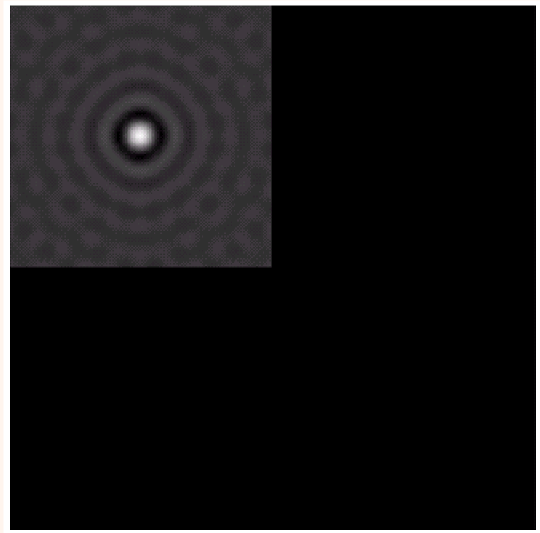
تبدیل فوریه را برای تصویر با توجه به اندازه‌ی جدید به دست آورید.

فیلتر مورد نظر را برای اندازه‌ی جدید به دست آورید. (اندازه‌ی فیلتر و تصویر اصلی باید یکسان باشد)

تصویر و فیلتر را در هم ضرب نمایید.

از نتیجه‌ی به دست آمده تبدیل معکوس فوریه گرفته برای اندازه‌ی تصویر اصلی آن‌را برش دهید.

مثال



Padded Lowpass Filter in the Spatial domain

Result of filtering with padding

فیلتر ایده‌آل

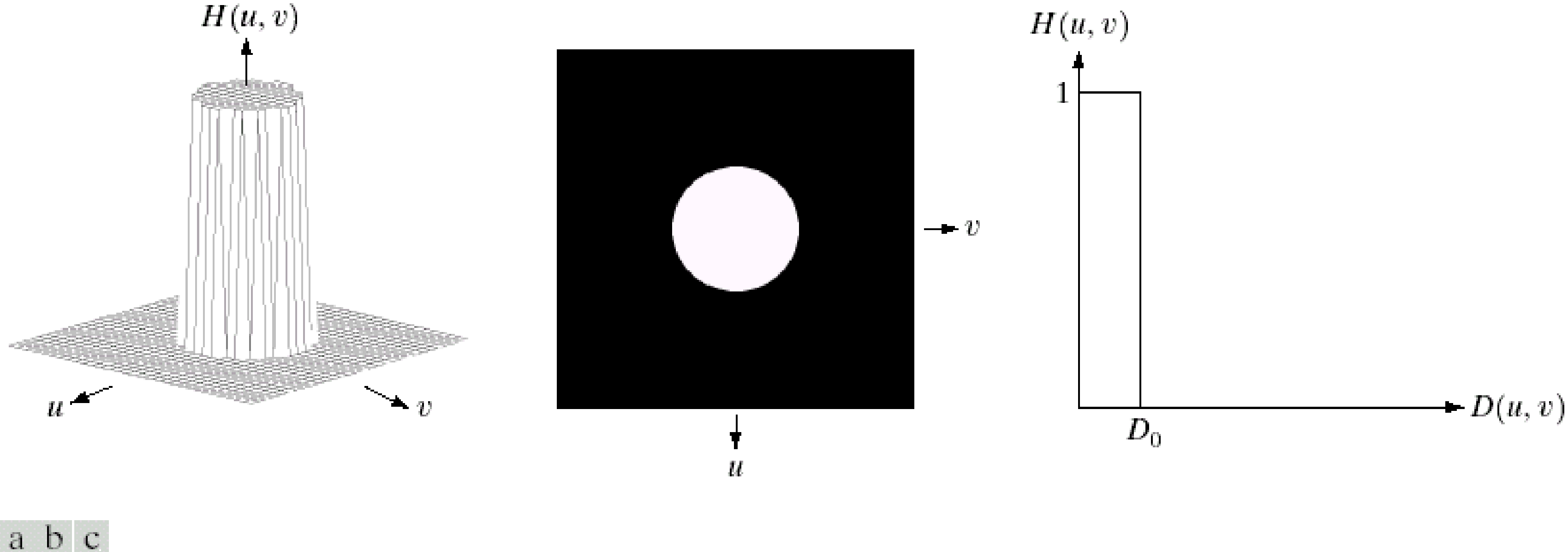
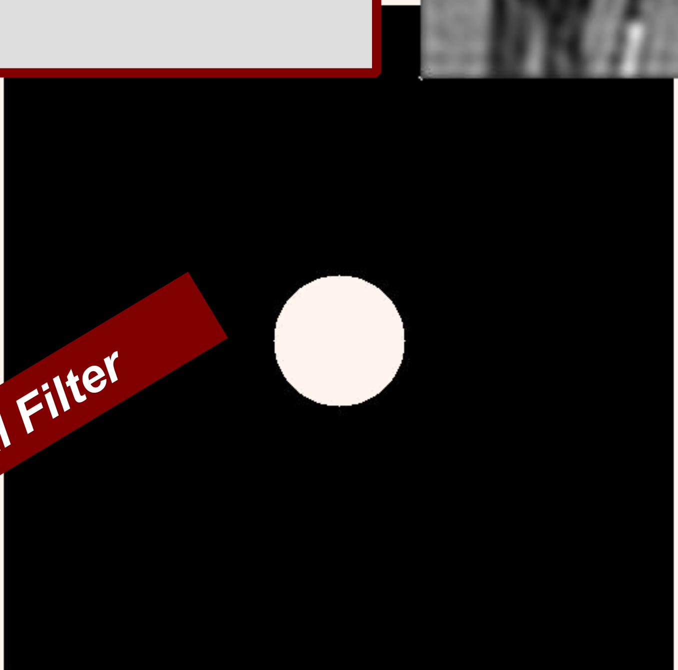


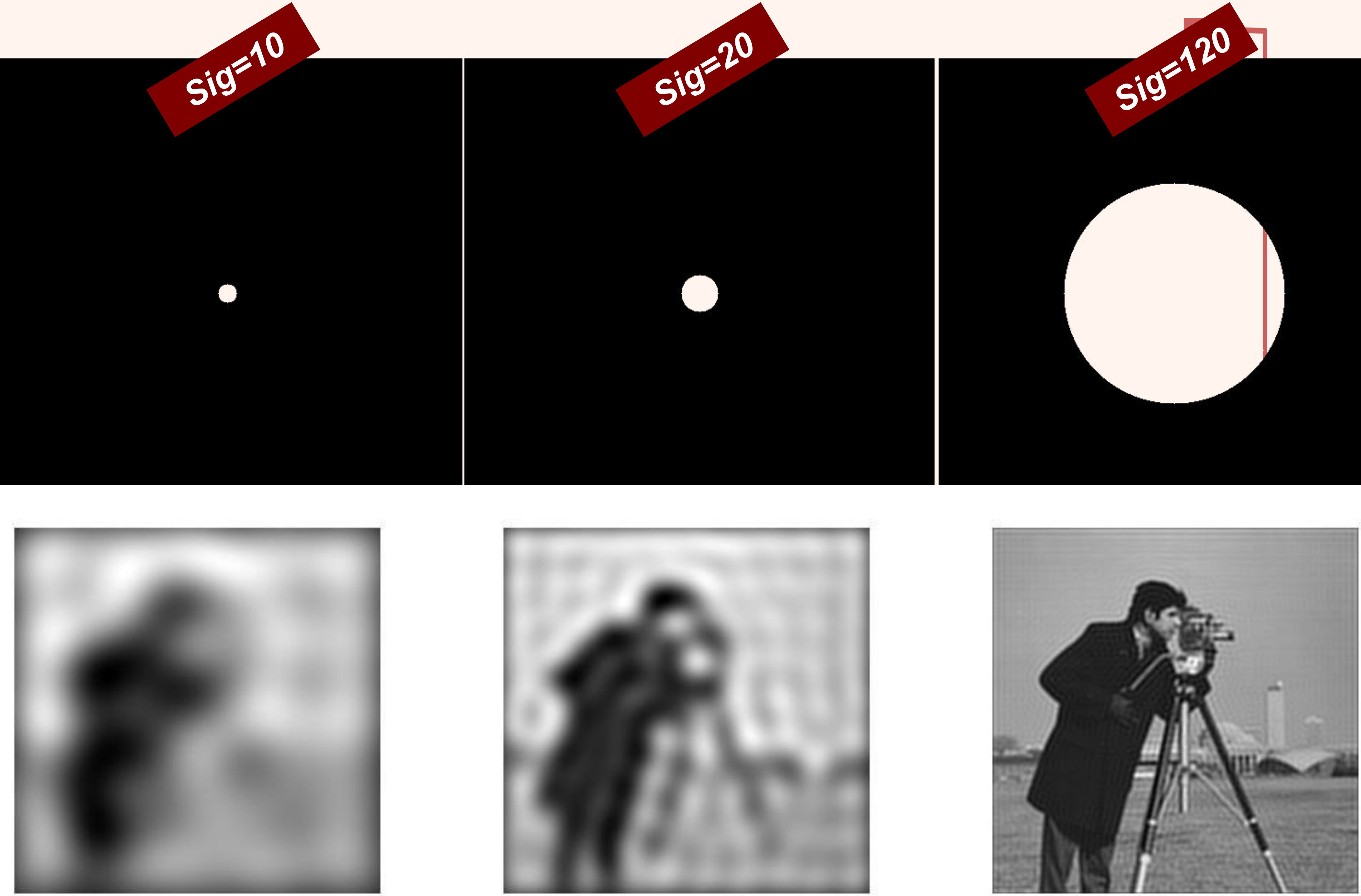
FIGURE 4.10 (a) Perspective plot of an ideal lowpass filter transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross section.

اعمال فیلتر ایده‌آل

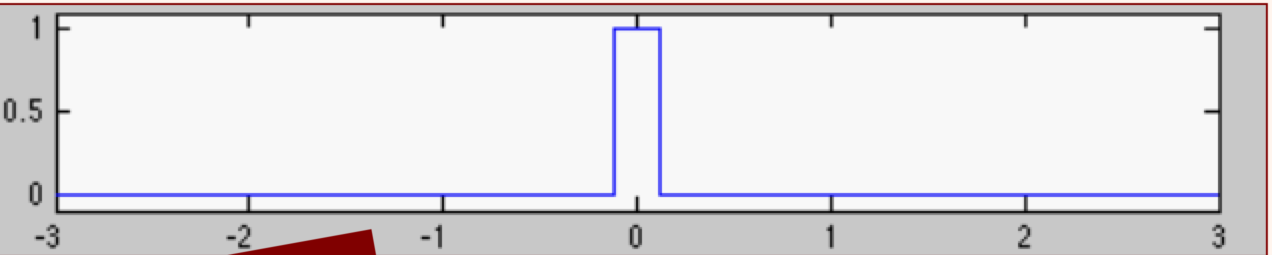
Ideal filter

```
f = imread('cameraman.tif');
PQ=paddedsize(size(f));
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
sig=50;
H=lpfilter('ideal',PQ(1),PQ(2),sig);
imshow(fftshift(H),[ ]);
G=H.*F;
g=real(ifft2(G));
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));
figure;
imshow(g,[ ]);
```

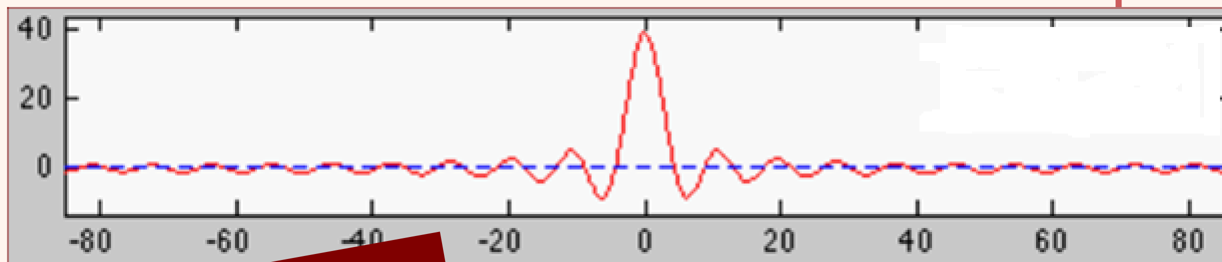



Sig=10
Sig=20
Sig=120

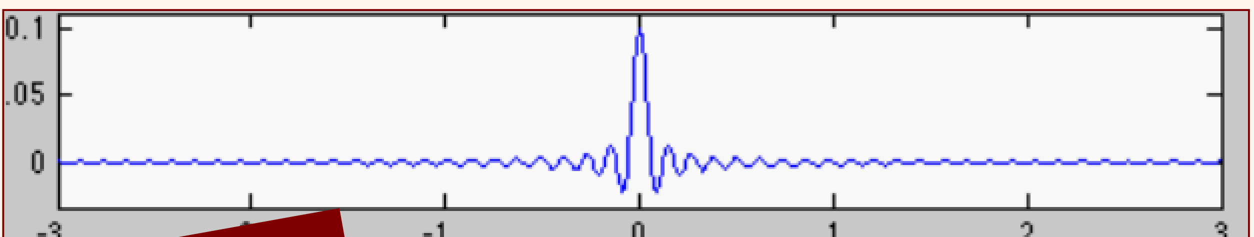
Ringing Artifact



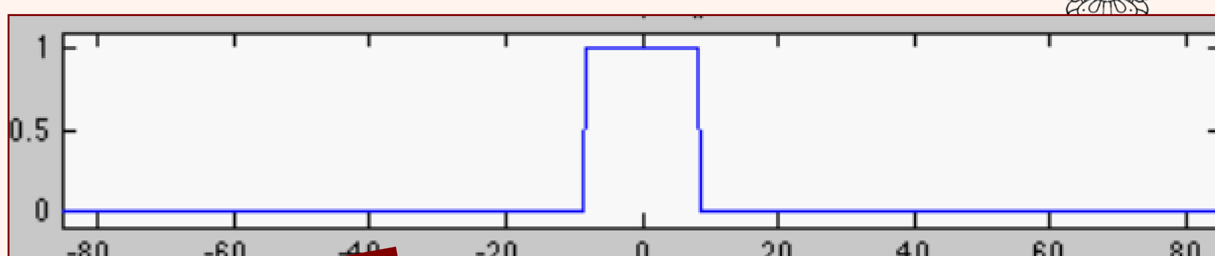
Spatial



Frequency



Spatial



Frequency

فیلتر پایین‌گذر گاوسی

- ساختار فیلتر مذکور مانند زیر است:

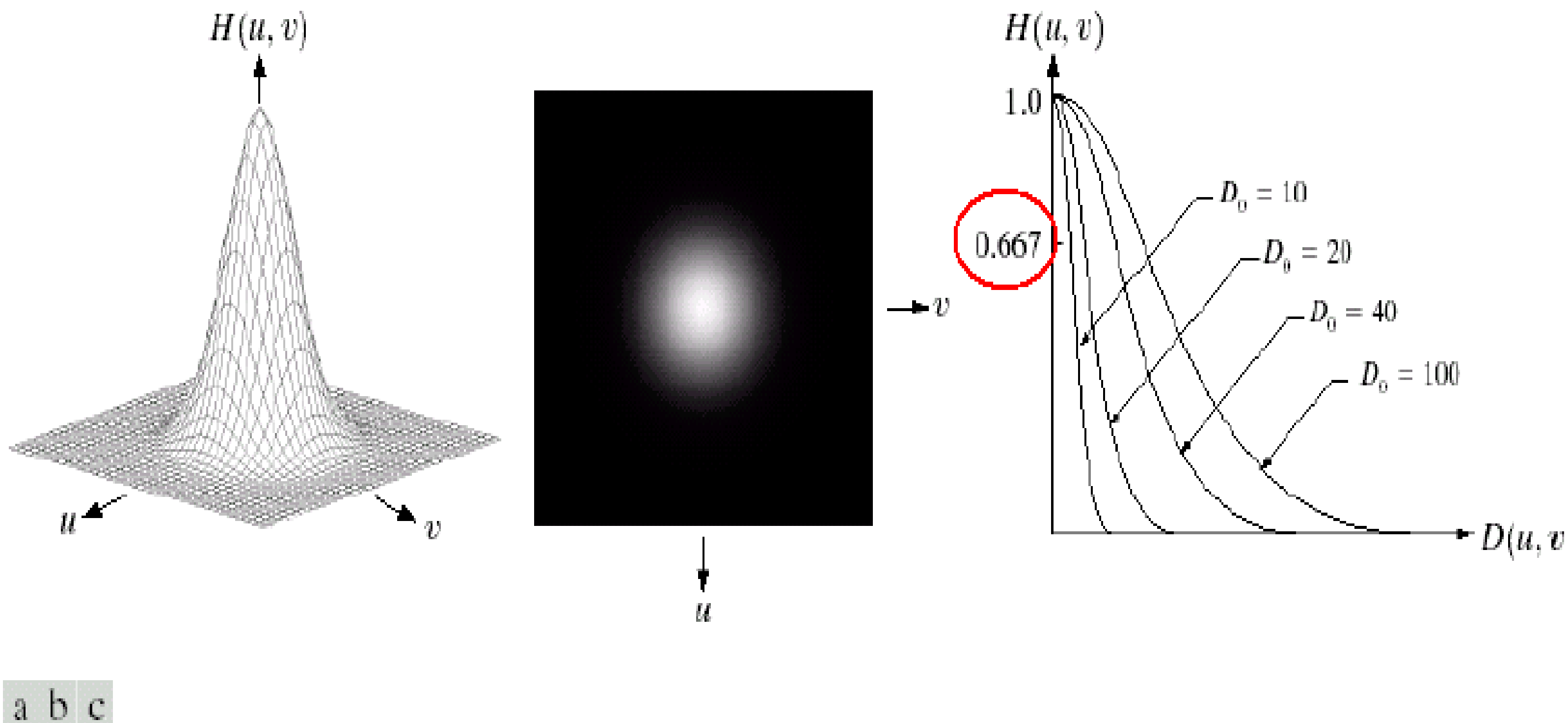
$$H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2\sigma^2}$$

$D(u,v)$ بیان‌گر فاصله از مرکز است.

- اگر $\sigma = D_0$

$$\boxed{H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2{D_0}^2}}$$

فیلتر پایین‌گذرگاوسی



(a) Perspective plot of a GLPF transfer function. (b) Filter displayed as an image. (c) Filter radial cross sections for various values of D_0.

Gaussian Filter

اعمال فیلتر گوسی

```
f = imread('cameraman.tif');
imshow(f,[ ]);
PQ=paddedsize(size(f));
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
sig=50;
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),sig);
figure;
imshow(fftshift(H),[ ]);
G=H.*F;
g=real(ifft2(G));
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));
figure;
imshow(g,[ ]);
```

Filtered

Gaussian Filter

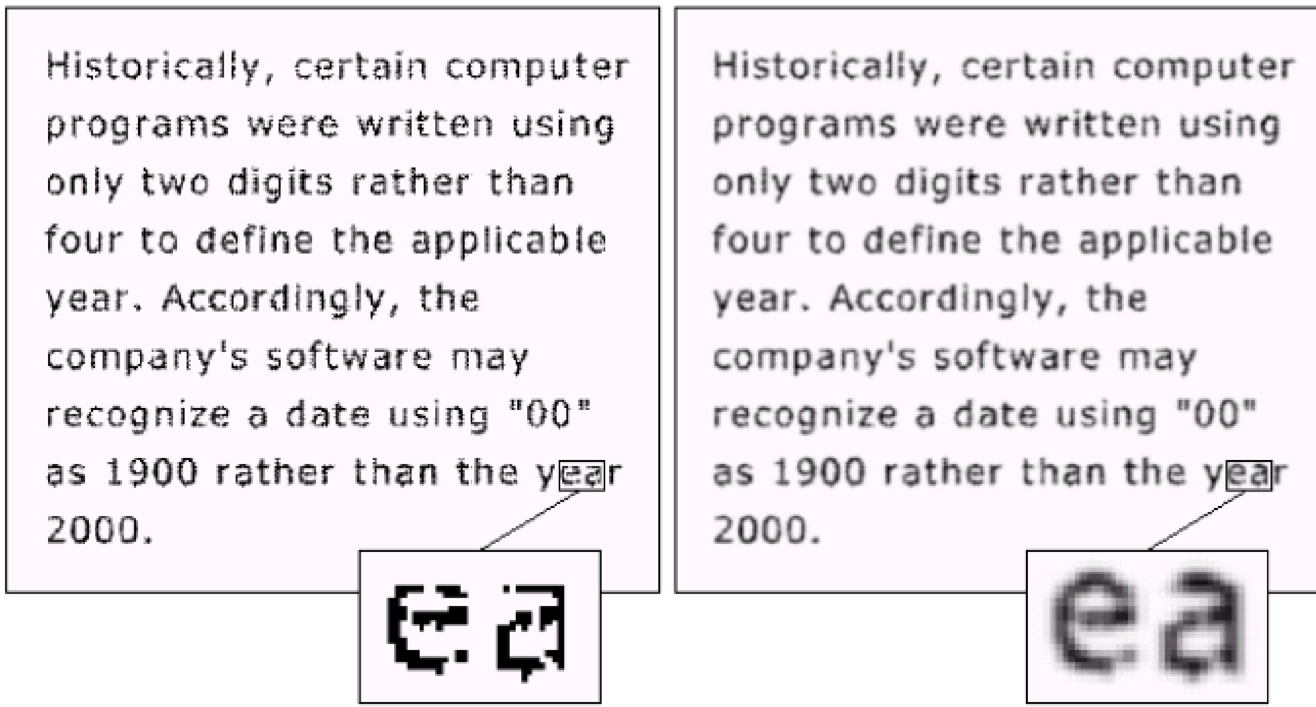
Org


Sig=10
Sig=20
Sig=120

مثال

fax transmissions

a b



(a) Sample text of poor resolution (note broken characters in magnified view). (b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

مثال

Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

از جزییات ریز صرفنظر می‌شود

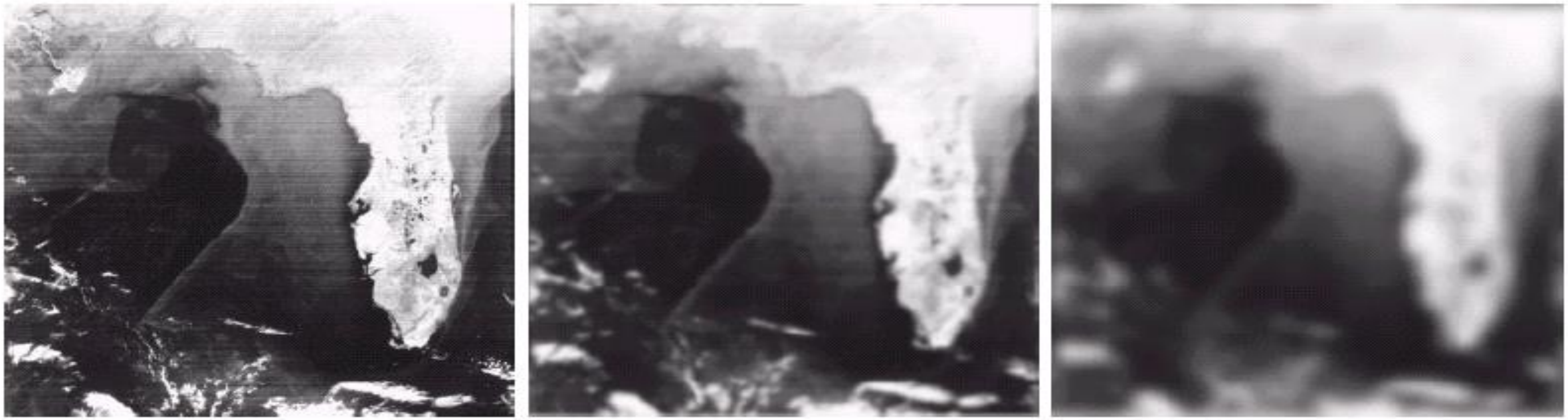
a b c

(a) Original image (1028 × 732 pixels). (b) Result of filtering with a GLPF with $D_0 = 100$. (c) Result of filtering with a GLPF with $D_0 = 80$. Note reduction in skin fine lines in the magnified sections of (b) and (c).

ages taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

مثال

- کاهش خطوط ناشی از اسکن نمودن



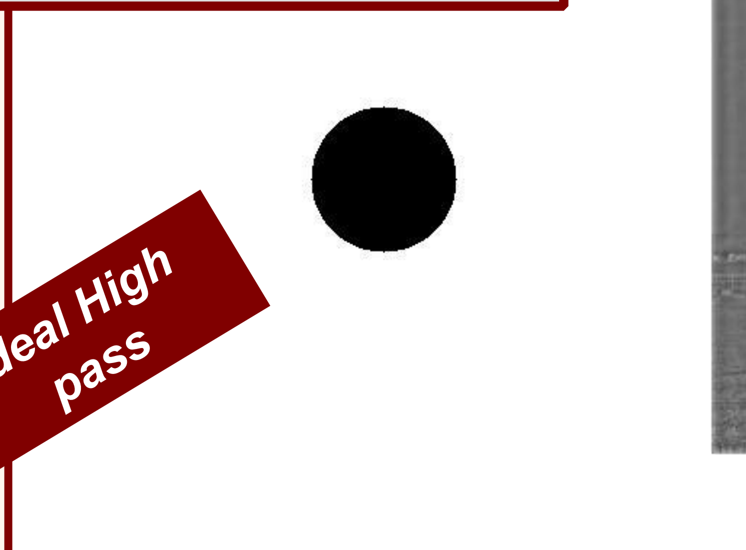
a b c

(a) Image showing prominent scan lines. (b) Result of using a GLPF with $D_0 = 30$. (c) Result of using a GLPF with $D_0 = 10$. (Original image courtesy of NOAA.)

High Pass Filter

فیلتر بالاگ

```
f = imread('cameraman.tif');
imshow(f,[]);
PQ=paddedsize(size(f));
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
sig=50;
H=lpfilter('ideal',PQ(1),PQ(2),sig);
Hh=1-H;
figure;
imshow(fftshift(Hh),[]);
G=Hh.*F;
g=real(ifft2(G));
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));
Figure;imshow(g,[]);
Figure;imshow(abs(g),[]);
```




Sig=10
Sig=20
Sig=120

High Pass Filter

فیلتر بالاگذر

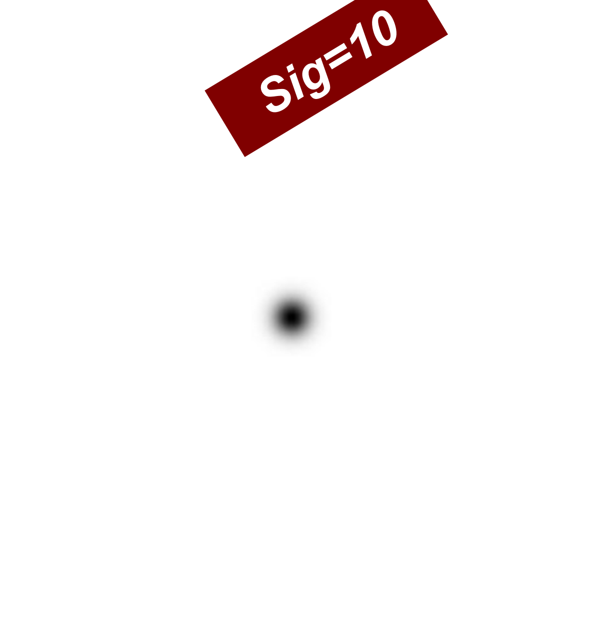
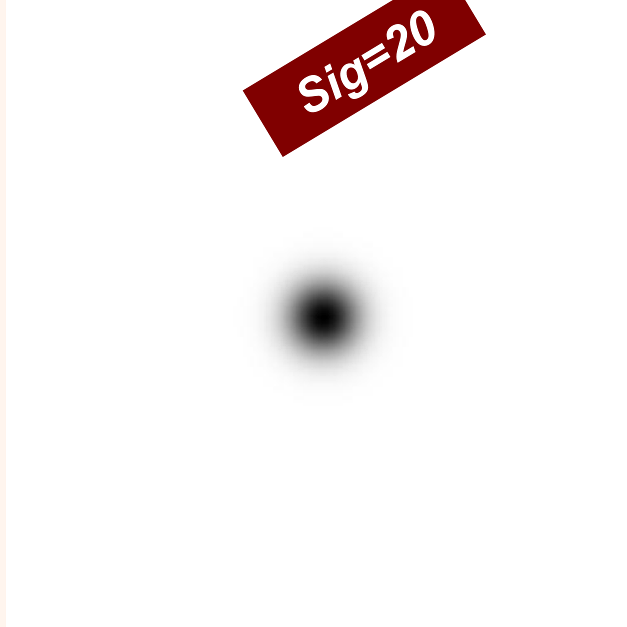
```
f = imread('cameraman.tif');
imshow(f,[]);
PQ=paddedsize(size(f));
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
sig=50;
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),sig);
Hh=1-H;
figure;
imshow(fftshift(Hh),[]);
G=Hh.*F;
g=real(ifft2(G));
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));
Figure;imshow(g,[]);
Figure;imshow(abs(g),[]);
```

Filtered

Filtered

Org

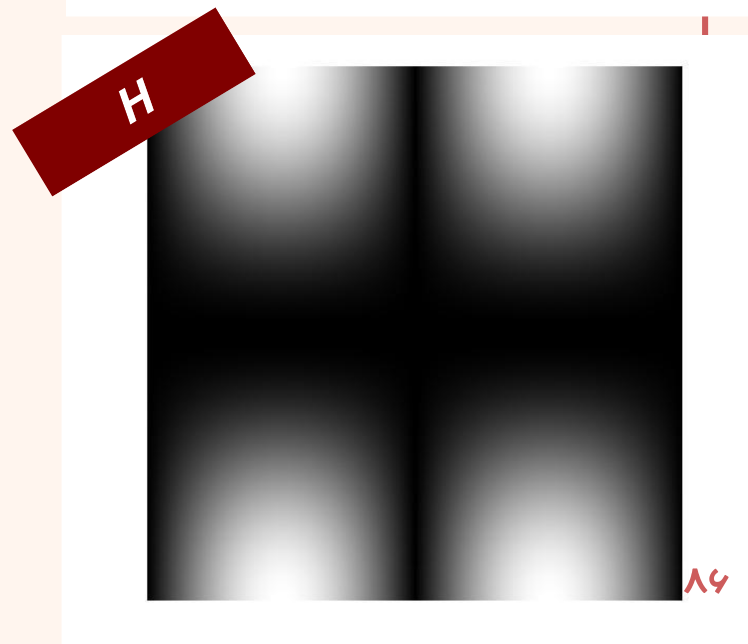
Gaussian
High pass


Sig=10

Sig=20

Sig=120


به دست آوردن معادل فیلتر

```
clear all,clc;
f = imread('cameraman.tif');
imshow(f,[ ]);
h=fspecial('sobel')';
PQ=paddedsize(size(f));
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
H1=freqz2(h,PQ(1),PQ(2));
H=fftshift(H1);
figure;imshow(abs(H1),[ ]);
figure;imshow(abs(H),[ ]);
G=H.*F;
g=real(ifft2(G));
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));
figure;imshow(g,[ ]);
figure;imshow(abs(g),[ ]);
gs=imfilter(double(f),h);
figure;imshow(gs,[ ]);
figure;imshow(abs(gs),[ ]);
d=abs(gs-g);
max(d(:))
```



دامنه‌ی فرکانس

دامنه‌ی زمان-مکان