Information Compression

مقدمات ریاضی(۲)

تبدیل فوریه[۱]

فشرده‌سازی اطلاعات

۴۰-۱۰-۷۰۲-۰۱

بخش پنجم

قسمت دوم

دانشگاه شهید بهشتی
پژوهشکده‌ی فضای مجازی
بهار ۱۳۹۸
احمد محمودی ازناوه

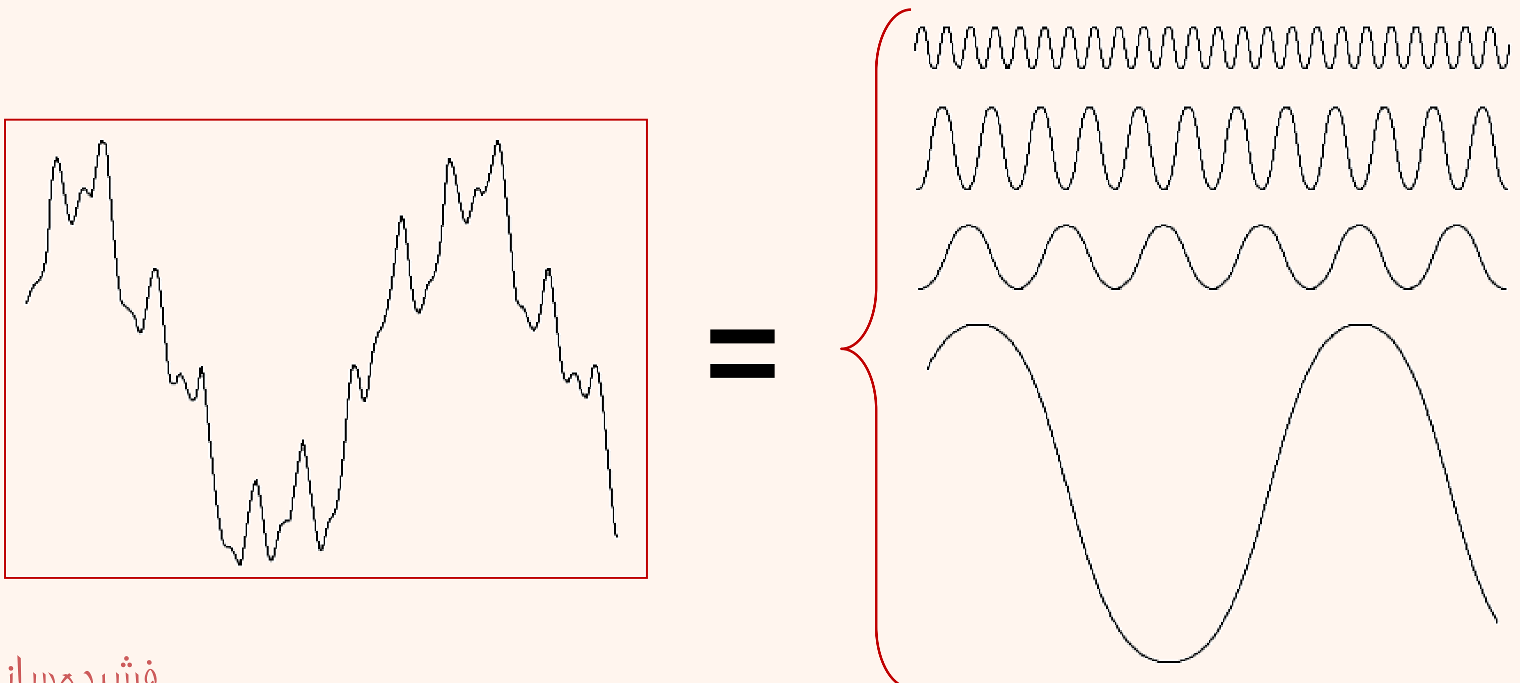
فهرست مطالب

- مروری بر آنالیز فوریه
- سیگنال‌های زمان پیوسته
  - سری فوریه
  - تبدیل فوریه
  - فاز و اندازه
- سیگنال‌های زمان گسسته
  - سری فوریه
  - تبدیل فوریه (DTFT)
  - تبدیل فوریه‌ی گسسته(DFT)

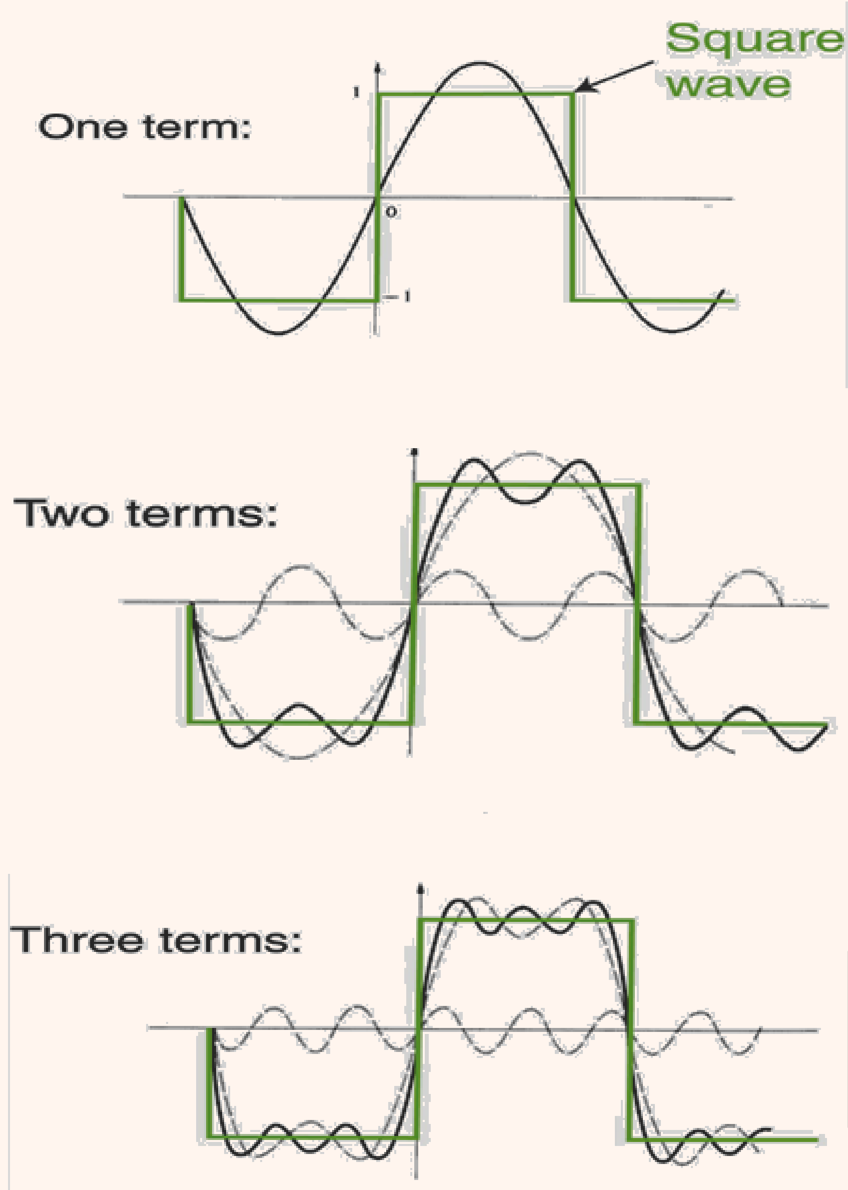
آنالیز فوریه

Jean Baptiste Joseph Fourier

- هر تابع متناوب را می‌توان به وسیله‌ی یک جمع وزن‌دهی شده از توابع سینوسی و کسینوسی نمایش داد.



توابع پایه

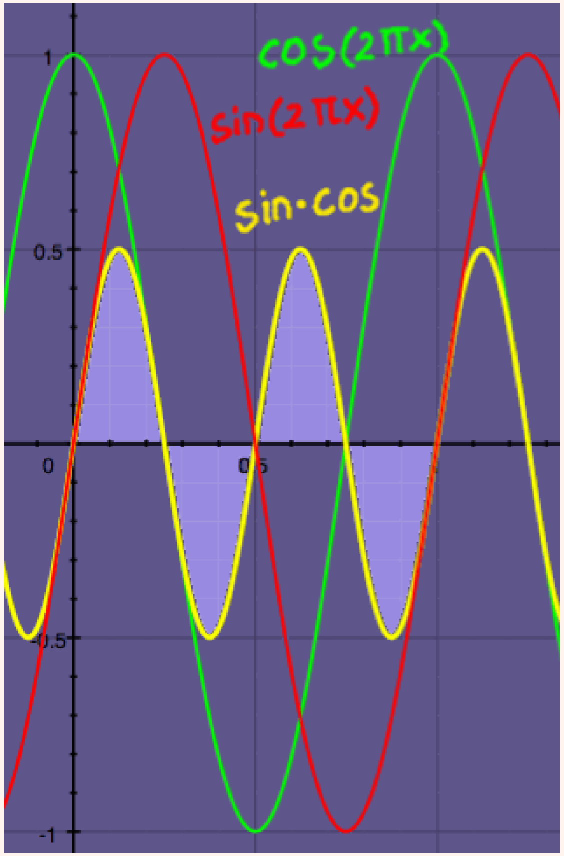


تخمین یک موج مربعی با مجموعه‌ای از توابع سینوسی

تعامد

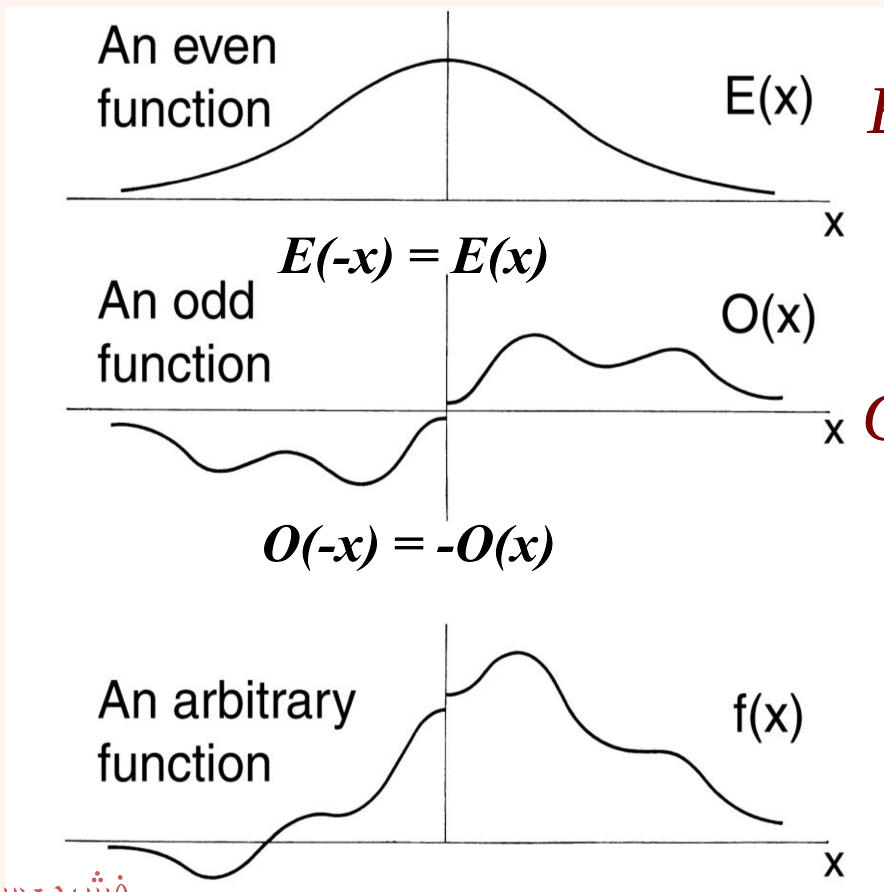
- دو تابع را برهم عمود گویند اگر داشته باشیم:

$$\langle f, g \rangle = \int f(x) g^{*}(x) dx = 0$$



توابع زوج و فرد

- هر تابعی را می‌توان به صورت مجموعی از توابع زوج و فرد نمایش داد:



$$E(x) \equiv [f(x) + f(-x)]/2$$

$$O(x) \equiv [f(x) - f(-x)]/2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = E(x) + O(x)$$

سری فوریه (ادامه...)

- چون $\cos(mt)$ یک تابع زوج است، تابع زوج $f(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} F_m \cos(mt)}$$

- اگر فرض شود $f(t)$ در بازه‌ی $(-\pi,\pi)$ واقع شده است، برای محاسبه‌ی F_m خواهیم داشت:

$$\boxed{F_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,dt}$$

سری فوریه (ادامه...)

- چون $\sin(mt)$ یک تابع فرد است، تابع فرد $f(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} F'_m \sin(mt)$$

- اگر فرض شود $f(t)$ در بازه‌ی $(-\pi,\pi)$ واقع شده است، برای محاسبه‌ی F'_m خواهیم داشت:

$$\boxed{F'_m = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)\,dt}$$

سری فوریه (ادامه...)

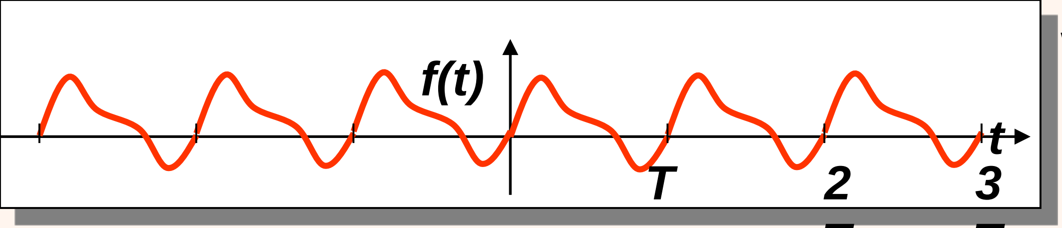
- به صورت کلی برای هر تابع متناوب می‌توان رابطه‌ی زیر را در نظر گرفت:

$$\boxed{f(t) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} F_m \cos(mt) + \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} F'_m \sin(mt)}$$

Even component **Odd component**

- که ضرایب آن برابر است با:

$$F_m = \int f(t)\cos(mt)\,dt \qquad F'_m = \int f(t)\sin(mt)\,dt$$



سری فوریه (ادا

- به صورت کلی یک تابع متناوب را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$f(t) = d + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

$$= d + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right) \right]$$

$$= d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - ib_n)}{2} e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + ib_n)}{2} e^{-int}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

سری فوریه (ادامه...)

where

$$c_n = \begin{cases} d & , n = 0 \\ (a_n - ib_n)/2 & , n = 1, 2, 3, \dots \\ (a_{-n} + ib_{-n})/2 & , n = -1, -2, -3, \dots \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) f(t)\, dt \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t)\, dt \\ d &= \tfrac{1}{2\pi} \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt \end{aligned}\right\}$$

ضرایب سری

n صفر است

$$\begin{aligned} c_0 &= d \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-0} f(t)\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(nt) - i \sin(nt)]\, f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, dt \end{aligned}$$

n مثبت است

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(-nt) + i \sin(-nt)]\, f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\, dt \end{aligned}$$

n منفی است

سری فوریه (ادامه...)

n صفر است

$$\begin{aligned} c_0 &= d \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-0} f(t)\,dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(nt) - i\sin(nt)]\, f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\,dt \end{aligned}$$

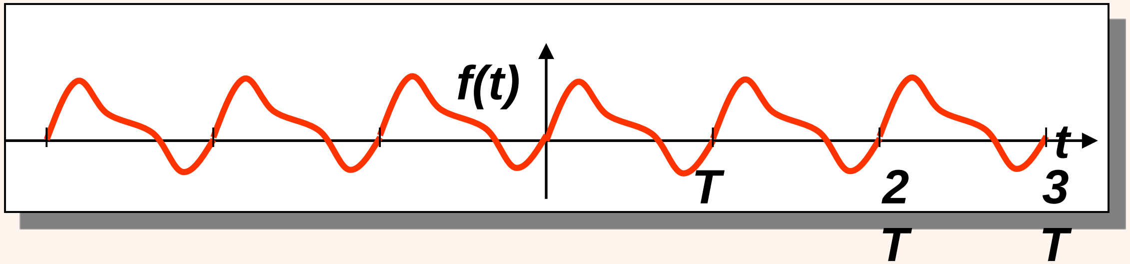
n مثبت است

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(-nt) + i\sin(-nt)]\, f(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\,dt \end{aligned}$$

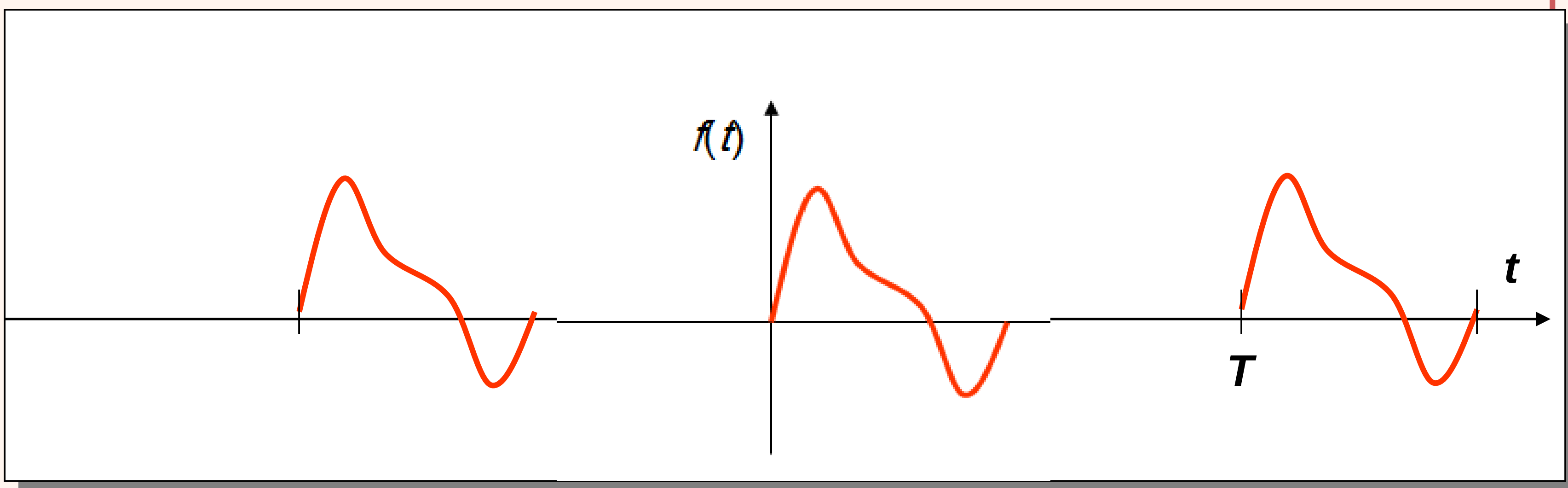
n منفی است

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)\,dt \\ f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \end{aligned}$$

تبدیل فوریه



- سری فوریه برای سیگنال‌های متناوب به دست می‌آید.
- حال اگر سیگنالی پریودیک نباشد؟

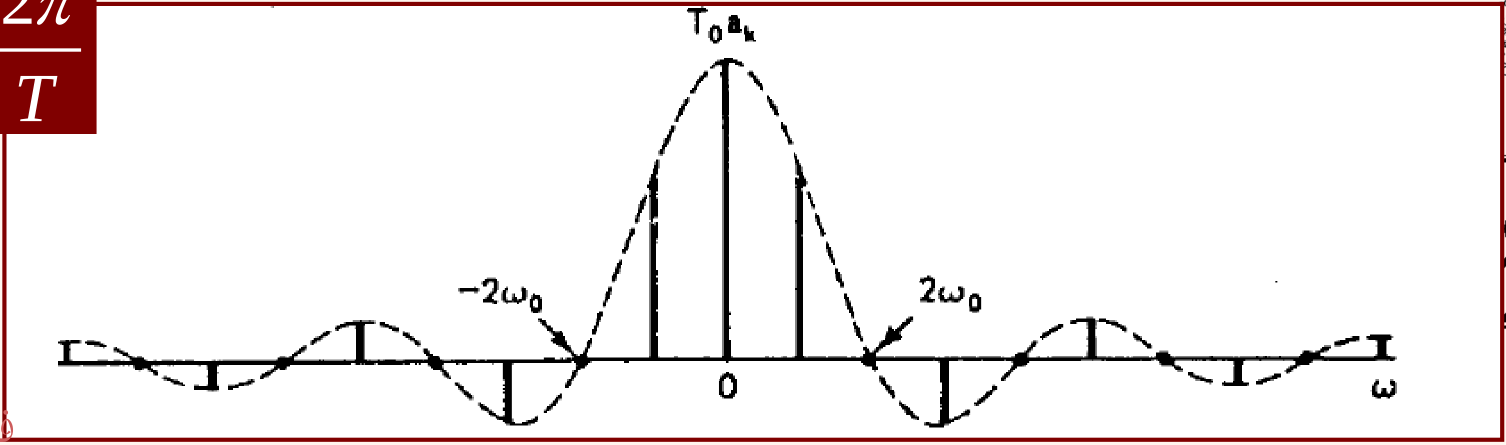


اگر $T \to \infty$ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

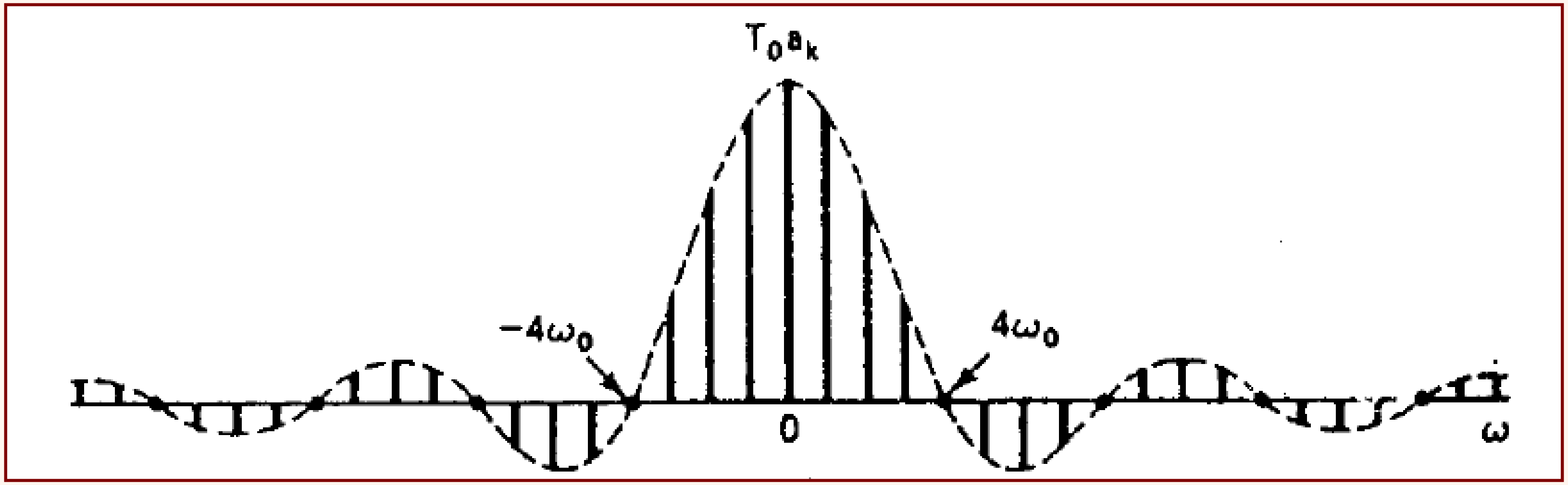
تبدیل فوریه (ادامه...)

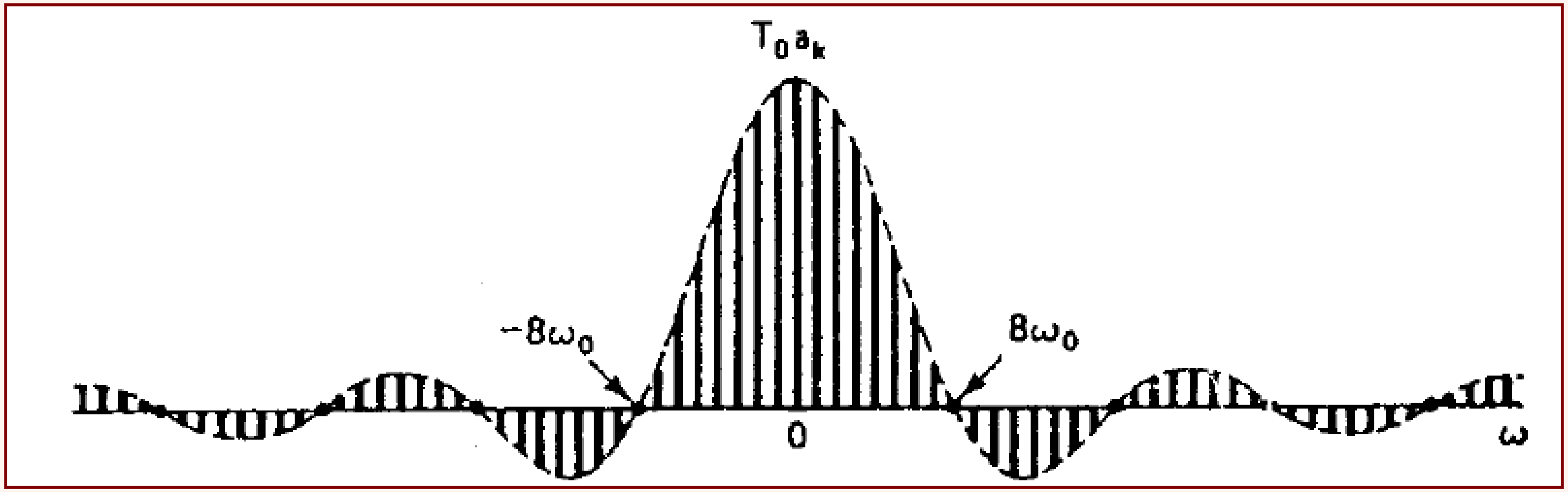
- نه تنها سیگنال‌های پریودیک را می‌توان به صورت جمع برهم‌نهی شده یک سری سیگنال سینوسی نوشت؛
  – هر سیگنالی (غیر پریودیک) را هم می‌توان این گونه دید.
  – سیگنال را متناوب کرده از آن سری می‌گیریم.
  – پریود را به بی‌نهایت میل می‌دهیم.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$



تبدیل فوریه (ادامه...)





تبدیل فوریه و معکوس تبدیل

- برای تبدیل مستقیم و معکوس خواهیم داشت:

رابطه آنالیز

$$\boxed{\Im\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt}$$

رابطه سنتز

$$\boxed{\Im\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega}$$

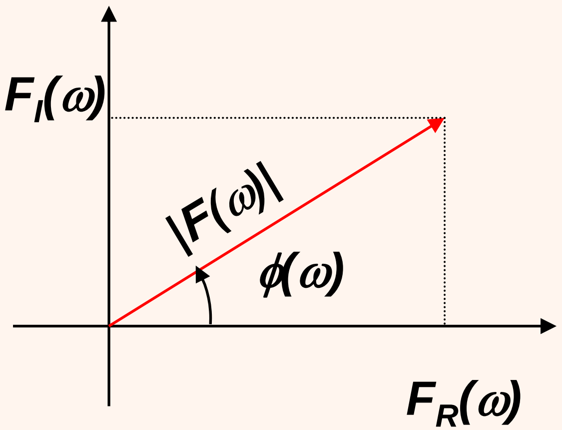
- $F(\omega)$ را تبدیل فوریه $f(t)$ می‌نامند، که در این حالت $f(t)$ در دامنه‌ی زمان و $F(\omega)$ در دامنه‌ی فرکانس خواهد بود.

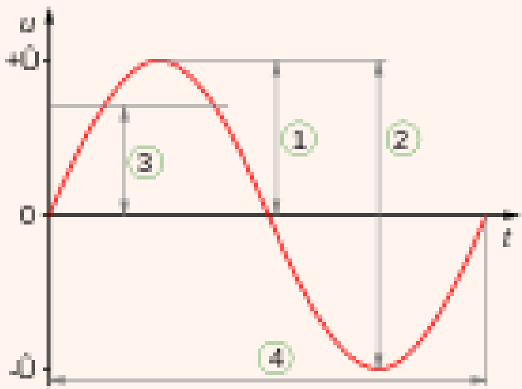
فاز و اندازه

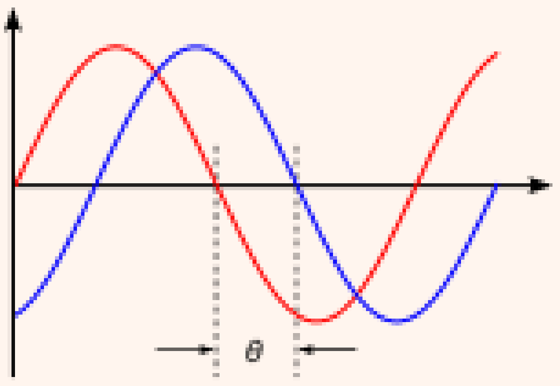
$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$F(\omega)=F_R(\omega)+jF_I(\omega)$$

$$=\underbrace{|F(\omega)|}_{\text{Magnitude}}e^{\overbrace{j\phi(\omega)}^{\text{Phase}}}$$

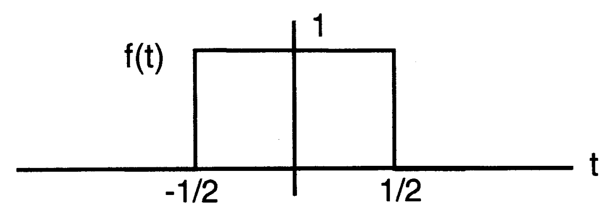






$$\Im\{F(\omega)\}=f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

تبدیل فوریه پالس مربعی



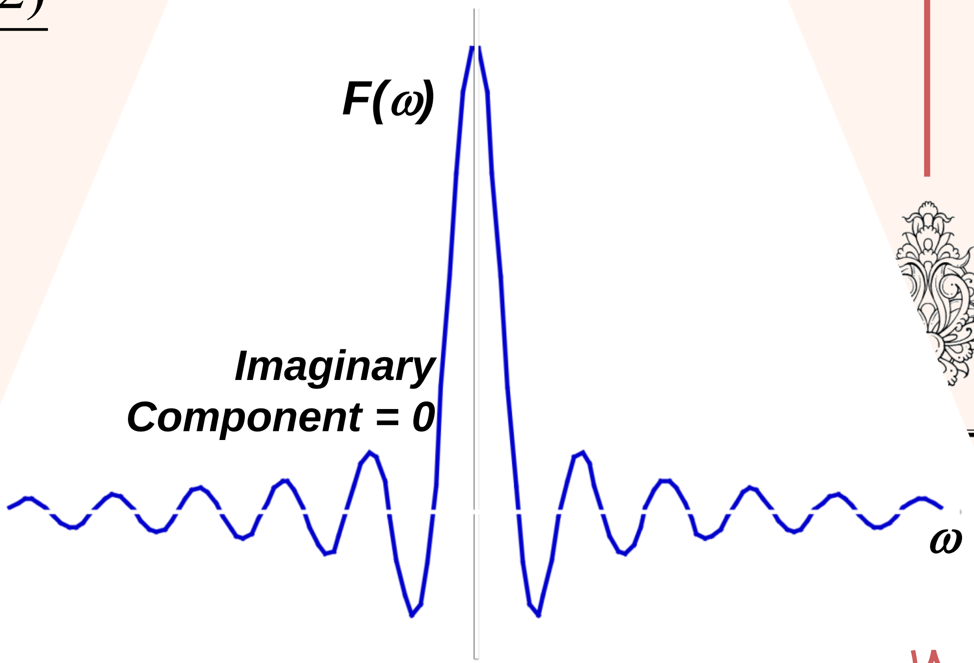
$$F(\omega)=\int_{-1/2}^{1/2}\exp(-i\,\omega t)dt=\frac{1}{-i\,\omega}[\exp(-i\,\omega t)]_{-1/2}^{1/2}$$

$$=\frac{1}{-i\,\omega}[\exp(-i\,\omega/2)-\exp(i\,\omega/2)]$$

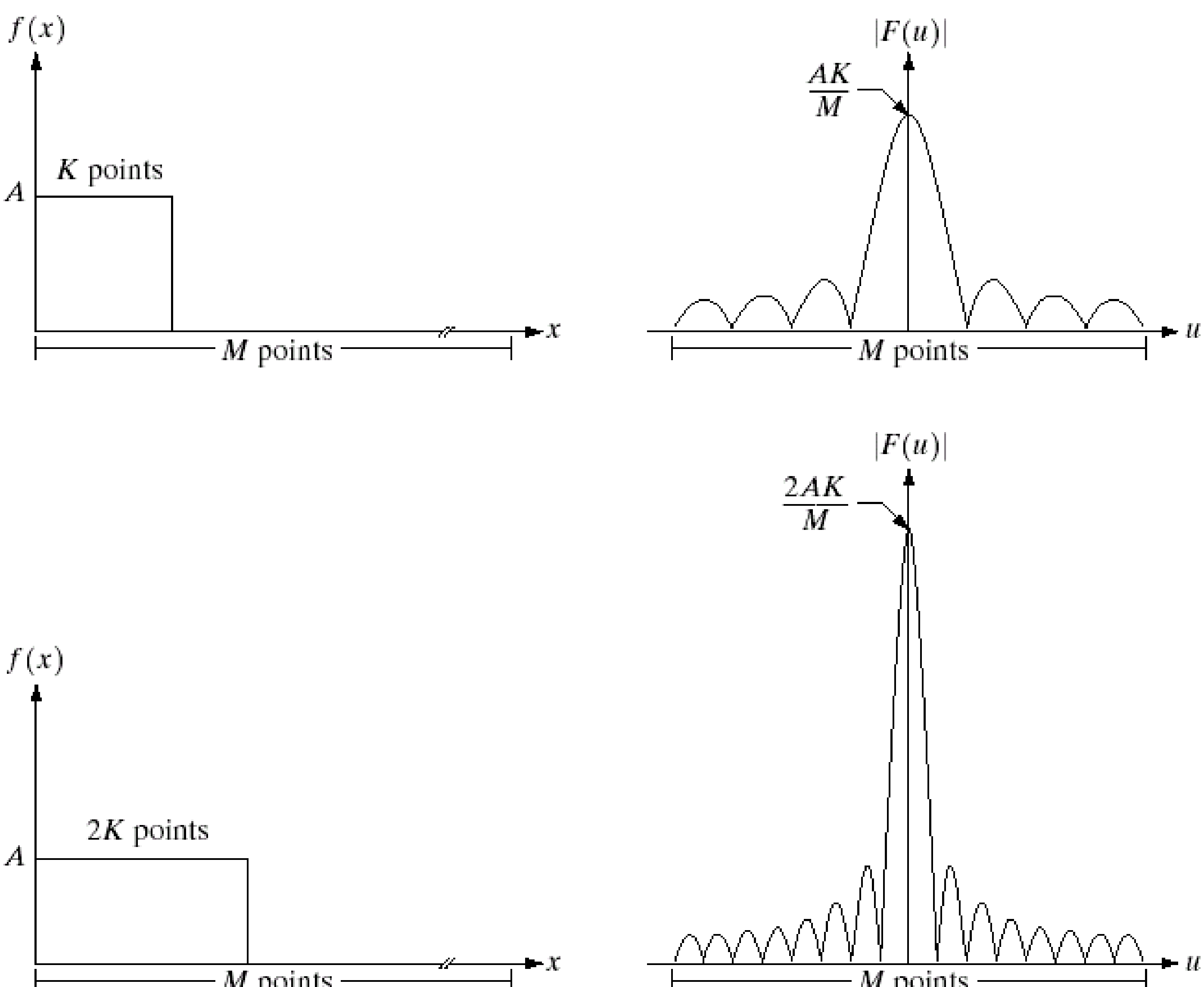
$$=\frac{1}{(\omega/2)}\frac{\exp(i\,\omega/2)-\exp(-i\,\omega/2)}{2i}$$

$$=\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}$$

$$\boxed{F(\omega)=\mathrm{sinc}(\omega/2)}$$



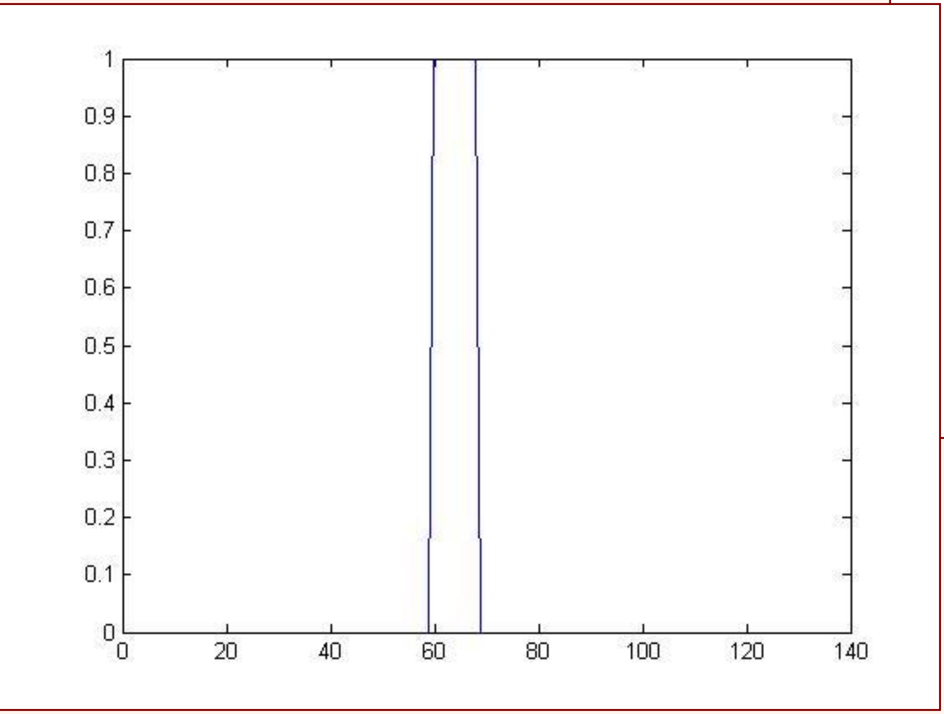
تبدیل فوریه پالس مربعی

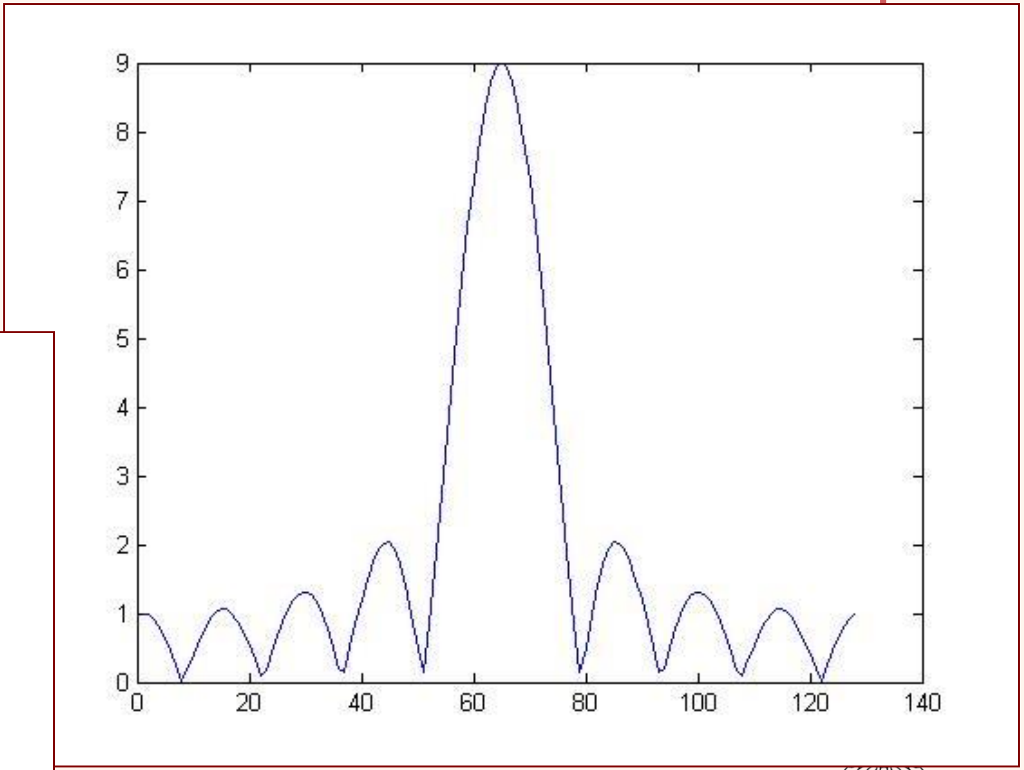


a	b
c	d

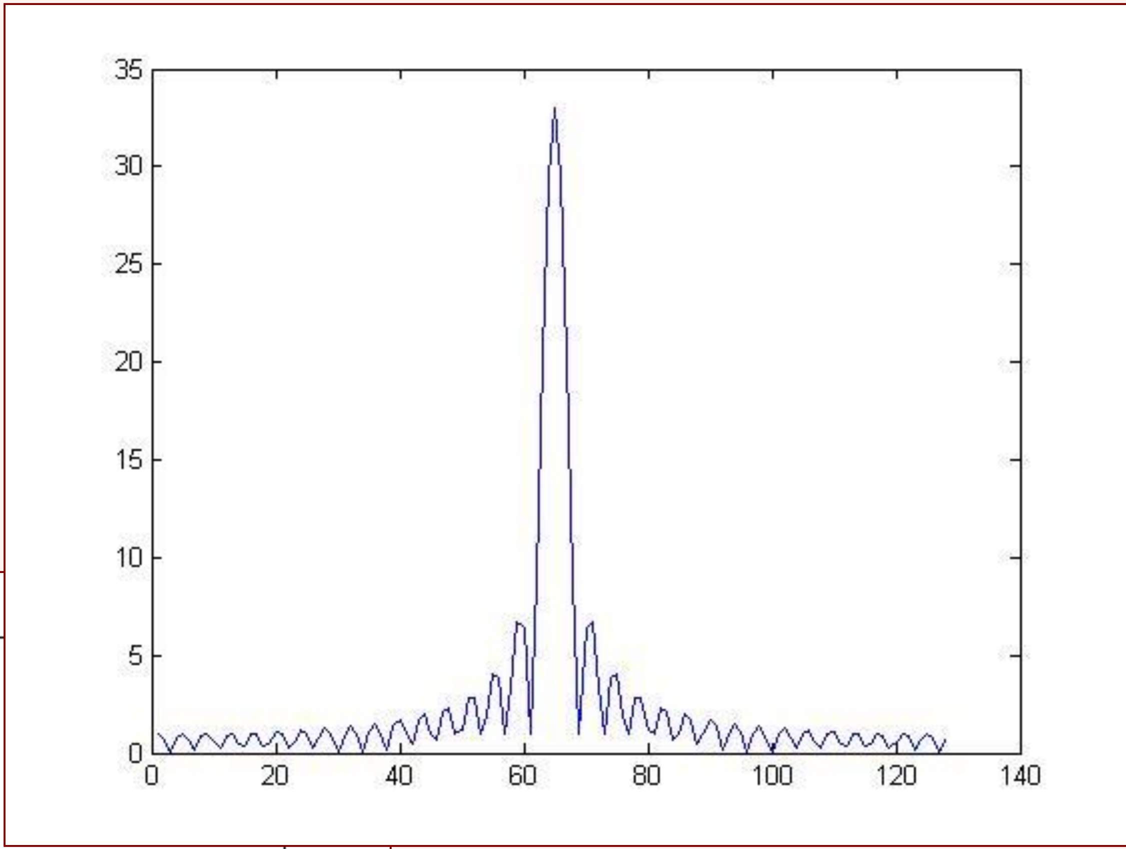
FIGURE 4.2 (a) A discrete function of *M* points, and (b) its Fourier spectrum. (c) A discrete function with twice the number of nonzero points, and (d) its Fourier spectrum.

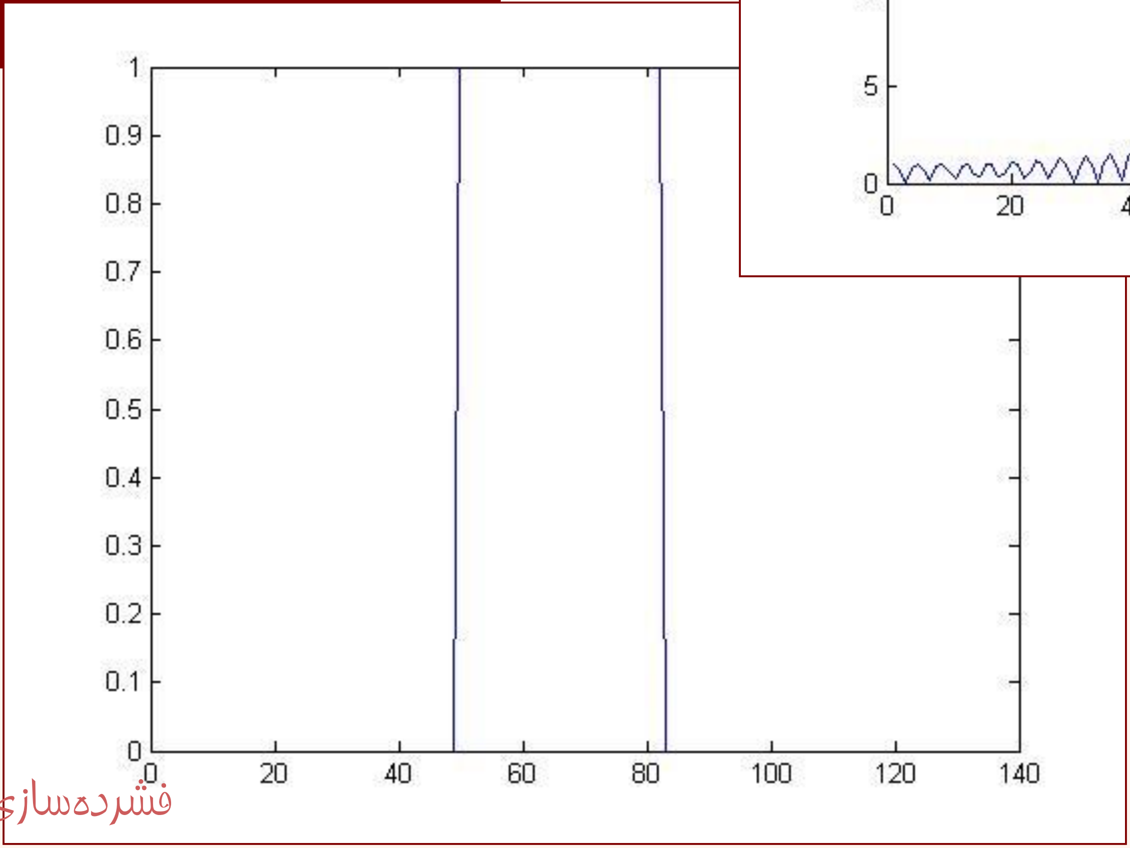
```
x=zeros(1,128);
x(60:68)=1;
k=fft(x,128);
q=fftshift(k)
plot(x);
figure;
plot (abs(q))
```





```
x=zeros(1,128);
x(50:82)=1;
k=fft(x,128);
q=fftshift(k)
plot(x);
figure;
plot (abs(q))
```





فشرده‌سازی

تبدیل فوریه دو بعدی و معکوس آن

تبدیل فوریه یک‌بعدی

$$\Im\{f(t)\} = F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-j\omega t)dt$$

تبدیل معکوس یک‌بعدی

$$\Im\{F(\omega)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(j\omega t)d\omega$$

تبدیل فوریه دوبعدی

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp(-j(ux+vy))dxdy$$

تبدیل معکوس دوبعدی

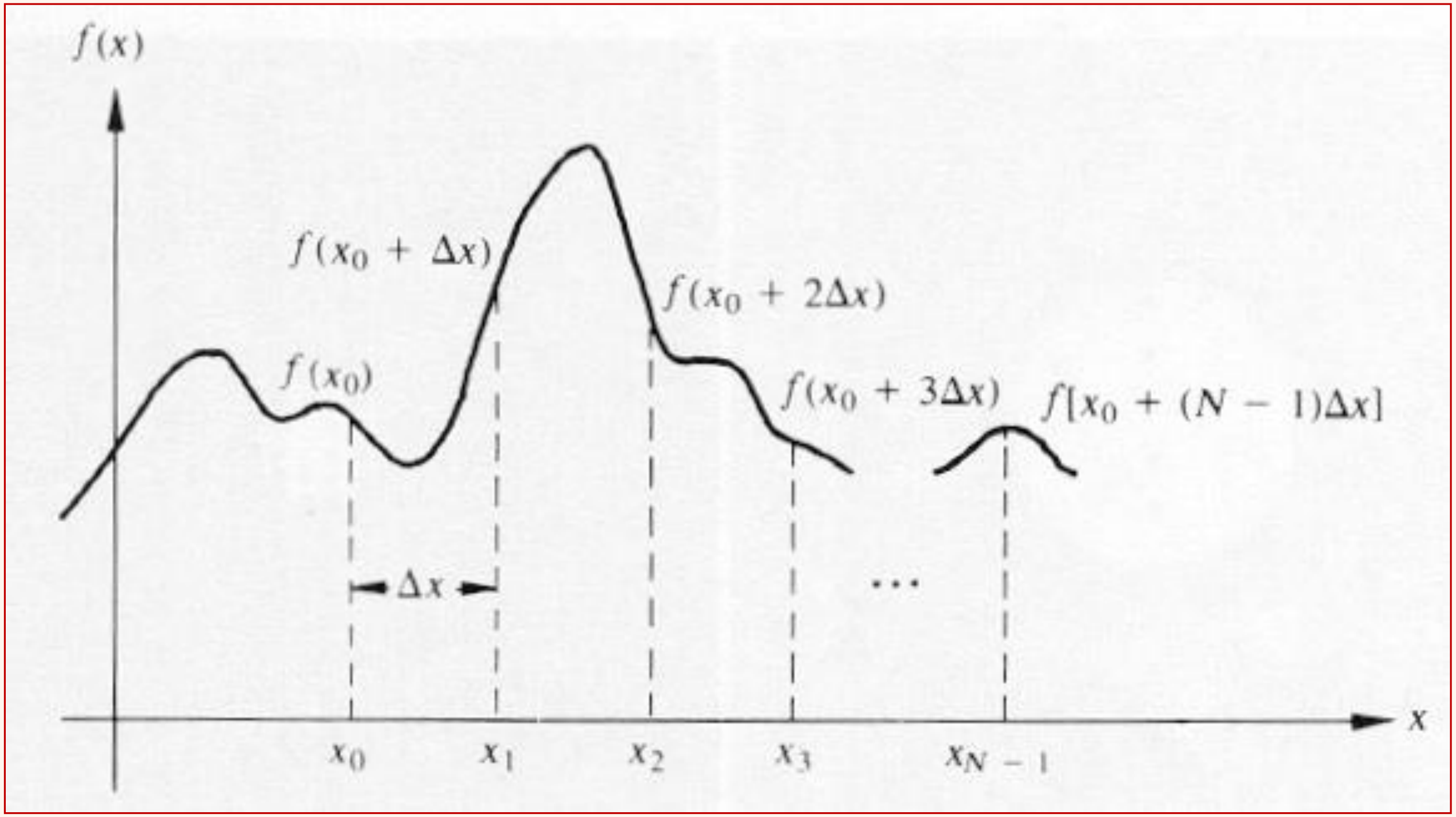
$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)\exp(j(ux+vy))dudv$$

نکات

- اگر ورودی تبدیل فوریه (به طور مثال سیگنالی صوتی) در دامنه‌ی زمان-مکان باشد، نمونه‌های سیگنال مذکور به دامنه‌ی فرکانس (شامل دامنه و فاز) نگاشت می‌یابد.
- تبدیل معکوس نیز با دریافت دامنه و فاز، سیگنال اصلی (در دامنه‌ی مکان-زمان) را بازیابی می‌نماید.
- دو نگاشت معکوس یکدیگرند.
- با توجه به کاربرد روزافزون سیگنال‌های دیجیتال استفاده از تبدیل سیگنال پیوسته کارایی لازم را ندارد. نسخه‌ی گسسته‌ی تبدیل لازم است.
  - تبدیلی که روی سیگنال‌های گسسته اعمال شود.

سیگنال‌های گسسته

- تابع پیوسته‌ی $f(x)$ را می‌توان به صورت زیر گسسته در نظر گرفت:



سیگنال‌های گسسته (ادامه...)

- اگرمقادیر x را به صورت صحیح و در بازه‌ی $(x=0,1,2,\ldots, M\text{-}1)$ درنظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\{f(x_0), f(x_0+\Delta x), f(x_0+2\Delta x), \ldots, f(x_0+(M-1)\Delta x)\}$$

$$\Downarrow$$

$$\{f(0), f(1), f(2), \ldots, f(M-1)\}$$

سری فوریه‌ی سیگنال‌های زمان گسسته

- برای سیگنال‌های گسسته‌ی متناوب هم می‌توان سری فوریه را تعریف کرد، البته سری فوریه‌ی سیگنال‌های گسسته با سری فوریه‌ی سیگنال‌های پیوسته تفاوت‌های اساسی دارد:

$$f[n]=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\omega_0 n}=\sum_{k=<N>} a_k e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

$$X(K)=\sum_{n=0}^{N_0-1}\alpha(K,n)x(n)$$

$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} f[n]e^{-jk\omega_0 n}=\frac{1}{N}\sum_{n=<N>} f[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- به نظر شما تبدیل فوریه‌ی سیگنال گسسته چگونه به دست می‌آید؟

تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های گسسته(DTFT)

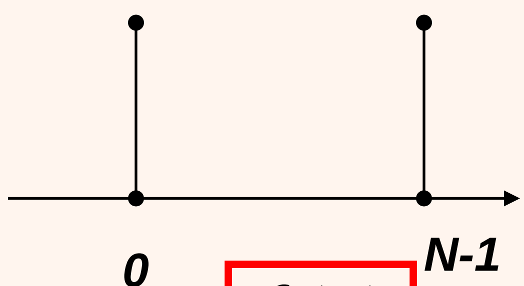
- به طریق مشابه برای سیگنال‌های گسسته، تبدیل فوریه تعریف می‌شود:

$$F(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)e^{-j\omega n} \qquad T=2\pi$$

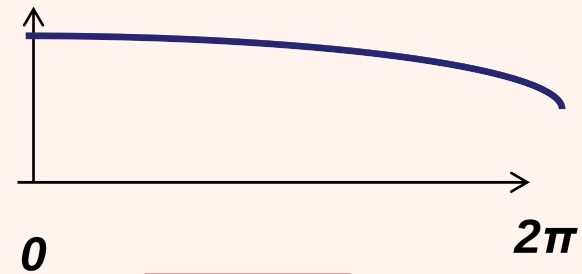
DTFT (Desecrate Time Fourier Transform)

- چنان‌چه ملاحظه می‌شود، حاصل تبدیل پیوسته است!
  - جهت کاربردهای مختلف(استفاده از قابلیت‌های رایانه‌های دیجیتال) عموما تبدیل پیوسته مفید نبوده، نیاز به اعمال نسخه‌ی گسسته از تبدیل است.
- بدین منظور از سیگنال گسسته تبدیل فوریه گرفته در فرکانس‌های $(2k\pi/N)$ نمونه برداری می‌کنیم.

تبدیل فوریه‌ی سیگنال‌های گسسته (DTFT)



$\boxed{f(n)}$



$\boxed{F(\omega)}$

$$F(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\omega n} \qquad \mathrm{T}=2\pi$$

$$F(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2k\pi}{N}} \Rightarrow F(K)=\sum_{n=0}^{N-1} f(n)e^{-j\frac{2k\pi}{N}n} \qquad K=0,\ldots,N-1$$

تبدیل فوریه گسسته

DFT (Discrete Fourier Transform)

- برای تبدیل فوریه‌ی گسسته که از نمونه‌برداری تبدیل فوریه‌ی سیگنال به دست می‌آید، خواهیم داشت:

$$\boxed{F(k)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\exp(-j2\pi kn/N)}$$

k=0,1,2,…,N-1

$$\boxed{f(n)=\sum_{k=0}^{N-1} F(k)\exp(j2\pi kn/N)}$$

n=0,1,2,…,N-1

در DFT، $\omega = 2\pi k/N$ در نظر گرفته می‌شود، یعنی به ازای 0->N-1 می‌باید N نمونه‌ی متمایز وجود داشته باشد.

فرآیند محاسبه‌ی DFT

به گونه‌ای دیگر می‌توان به DFT نگاه کرد:
سیگنال در دامنه‌ی مکان را به صورت متناوب درآمده و سپس از آن تبدیل فوریه گرفته می‌شود.

$f(n)$ → $\tilde{f}(n)$

تابع ورودی غیر پریودیک

تابع ورودی پریودیک

$F(K)$ ← $\tilde{F}(K)$

انتخاب N نمونه

تبدیل یافته‌ی پریودیک

تبدیل فوریه گسسته(ادامه...)

- برای محاسبات کامپیوتری از تبدیل گسسته‌ی فوریه (DFT) استفاده می‌شود.
- به همین جهت برای پردازش تصویر دیجیتال هم خواهیم داشت:
  - همانند تبدیل گسسته‌ی یک بعدی می‌باید ماتریس تصویر ابتدا متناوب گردد.