

مقدمات (۳)

فشرده‌سازی اطلاعات

۰۱-۰۲-۰۰۵-۱۰-۱۴۰

بخش پنجم

قسمت سوم

تبدیل فوریه ۲



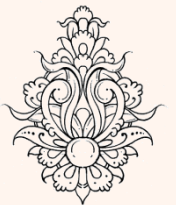
دانشگاه شهید بهشتی
پژوهشکده‌ی فضای مجازی

بهار ۱۴۰۲

احمد محمودی ازناوه

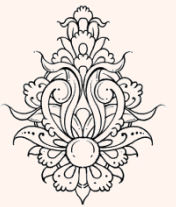
فهرست مطالب

- تصاویر پایه‌ی تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دوبعدی
- تحلیل در حوزه‌ی فرکانس
 - فیلتر پایین‌گذر گاوسی
 - تحلیل سایر فیلترها

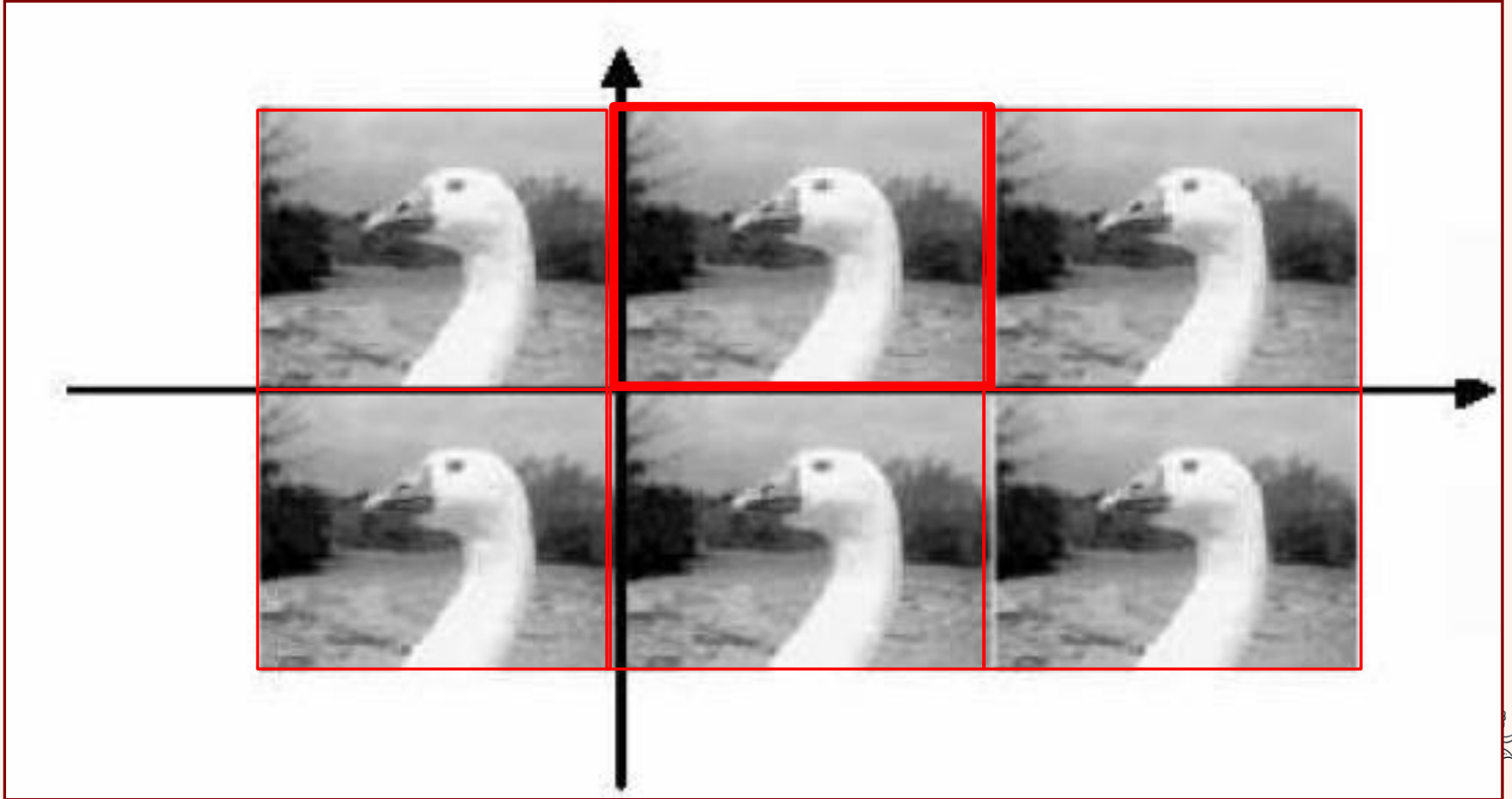


تبدیل فوریه گسسته (ادامه...)

- برای محاسبات کامپیوتری از تبدیل گسسته فوریه (DFT) استفاده می‌شود.
- به همین جهت برای پردازش تصویر دیجیتال هم خواهیم داشت:
- همانند تبدیل گسسته فوریه یک بعدی می‌باید ماتریس تصویر ابتدا متناوب گردد.



متناوب نمودن تصویر



چگونگی متناوب کردن تصویر (سیگنال دو بعدی)



تبدیل گسسته‌ی یک بعدی

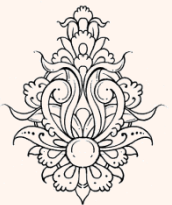
$$\begin{aligned} \{z(n)\} &\Leftrightarrow \{Z(k)\} \\ n, k &= 0, 1, \dots, N-1 \\ W_N &= \exp\{-j2\pi/N\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} Z(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} z(n) \cdot W_N^{nk} \\ z(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} Z(k) \cdot W_N^{-nk} \end{cases}$$

- ماتریس یکانی DFT به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{n,k} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{nk} \right\}, \quad 0 \leq k, n \leq N-1$$

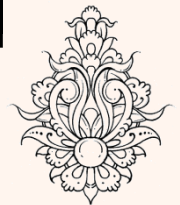
- بردارهای پایه‌ی تبدیل یکانی DFT ستون‌های F^T یا همان F است. (زیرا F ماتریسی متقارن است).
- تذکر: برای این که ماتریس تبدیل یکانی باشد، رابطه‌ی تبدیل در \sqrt{N} ضرب شده است.



$$X(K) = \sum_{n=0}^{N_0-1} \alpha(K, n)x(n)$$

ماتریس تبدیل

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$



$$W_N = \exp\{-j2\pi / N\}$$

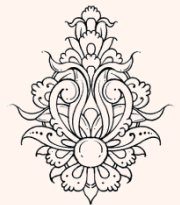
ماتریس تبدیل یک بعدی (چهار نمونه)

For $N = 4$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W_4^1 & W_4^2 & W_4^3 \\ 1 & W_4^2 & W_4^0 & W_4^2 \\ 1 & W_4^3 & W_4^2 & W_4^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \mathbf{F}x$$

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{nk} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right\}$$



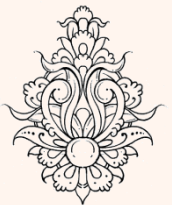
ماتریس تبدیل یک بعدی (ادامه...)

$$X(0) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{0}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(0)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(0)}{4}}$$

$$X(1) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{1}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(1)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(1)}{4}}$$

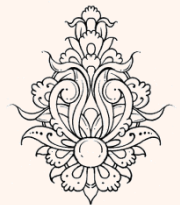
$$X(2) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{2}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(2)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(2)}{4}}$$

$$X(3) = x(0)1 + x(1)e^{-j2\pi\frac{3}{4}} + x(2)e^{-j2\pi\frac{2(3)}{4}} + x(3)e^{-j2\pi\frac{3(3)}{4}}$$



ماتریس تبدیل یک بعدی (ادامه...)

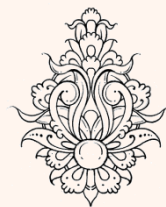
$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$



ماتریس تبدیل یک بعدی (مثال)

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

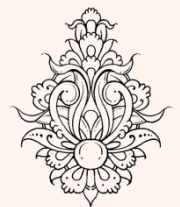
$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



ماتریس تبدیل یک بعدی (چهار نمونه)

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

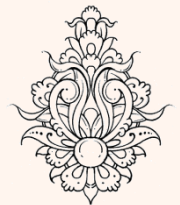


تبدیل معکوس

$$X = Wx \rightarrow DFT$$



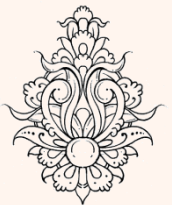
$$x = W^H X \rightarrow IDFT$$



- به وسیله‌ی دستور fft می‌توان DFT یک سیگنال را محاسبه نمود.

$Y = fft(X,n)$ returns the n -point DFT

- اگر طول X از n کمتر باشد عموماً به همان تعداد صفر به انتهای سیگنال اضافه شود.



تبدیل فوریه دوبعدی گسسته

برای سادگی ماتریس را مربعی در نظر می‌گیریم

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp(-j2\pi(ux/N + vy/N))$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp(j2\pi(ux/N + vy/N))$$

$$t_f = \frac{1}{N} \exp(-j2\pi(ux/N + vy/N))$$

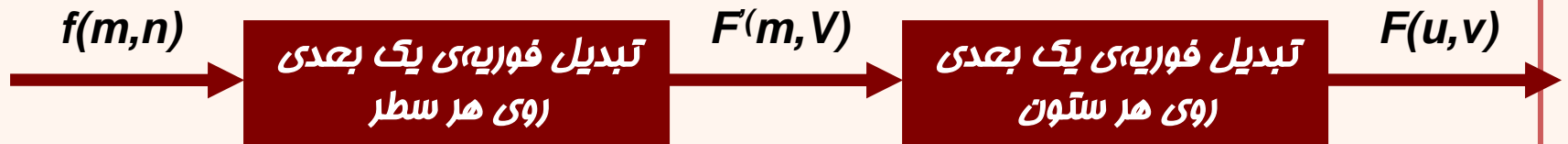
$$t_b = \frac{1}{N} \exp(j2\pi(ux/N + vy/N))$$

$$t_b = t_f^{*T} = t_f^{-1} \Rightarrow \text{unitary matrix}$$



خاصیت جدایی‌پذیری تبدیل فوریه

- تبدیل فوریه دارای خاصیت **خطی** است.
- تبدیل فوریه تبدیلی **جدایی‌پذیر** است.



$$\begin{aligned} F(u, v) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp(-j 2\pi (um / N + vn / N)) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp(-j 2\pi um / N) \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp(-j 2\pi vn / N) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F'(m, v) \exp(-j 2\pi um / N) \end{aligned}$$



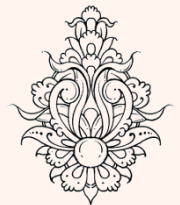
$$W_N = \exp(-j2\pi/N)$$

تصاویر پایه

- برای تبدیل دو بعدی فوریه تصاویر پایه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A(u, v) = \begin{bmatrix} 1 \\ W_N^u \\ W_N^{2u} \\ \vdots \\ W_N^{(N-1)u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & W_N^v & W_N^{2v} & \dots & W_N^{(N-1)v} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \dots & W_N^{(N-1)} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{(N-1)} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$



$$W_N = \exp(-j2\pi/N)$$

تصاویر پایه

$$A(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & W_N^v & W_N^{2v} & \dots & W_N^{(N-1)v} \\ W_N^u & W_N^{u+v} & W_N^{u+2v} & \dots & W_N^{u+(N-1)v} \\ W_N^{2u} & W_N^{2u+v} & W_N^{2u+2v} & \dots & W_N^{2u+(N-1)v} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ W_N^{(N-1)u} & W_N^{(N-1)u+v} & W_N^{(N-1)u+2v} & \dots & W_N^{(N-1)u+(N-1)v} \end{bmatrix}$$



به دست آوردن تصاویر پایه

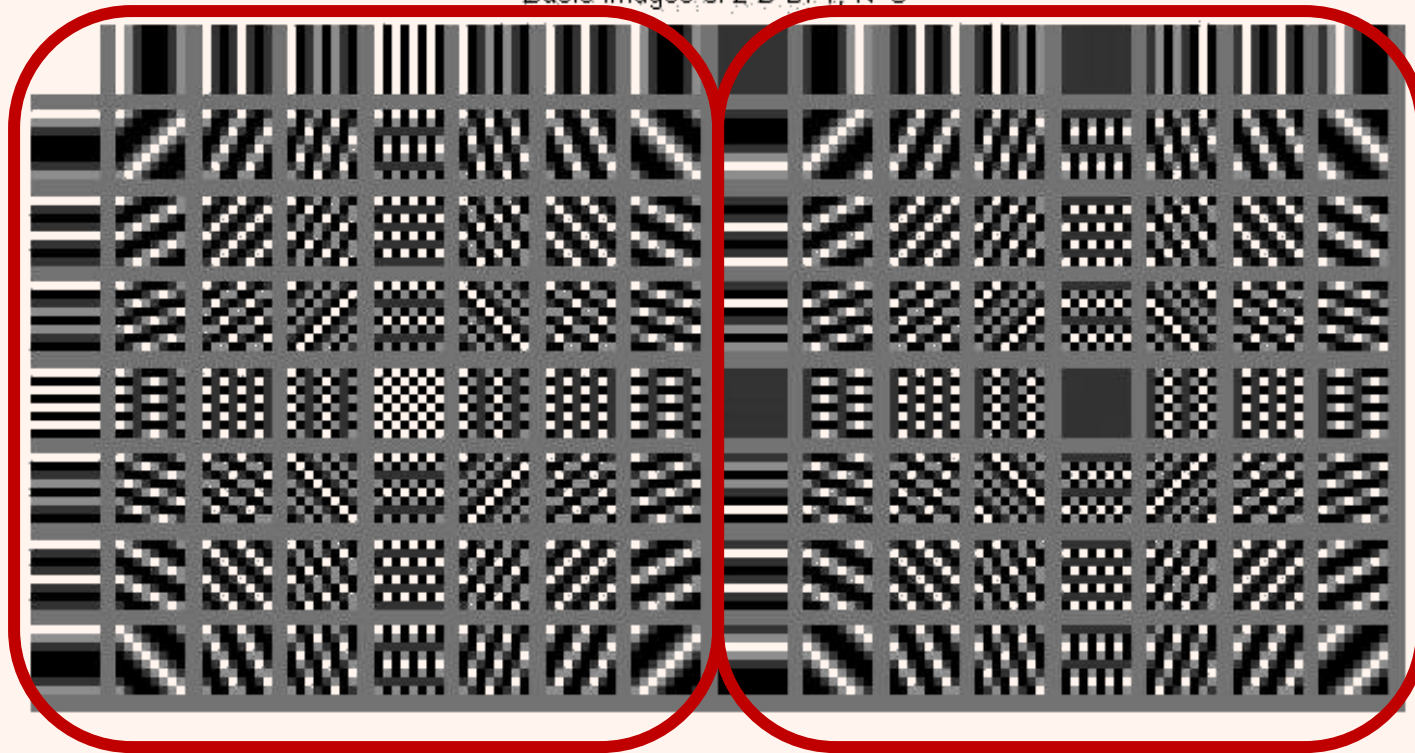
```
N=8;  
F=zeros(N,N);  
for n=1:N  
    for k=1:N  
        F(n,k)=exp(-j*2*(pi/N)*(n-1)*(k-1));  
    end  
end  
A=cell(N,N);  
for u=1:N  
    for v=1:N  
        A{u,v}=(F(:,u)*F(v,:));  
    end  
end
```

$$\mathbf{F} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} w_N^{nk} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \right\}$$



تصاویر پایه

Basis Images of 2-D DFT; N=8



قسمت مقیقی

قسمت موهومی

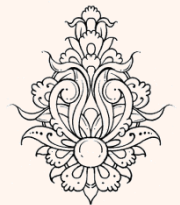


نکات

- هر یک از تصاویر پایه نشان‌دهنده‌ی خواص مولفه‌های مربوط است.
- مؤلفه‌ی $(0,0)$ نشان‌دهنده‌ی مقدار میانگین یا مقدار DC تصویر است.
- طبق خواص تبدیل فوریه داریم:

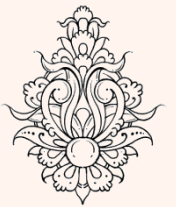
$$real(i,j) == real(N-1-i, N-1-j)$$

- بیشترین فرکانس متعلق به مولفه‌ی $(\frac{N}{2}, \frac{N}{2})$ است (برای تبدیل 8×8).
- هرچه به مرکز نزدیک می‌شویم فرکانس افزایش می‌یابد.

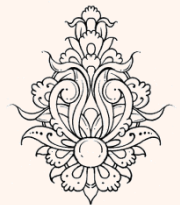
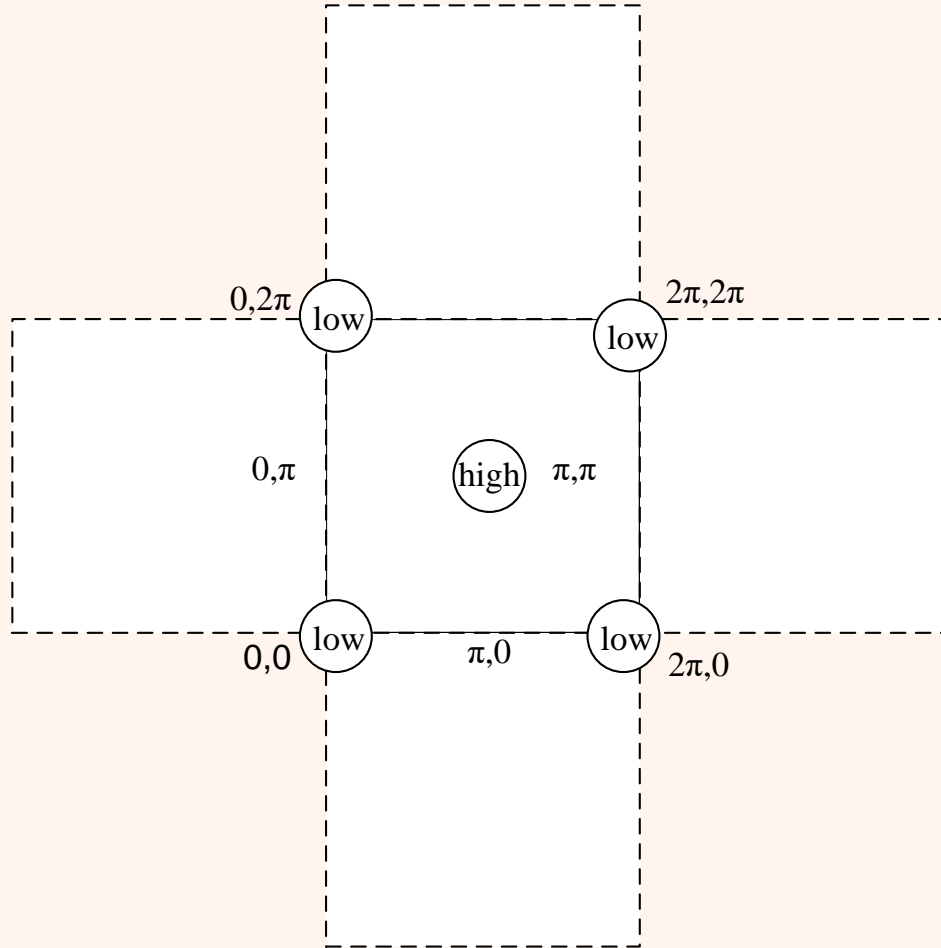


نکات

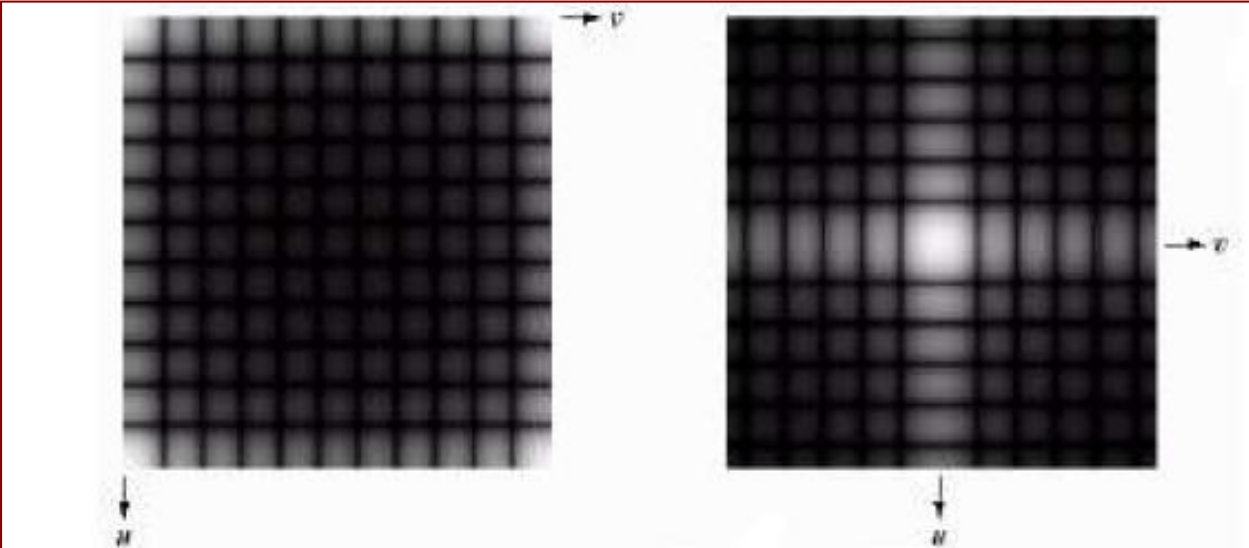
- تصاویر پایه‌ی افقی و عمودی نشان‌دهنده‌ی وجود چنین ساختارهایی در تصویرند.
- اگر ضرایب متناظر با هر یک از تصاویر پایه صفر باشد یعنی میزان اشتراک چنین تصویر پایه‌ای در ساختن تصویر اصلی صفر است.
- به صورت کلی هر ضریب میزان دخالت تصویر پایه‌ی متناظر را در ساختن تصویر اصلی نشان می‌دهد.



دامنه‌ی فرکانس سیگنال‌های زمان‌گسسته

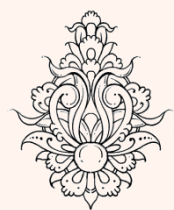
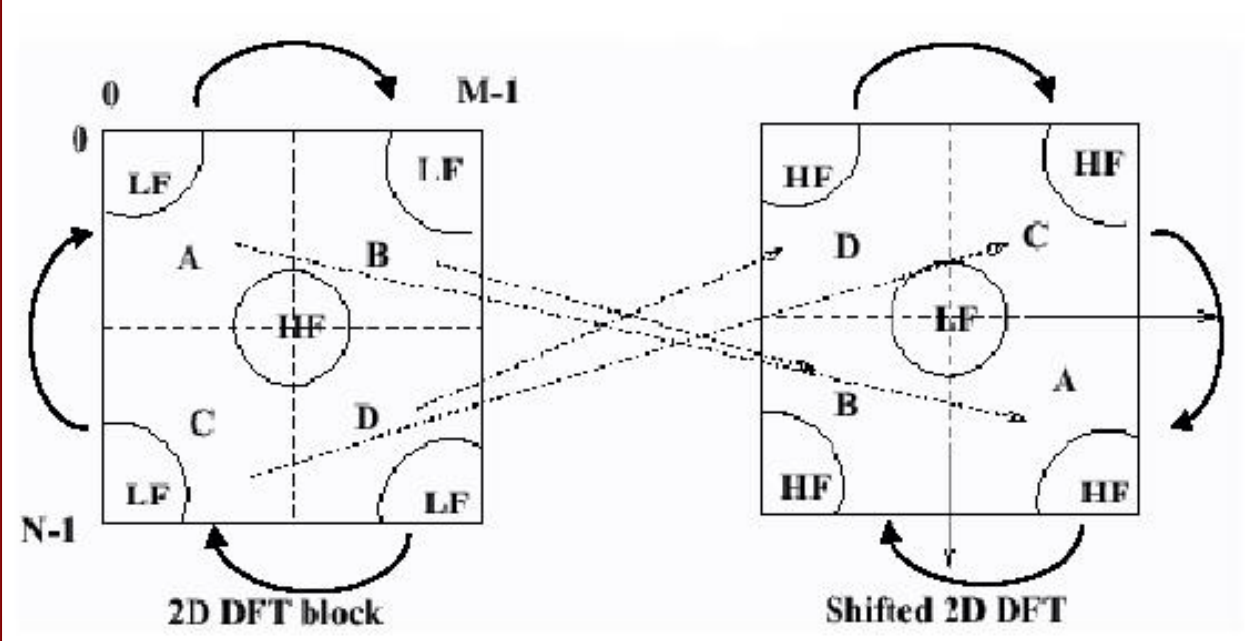


نمایش اندازه‌ی تبدیل فوریه در دو روش



مبدأ بالا (سمت چپ)

مبدأ وسط



Fourier Spectrum

$$|F(u, v)| = \left[R^2(u, v) + I^2(u, v) \right]^{1/2}$$

Phase Angle

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

$$F(u, v) = |F(u, v)| e^{-j\phi(u, v)}$$

Power Spectrum

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$



تأثیر فاز

- تبدیل فوری، دارای دو مقدار **حقیقی** و **موهومی** است.
- جهت تحلیل مقادیر اندازه و فاز محاسبه می‌شود که برای تبدیل معکوس به هر دوی این مقادیر نیاز است.

اندازه‌ی تبدیل فوری (مبدأ به وسط
انتقال یافته)

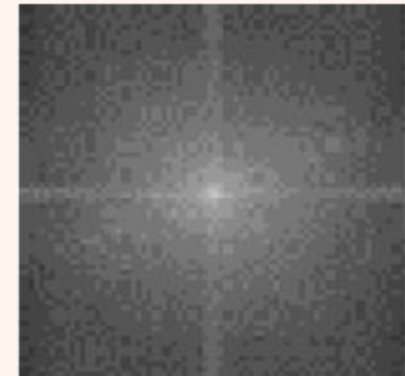


فاز تبدیل فوری



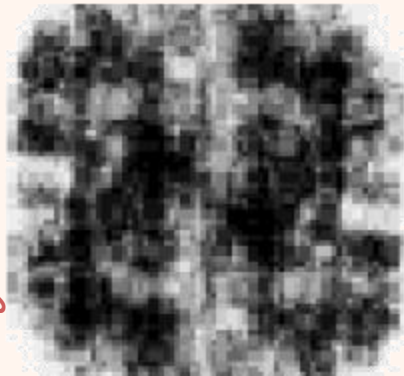
تصویر اصلی

اندازه‌ی تبدیل با استفاده از لگاریتم



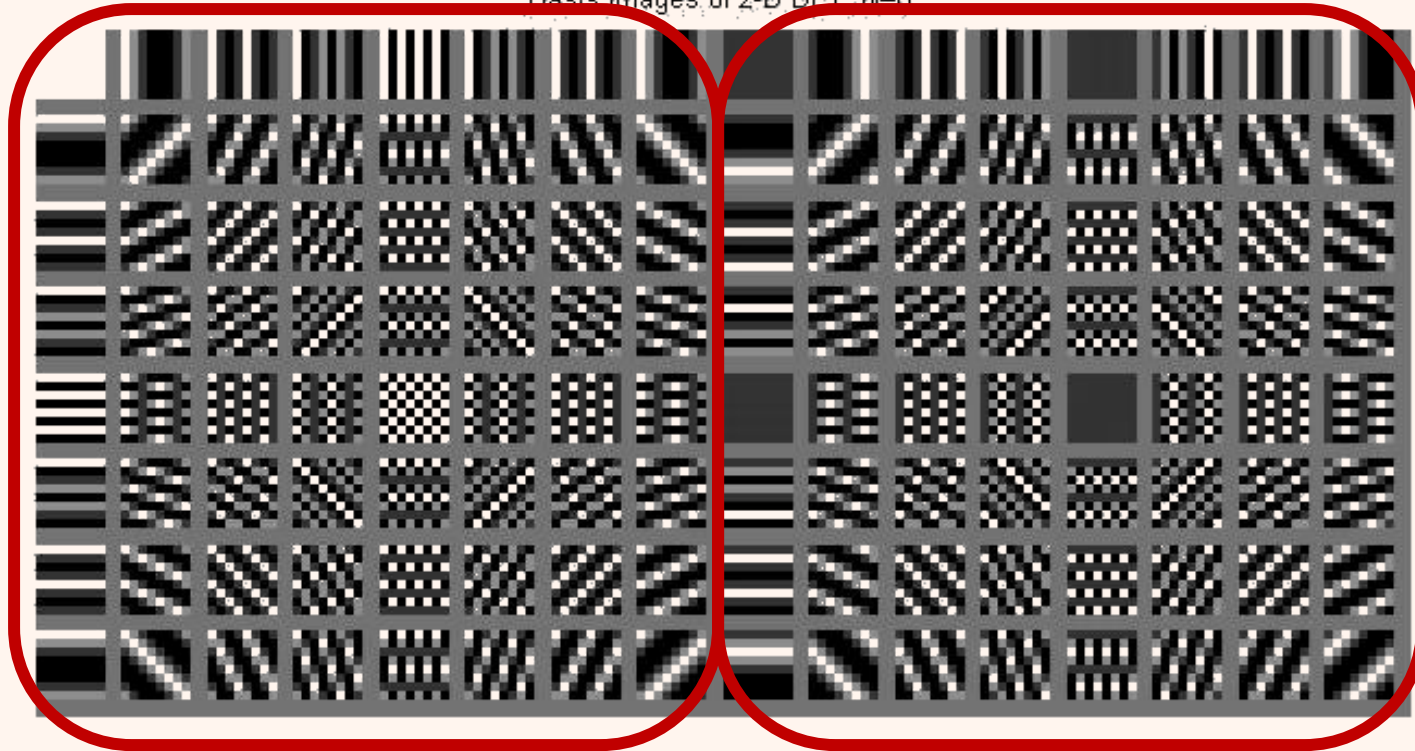
ژانسه گانه
سپهبد
بهشتی

تصویر بازسازی شده با اندازه
تبدیل و فاز صفر



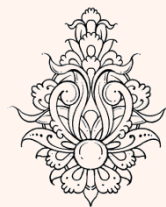
تصاویر پایه

Basis Images of 2-D DFT: $N=8$



قسمت مقیقی

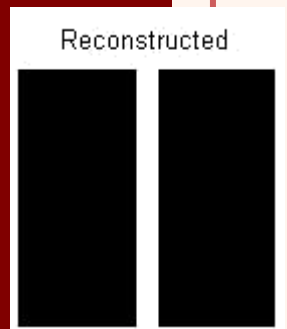
قسمت موهومی



```

f=zeros(128,128);
f(:,60:70)=1;
imshow(f,[ ]);title('Original');
F = fft2(f);
S2=log(1+abs(F));
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');
Fc=fftshift(F);
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of Abs of
shifted version');
Phase=atan2(imag(F),real(F));
figure;imshow(Phase,[ ]);title('Phase Angle');
f2=real(ifft2(F));
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');

```

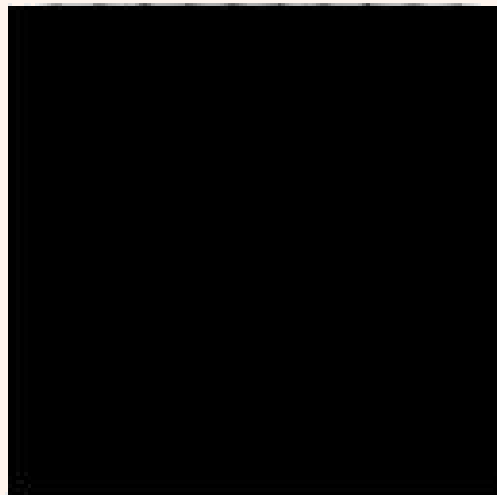


Log of Abs of F

Log of Abs of shifted version

Phase Angle

Original



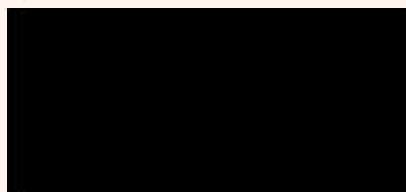
مثال

```
f=zeros(128,128);  
f(60:70,:)=1;  
imshow(f,[ ]);title('Original');  
F = fft2(f);  
S2=log(1+abs(F));  
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');  
Fc=fftshift(F);  
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of  
Abs of shifted version');  
f2=real(ifft2(F));  
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```

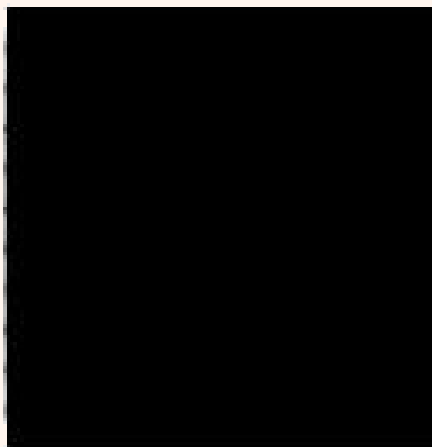
Reconstructed



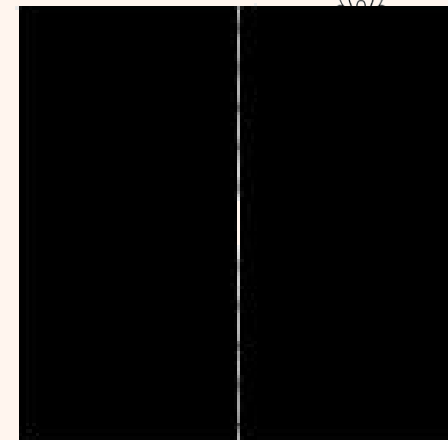
Original



Log of Abs of F



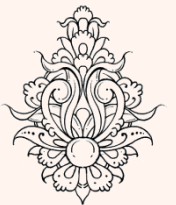
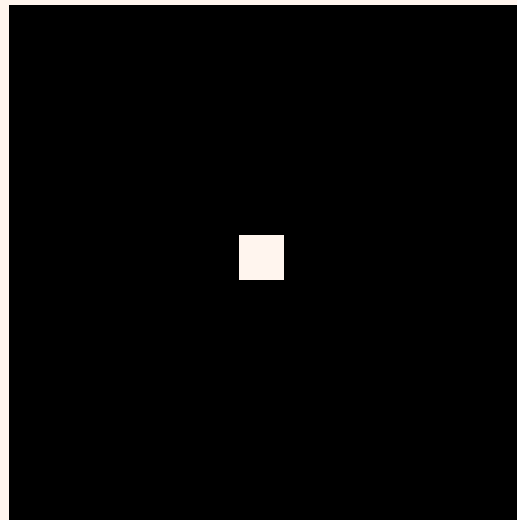
Log of Abs of shifted version



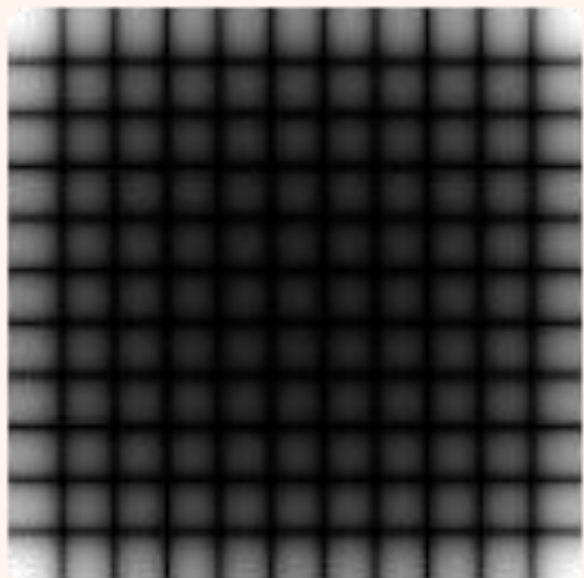
مثال ۳

```
f=zeros(128,128);  
f(58:68,58:68)=1;  
imshow(f,[ ]);title('Original');  
F = fft2(f);  
S2=log(1+abs(F));  
figure;imshow(S2,[ ]);title('Log of Abs of F');  
Fc=fftshift(F);  
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);title('Log of Abs of  
shifted version');  
f2=real(ifft2(F));  
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed');
```

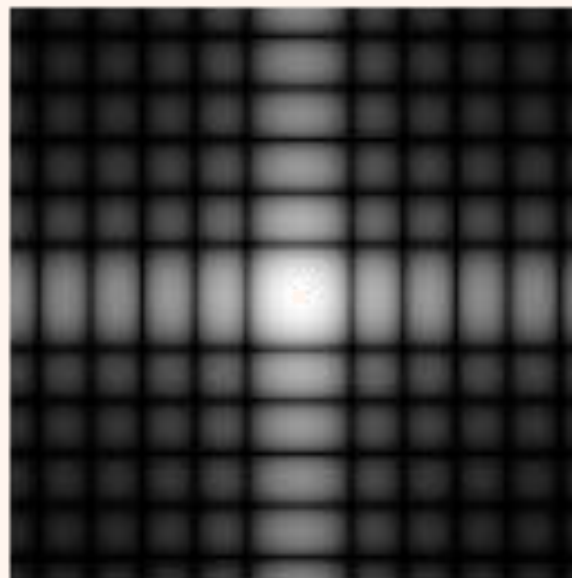
Original



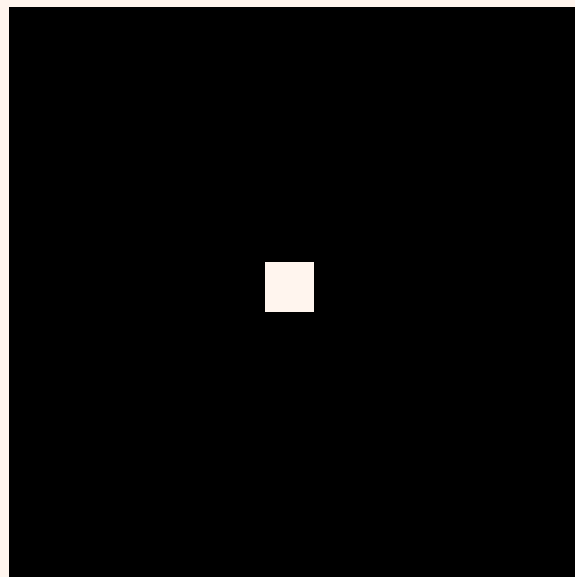
Log of Abs of F



Log of Abs of shifted version



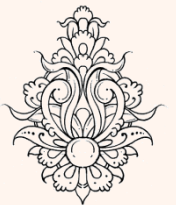
Reconstructed



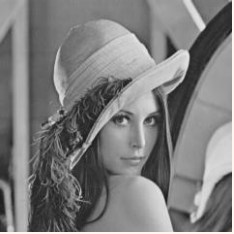
خصوصیات تبدیل فوریه

• جهت نشان دادن خواص فرکانسی (تخمیرات روشنایی در تصویر)، از تبدیل فوریه استفاده می‌شود.

- نوامی با روشنایی یکسان فرکانس صفر
- نوامی با تخمیرات روشنایی تدریجی فرکانس پایین
- نوامی با تخمیرات روشنایی ناگهانی فرکانس بالا



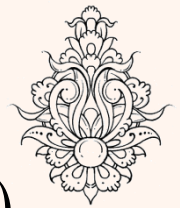
تصاویر پایه



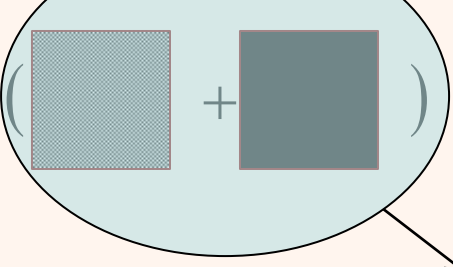
بخش حقیقی

بخش موهومی

$$\begin{aligned}
 & F(0,0) \times \left(\begin{array}{c} \text{[White Box]} \\ + \\ \text{[Black Box]} \end{array} \right) + F(0,1) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Vertical Gradient]} \\ + \\ \text{[Horizontal Gradient]} \end{array} \right) + \dots \\
 & \mathbf{508068} \qquad \qquad \qquad \mathbf{-8732.34 + 37028.8i} \\
 & F(1,0) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Vertical Gradient]} \\ + \\ \text{[Horizontal Gradient]} \end{array} \right) + F(1,1) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Diagonal Gradient]} \\ + \\ \text{[Anti-Diagonal Gradient]} \end{array} \right) \\
 & \mathbf{331.5 - 19201.6i} \qquad \qquad \mathbf{-26840.2 + 22678.2i} \\
 & F(2,0) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Horizontal Stripes]} \\ + \\ \text{[Vertical Stripes]} \end{array} \right) + \dots \\
 & \mathbf{-6749.5 - 3133.36i} \\
 & F(3,0) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Horizontal Stripes]} \\ + \\ \text{[Vertical Stripes]} \end{array} \right) + \dots \\
 & \mathbf{474.481 - 9085.3i} \\
 & \dots \qquad \dots \qquad \dots \\
 & F(32,32) \times \left(\begin{array}{c} \text{[Grid Pattern]} \\ + \\ \text{[Black Box]} \end{array} \right) \\
 & \mathbf{-133. - 279.i} \\
 & \dots \qquad \dots \qquad \dots
 \end{aligned}$$

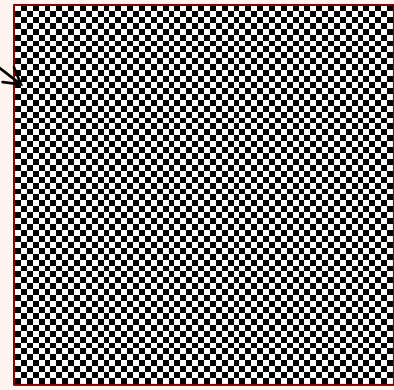


$$F(32,32) \times$$



-133. - 279.i

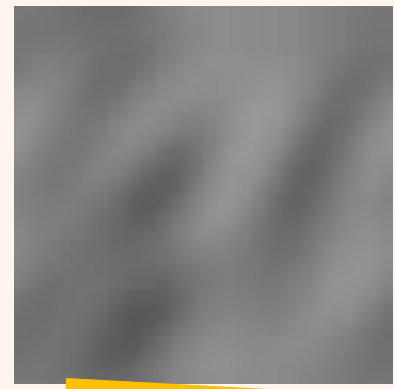
تصاویر پایه



بازسازی تصویر با استفاده از تصاویر پایه



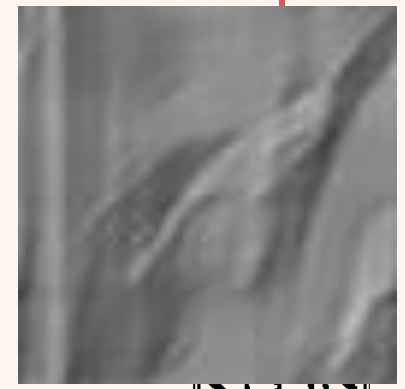
1(0.02%)



14(0.39%)



100(2%)



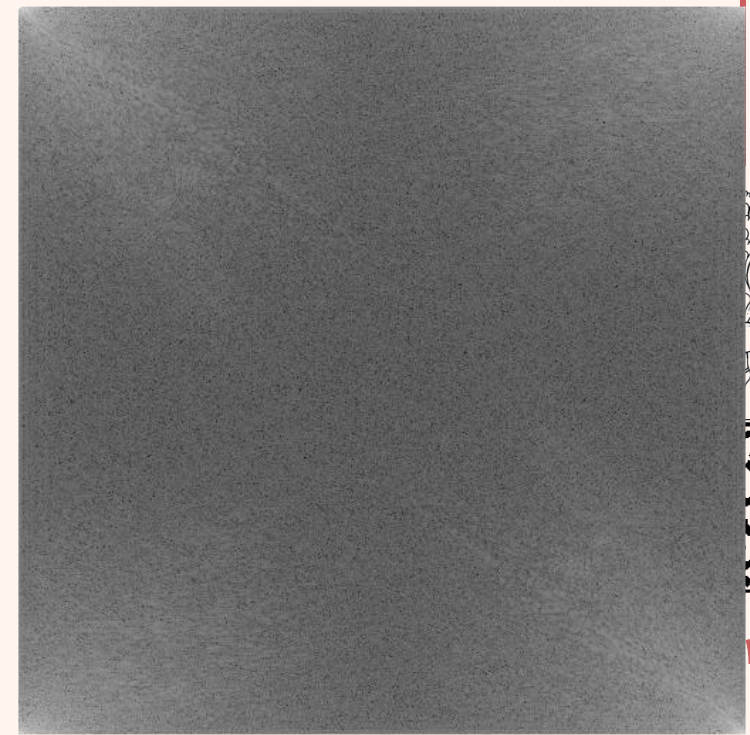
1400(9.7%)

```
f = imread('lena.gif');
imshow(f,[ ]);title('Original');
F = fft2(f);
S2=log(1+abs(F));
figure;imshow(S2,[ ]);
title('Log of Abs of F');
Fc=fftshift(F);
figure;imshow(log(1+abs(Fc)),[ ]);
title('Log of Abs of shifted version');
f2=real(ifft2(F));
figure;imshow(f2,[ ]);title('Reconstructed')
```

اندازه‌ی تبدیل با استفاده از لگاریتم

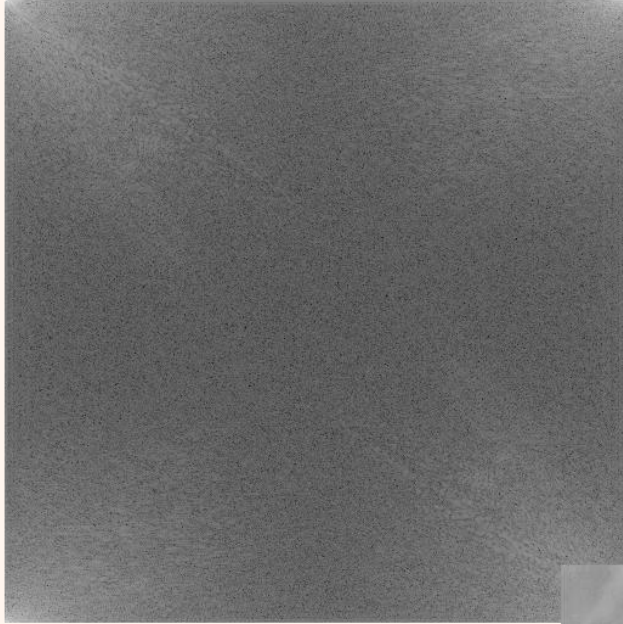
Original

تصویر اصلی

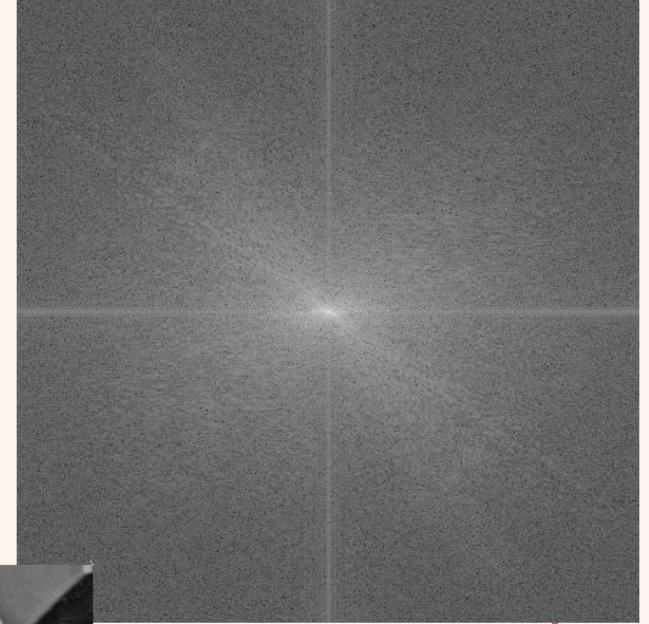


مثال (ادامه...)

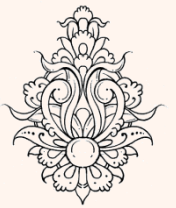
Log of Abs of F



Log of Abs of shifted version

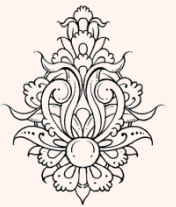


Reconstructed



تصویر دوباره سازی
شده

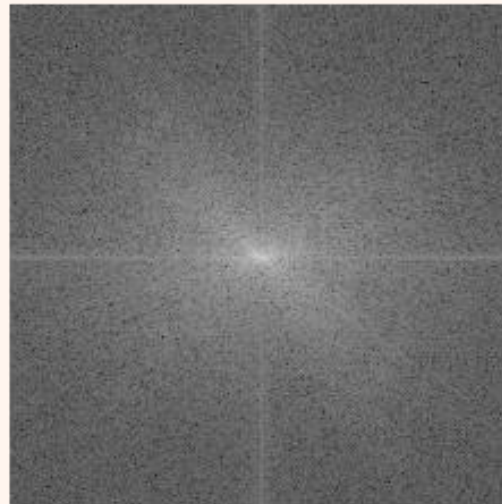
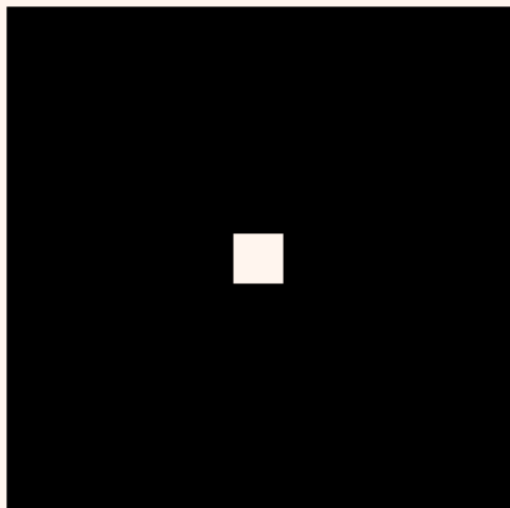
```
f = imread('lena.gif');  
figure,imshow(f,[ ]);title('Original');  
F = fft2(f);  
Fc=fftshift(F);  
mask=zeros(size(F));  
MskWd=floor(size(F,1)*0.1/2);  
mask(size(F,1)/2-MskWd:size(F,1)/2+MskWd,size(F,2)/2-  
MskWd:size(F,2)/2+MskWd)=1;  
figure,imshow(mask,[ ]);title('mask');  
figure,imshow(real(ifft2(fftshift(mask).*F)),[]),title('Compre  
ssed image');
```



Original



mask



Compressed Image



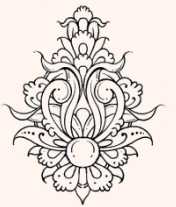
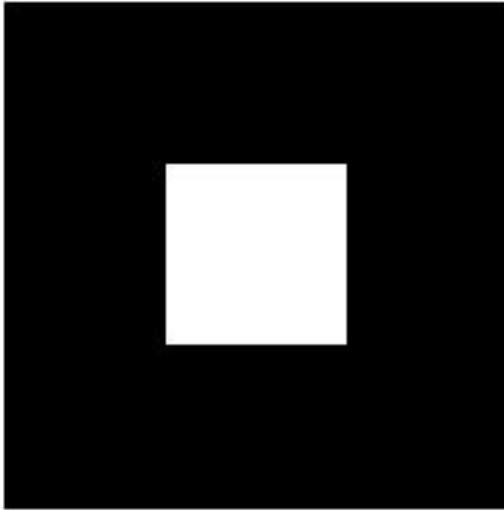
مثال

```
f = imread('lena.gif');
F = fft2(f);
mask=zeros(size(F));
for k=1:2:floor(size(F,1)/2)
    MskWd=k;
    mask(size(F,1)/2-MskWd:size(F,1)/2+MskWd,size(F,2)/2-
MskWd:size(F,2)/2+MskWd)=1;
    subplot(121),imshow(mask),title(num2str(k*2));
    subplot(122),imshow(real(ifft2(fftshift(mask).*F)),[]);
    pause
end
```



مثال (ادامه...)

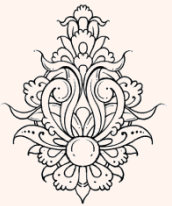
182



انتقال در حوزه‌ی زمان و فرکانس

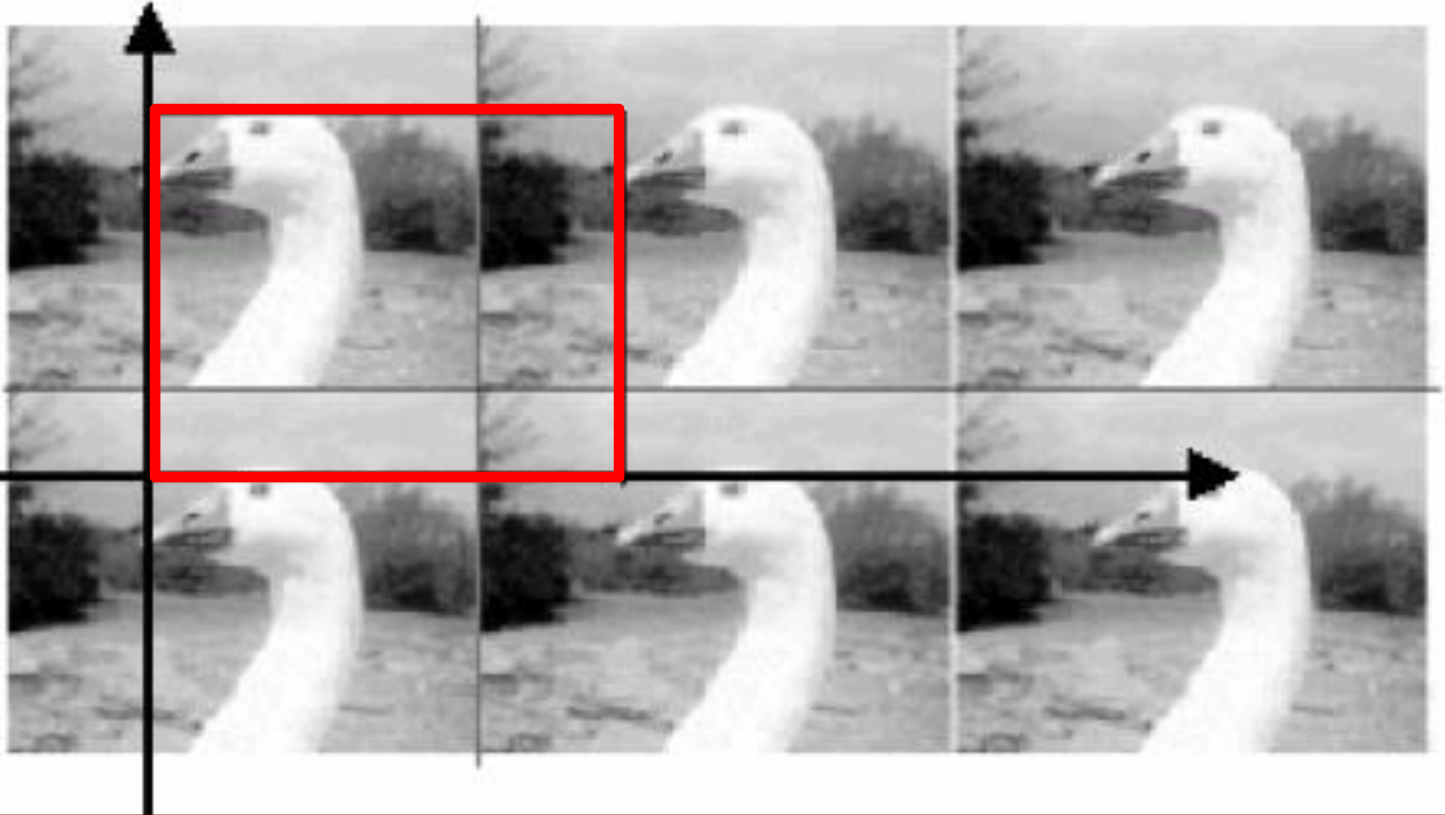
- انتقال در حوزه‌ی زمان و فرکانس اثرات متقابلی در تبدیل فوریه و معکوس آن دارند.
- انتقال در حوزه‌ی زمان تنها در فاز اثرگذار است و در اندازه تأثیری نخواهد داشت.

$$\begin{aligned} F\{x(n-m)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-m)e^{-jn\omega} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j(k+m)\omega} \quad \text{if} \quad n-m=k \\ &= e^{-jmw} X(\omega) \end{aligned}$$



$$f(m-m_0, n-n_0) \xleftrightarrow{DFT} F(u, v) \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} m_0 u - j \frac{2\pi}{N} n_0 v\right)$$

انتقال دایروی



انتقال قطعی تصویر متناوب شده یا انتقال دایروی سیگنال اصلی

کتابخانه
سپهر
بهشتی

چرخش در حوزه زمان

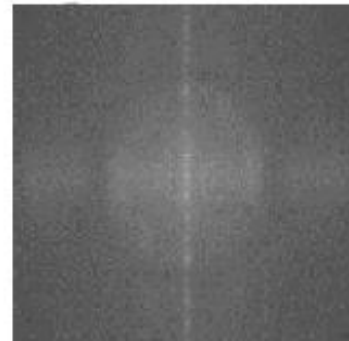
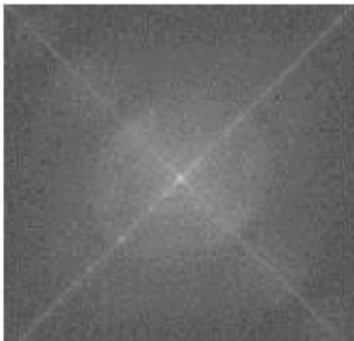
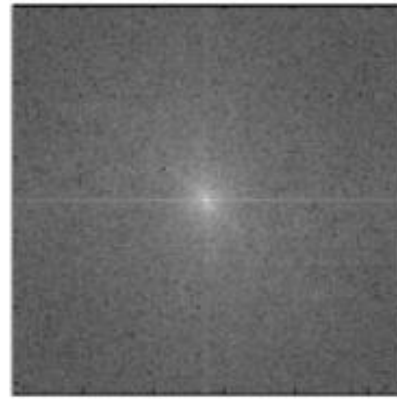
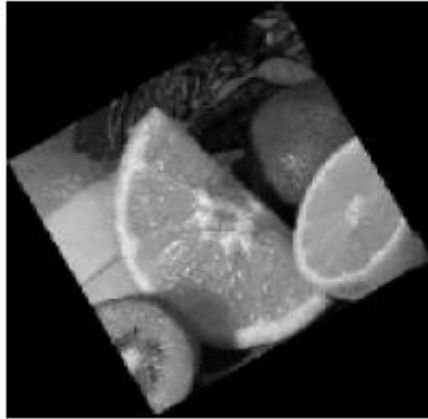
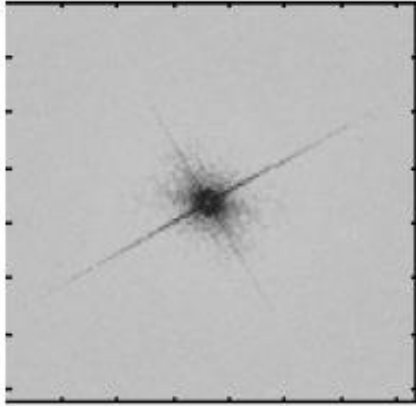
- چرخش در حوزه زمان، همان درجه چرخش در حوزه فرکانس را نتیجه می‌دهد.
- براساس مختصات قطبی خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} m &= r \cos \theta \\ n &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{in spatial domain}$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \omega \cos \phi \\ v &= \omega \sin \phi \end{aligned} \right\} \text{in frequency domain}$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(m, n) &\longleftrightarrow f(r, \theta) \\ f(r, \theta) &\xrightarrow{DFT} F(\omega, \phi) \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} f(r, \theta + \theta_0) &\xrightarrow{DFT} F(\omega, \phi + \theta_0) \end{aligned} \right.$$

مثال



Sonnet for LARA

My dear LARA, your beauty is so rare
 It is hard sometimes to describe it here
 I thought the stars would be my guide
 But only you, my love, I could not hide
 And I am glad I could not hide you
 I found that your beauty shines so true
 Your smile has captured my attention here
 Hard to watch with some of those who
 And the world has turned and turned
 That time, my dear, has passed and passed
 And still the stars and planets are all quite new
 I could have lived there with the stars and new
 But when I saw your smile from your eyes
 I said, "LARA, that's the best of days!"

Thomas Colburn

همیشه
 همیشه
 همیشه

تصویر اصلی و پرفش یافته‌ی متناظر

تغییر مقیاس

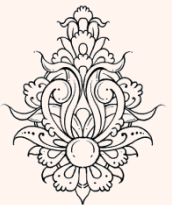
- گستردگی یا فشردگی در حوزه‌ی زمان-مکان نتیجه‌ی معکوس در حوزه‌ی فرکانس خواهد داشت.

$$f(am, bn) \xleftrightarrow{DFT} \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right)$$

- متوسط سیگنال

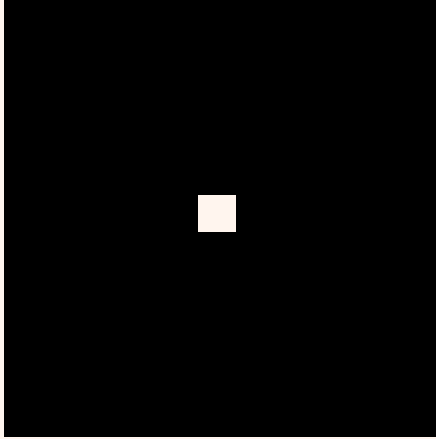
مقدار DC سیگنال از مولفه‌ی (0,0) به دست می‌آید

$$\text{Mean}[f(m, n)] = \bar{f}(m, n) = \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) = \frac{1}{N} F(0, 0)$$

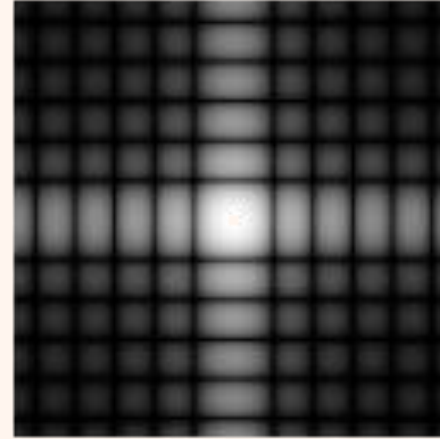


تغییر مقیاس (ادامه...)

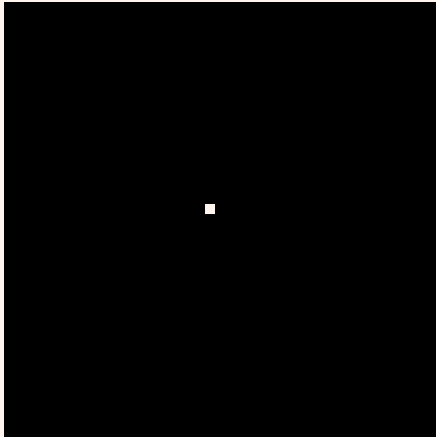
Original



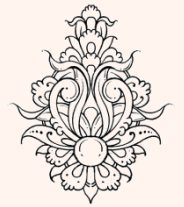
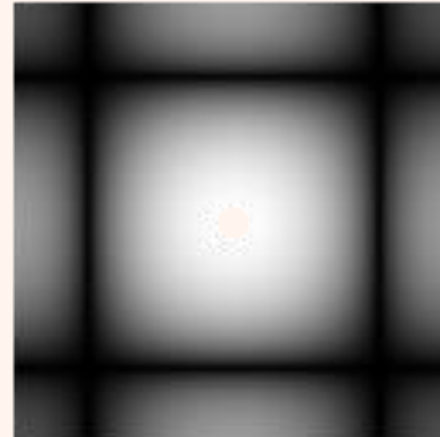
Log of Abs of shifted version



Original



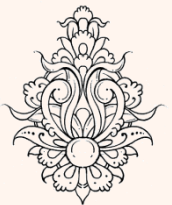
Log of Abs of shifted version



اعمال فیلتر در دامنه‌ی فرکانس

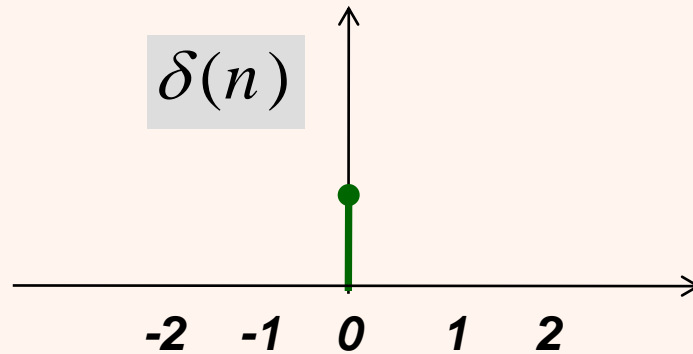
- در دامنه‌ی مکان اعمال فیلتر (LTI) معادل عملیات پیچیده‌ی کانولوشن است.
- در دامنه‌ی فرکانس کانولوشن معادل ضرب ماتریسی خواهد شد.
- توجه داشته باشید که برای فیلترهای کوچک، فیلتر کردن در دامنه‌ی مکان از لحاظ محاسباتی به صرفه‌تر است اما زمانی که ابعاد فیلتر افزایش می‌یابد، توصیه می‌شود در دامنه‌ی فرکانس این کار صورت پذیرد.

$$I(m, n) * H(m, n) \longleftrightarrow I(u, v) H(u, v)$$



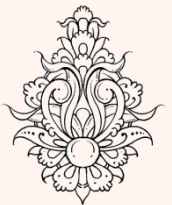
تابع ضربه

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$



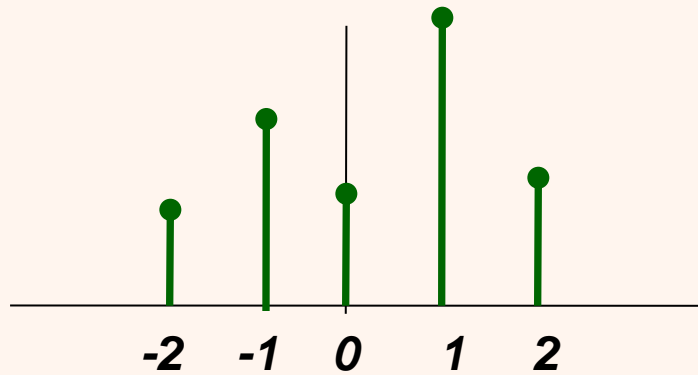
- می‌توان برای نمایش ساختار گسسته‌ی هر تابع، رابطه‌ای به صورت زیر داشت:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

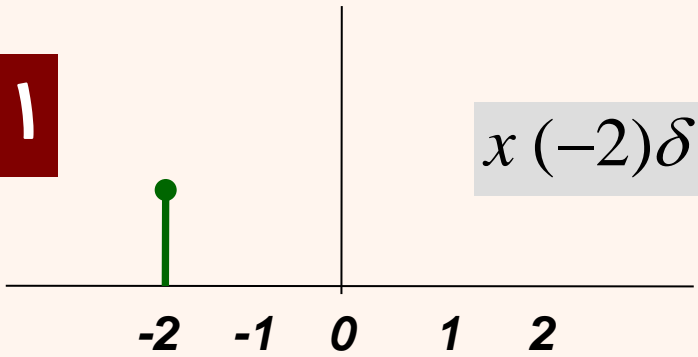


تابع ضربیه (ادامه...)

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

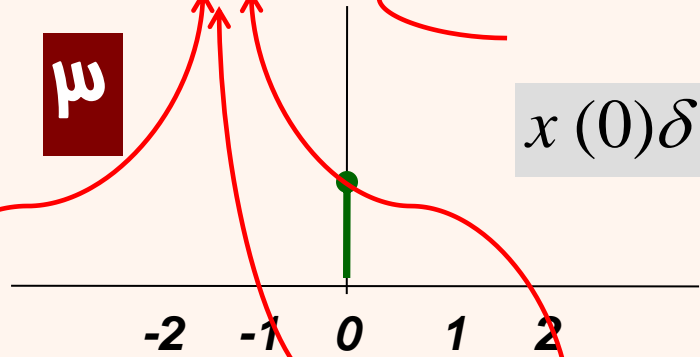


۱



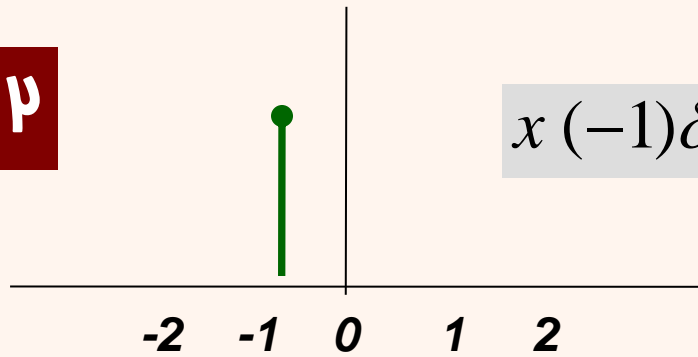
۳

$$x(-2)\delta(n - (-2))$$



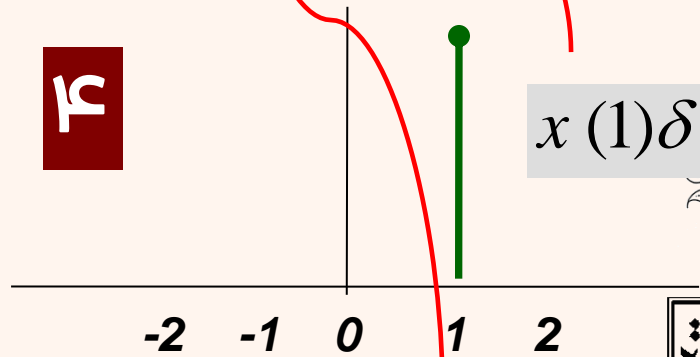
$$x(0)\delta(n - 0)$$

۲



۴

$$x(-1)\delta(n + 1)$$



$$x(1)\delta(n - 1)$$

۵



$$x(2)\delta(n - 2)$$

دانشگاه شهید بهشتی

- اگر x ورودی سیستم باشد به وسیله‌ی تبدیل به خروجی y نگاشت می‌شود.

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

- هر سیگنال را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)$$

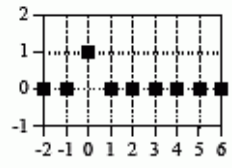
- پس خواهیم داشت:

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k)\right]$$

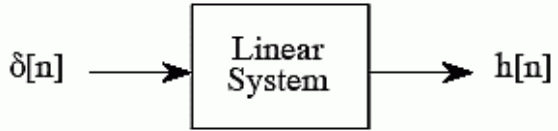
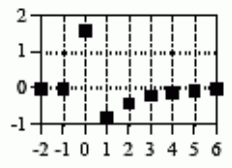


سیستم خطی و ثابت

Delta Function



Impulse Response



Linearity $ax_1(n) + bx_2(n) \rightarrow ay_1(n) + by_2(n)$

Time Invariance $x(n - n_0) \rightarrow y(n - n_0)$

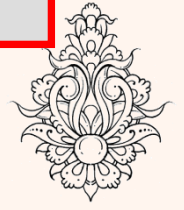
$$y(n) = T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n - k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T \left[\delta(n - k) \right]$$

• حال باید دید پاسخ $T[\delta(n-k)]$ چیست؟

- اگر $h(n) = T[\delta(n)]$ باشد خواهیم داشت:

$$h(n - k) = T[\delta(n - k)]$$

$$\delta(n - k) \xrightarrow{T} h(n - k)$$



ادامه...

$$y(n) = T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n-k)]$$

$$h(n-k) = T[\delta(n-k)]$$

$$\delta(n-k) \rightarrow T \rightarrow h(n-k)$$

$$y(n) = T \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k) \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) T[\delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$

Convolution

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k)$$



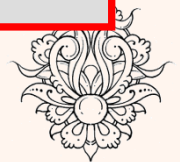
تأسیسات
سازمان
پژوهشی

کانولوشن دو بعدی

- نتیجه‌ی عبور سیگنال از فیلترهای خطی توسط کانولوشن سیگنال اصلی و پاسخ ضربه‌ی سیستم به دست می‌آید.

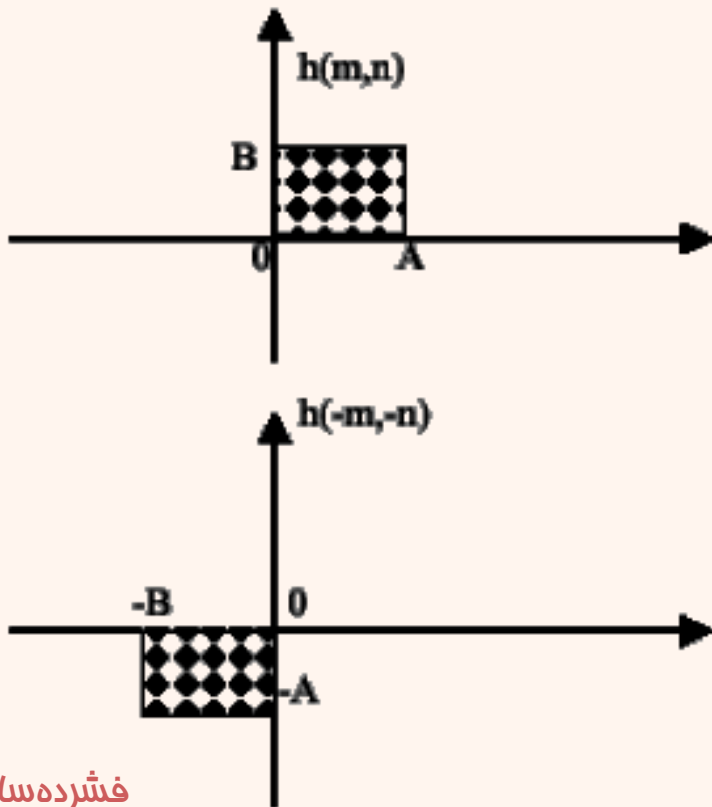
$$g(m, n) = f(m, n) * h(m, n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l) h(m-k, n-l)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h(k, l) f(m-k, n-l)$$

- «*» نشان‌دهنده‌ی کانولوشن خطی است، ابتدا h قرینه می‌شود و با انتقال به اندازه‌ی (m, n) رابطه مذکور محاسبه می‌شود.

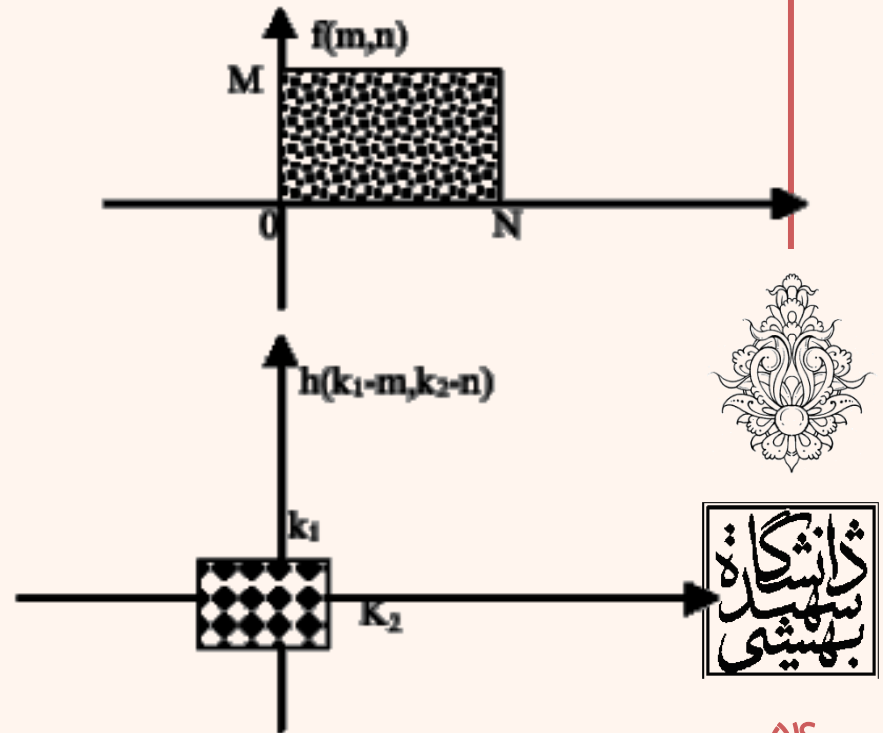


کانولوشن دو بعدی (ادامه...)

- اگر ماتریس $f(m,n)$ به اندازه $M \times N$ باشد و h به اندازه $A \times B$ ، ماتریس $g(m, n)$ دارای اندازه $(M+A-1, N+B-1)$ خواهد بود.



فشرده سازی



مثال

```
f=zeros(128,128);  
f(64:end,:)=255;  
figure,imshow(f,[ ]),title('Original');  
F=fft2(f);  
sig=5;  
H=lpfilter('gaussian',128,128,sig);  
figure,imshow(H,[ ]),title('LPF');  
figure,imshow(fftshift(H),[ ]),title('centered LPF');  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
figure,imshow(g,[ ]),title('Filtered');  
figure,imagesc(g(1:15,:));
```

Filtered



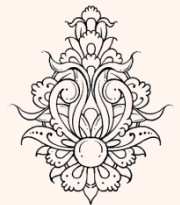
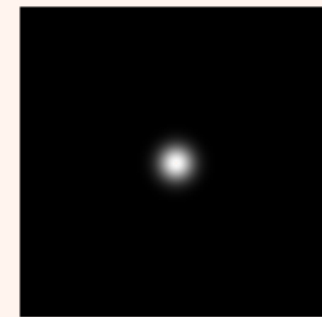
Original



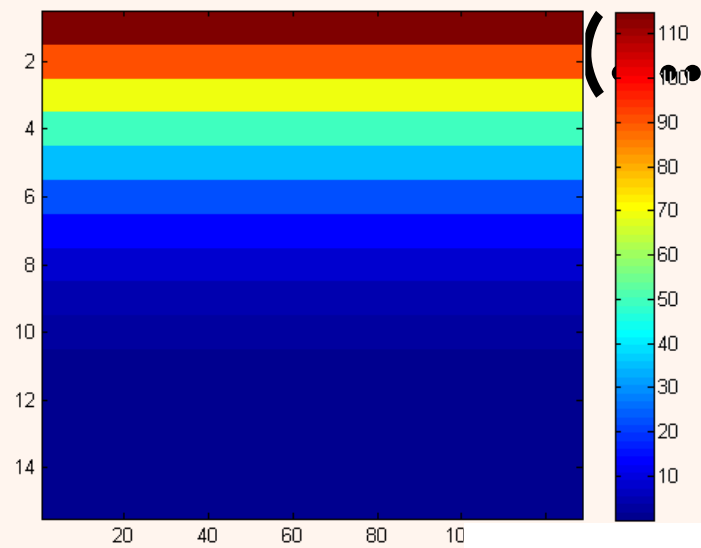
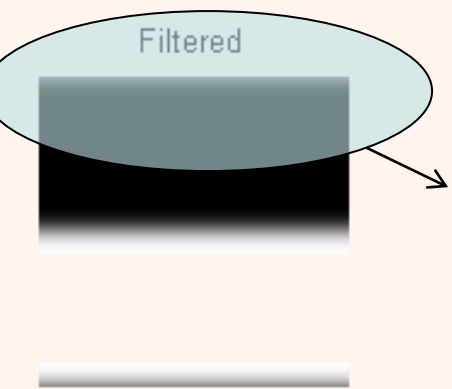
LPF



centered LPF

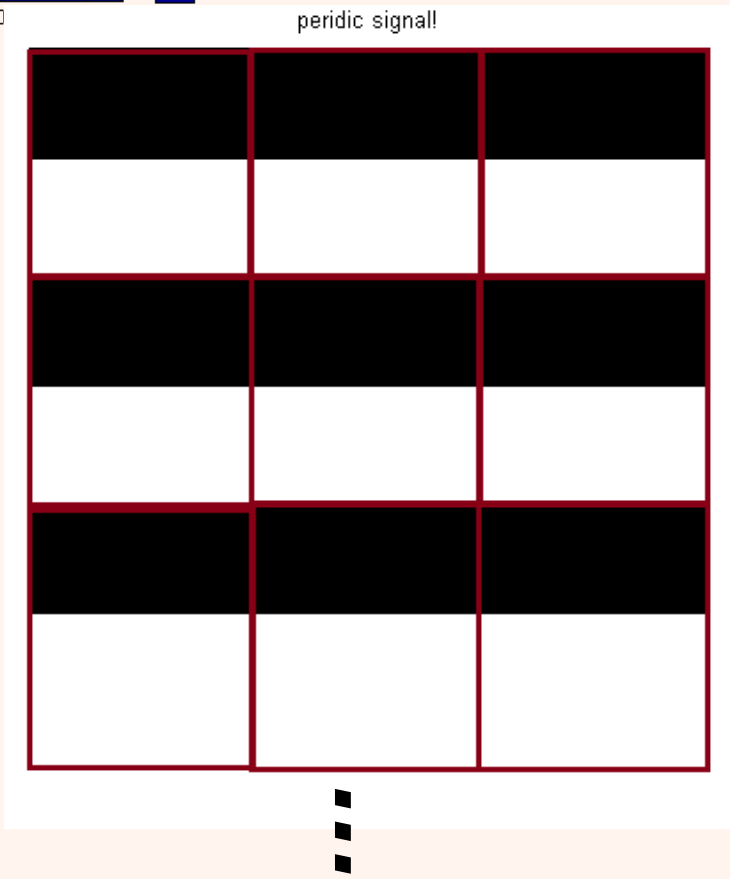


مثال (ادامه)



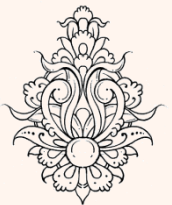
periodic signal!

...



کانولوشن دایروی

- همانند سیگنال یک بعدی، رابطی کانولوشن دوبعدی به صورت قطعی است و به طور کلی خواص کانولوشن دوبعدی مشابه کانولوشن یک بعدی است.
- برای استفاده در روابط **DFT** از «کانولوشن دایروی» استفاده می‌شود.
- برای تساوی کانولوشن قطعی و دایروی لازم است در ابتدا اندازه‌ی دو ماتریس سیگنال اصلی و پاسخ ضربه، به اندازه‌ی حاصل کانولوشن قطعی گسترش یابد.
- این فرآیند با افزایش صفر صورت می‌گیرد.



کانولوشن دایروی با تناوب $(N+B-1) \times (M+A-1)$ معادل کانولوشن قطعی است.

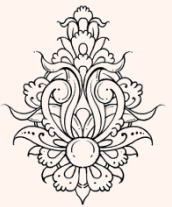
افزایش صفر

$$f_e(m, n) = \begin{cases} f(m, n) & 0 \leq m \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & M \leq m \leq M_1, \quad N \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

$$h_e(m, n) = \begin{cases} h(m, n) & 0 \leq m \leq A-1, \quad 0 \leq n \leq B-1 \\ 0 & A \leq m \leq M_1, \quad B \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

$$M_1 = M + A - 1, \quad N_1 = N + B - 1$$

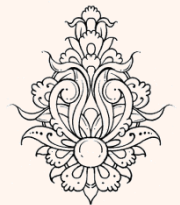
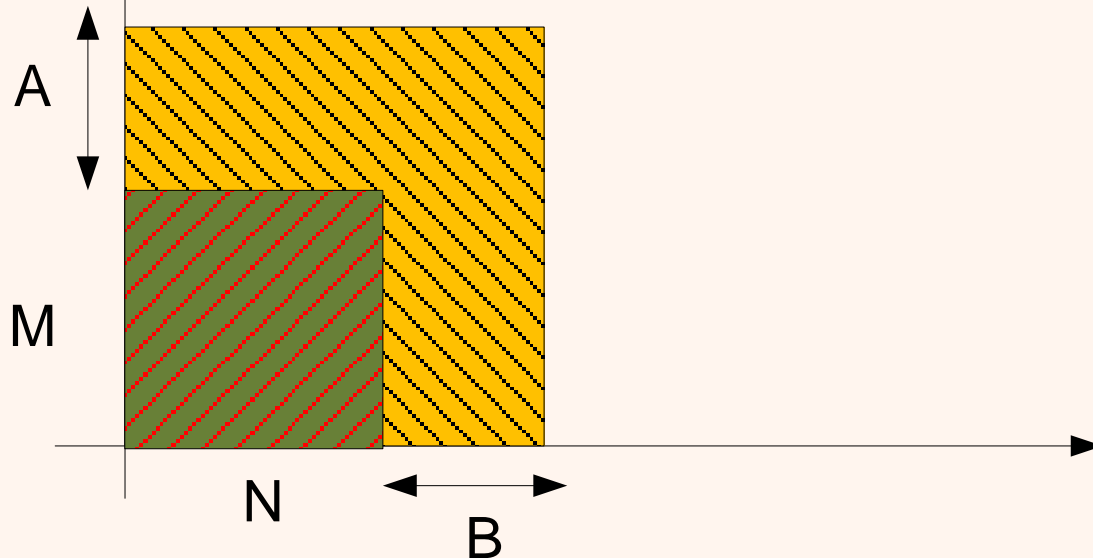
- فرضیه‌ی متناوب بودن f و h اعمال می‌شود، و کانولوشن متناوب محاسبه شده، یک دوره از آن در نظر گرفته می‌شود.



افزایش صفر (ادامه...)

$$f_e(m, n) = \begin{cases} f(m, n) & 0 \leq m \leq M-1, \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & M \leq m \leq M_1, \quad N \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

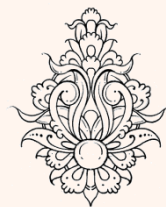
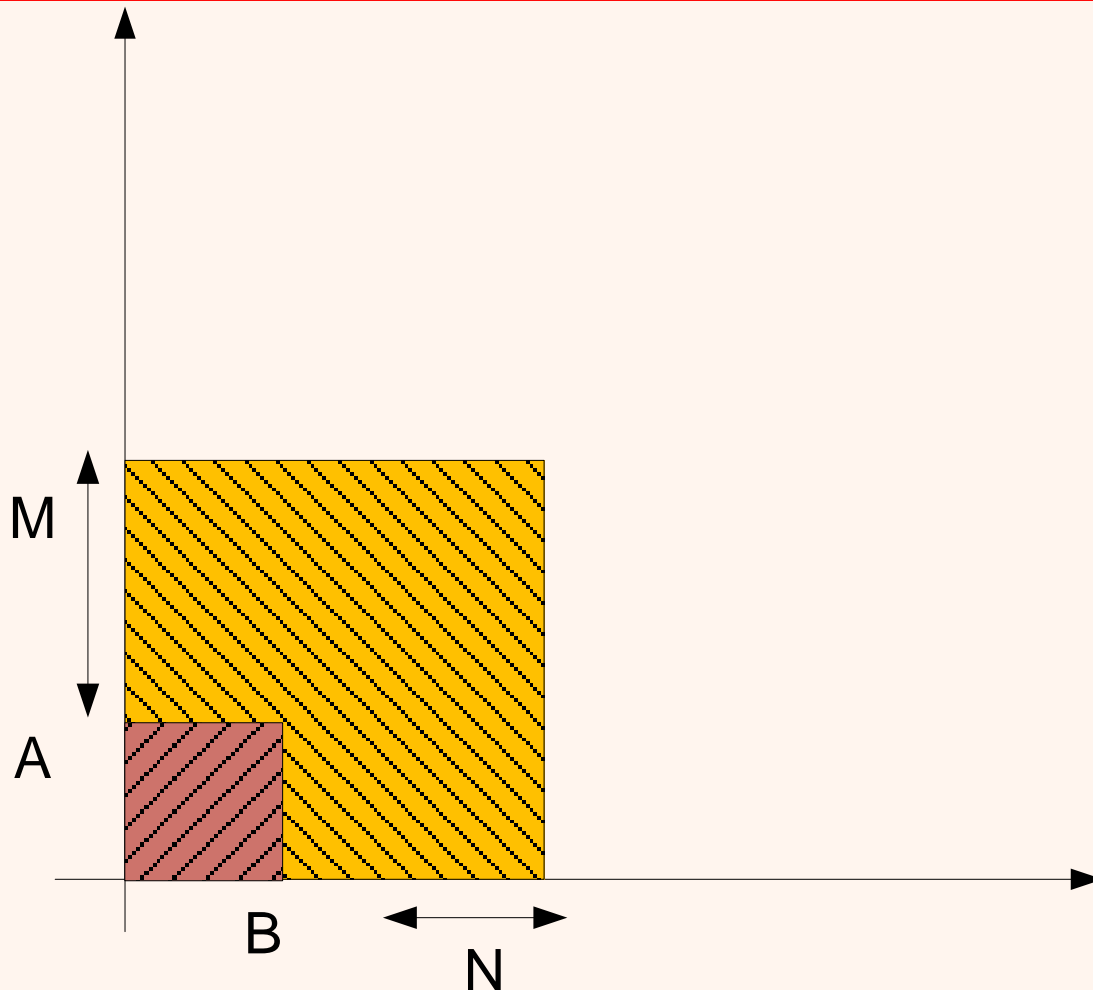
$$\begin{array}{l} f \quad M \times N \\ h \quad A \times B \end{array}$$



افزایش صفر (ادامه...)

$$h_e(m, n) = \begin{cases} h(m, n) & 0 \leq m \leq A - 1, \quad 0 \leq n \leq B - 1 \\ 0 & A \leq m \leq M_1, \quad B \leq n \leq N_1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} f \quad M \times N \\ h \quad A \times B \end{array}$$



محاسبه‌ی کانولوشن در حوزه‌ی فرکانس

$$f(m, n) * h(m, n) = \{f_e(m, n) \otimes h_e(m, n)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{N_1-1} f_e(k, l) h_e(m-k, n-l) \xleftrightarrow{DFT} F_e(u, v) \cdot H_e(u, v)$$

$$\text{if } X(\omega) = F\{x(n)\}, \quad H(\omega) = F\{h(n)\}$$

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)h(n-i) = x(n) * h(n)$$

$$F\{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \right] e^{-j\omega n} \quad n-k = m$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(m) \right] e^{-j\omega(m+k)} = X(\omega)H(\omega)$$

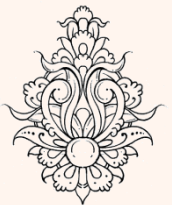
فضای دوبعدی

$$f(m, n) * h(m, n) = \{f_e(m, n) \otimes h_e(m, n)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{M_1-1} \sum_{l=0}^{N_1-1} f_e(k, l) h_e(m-k, n-l) \xleftrightarrow{DFT} F_e(u, v) \cdot H_e(u, v)$$

$$f_e(m, n) * h_e(m, n) \xleftrightarrow{DFT} F_e(u, v) \cdot H_e(u, v)$$

$$f_e(m, n) \cdot h_e(m, n) \xleftrightarrow{DFT} \{F_e(u, v) * H_e(u, v)\}$$



کانولوشن در موزه‌ی زمان مکان معادل ضرب در موزه‌ی فرکانس خواهد بود

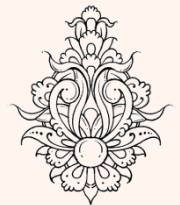
ضرب در موزه‌ی زمان مکان معادل کانولوشن در موزه‌ی فرکانس است

```
f=zeros(128,128);  
f(64:end,:)=255;  
PQ=paddedsize(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=5;  
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),2*sig);  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
figure,imshow(g,[ ]),title('Filtered');
```

Full Padded result

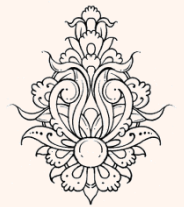
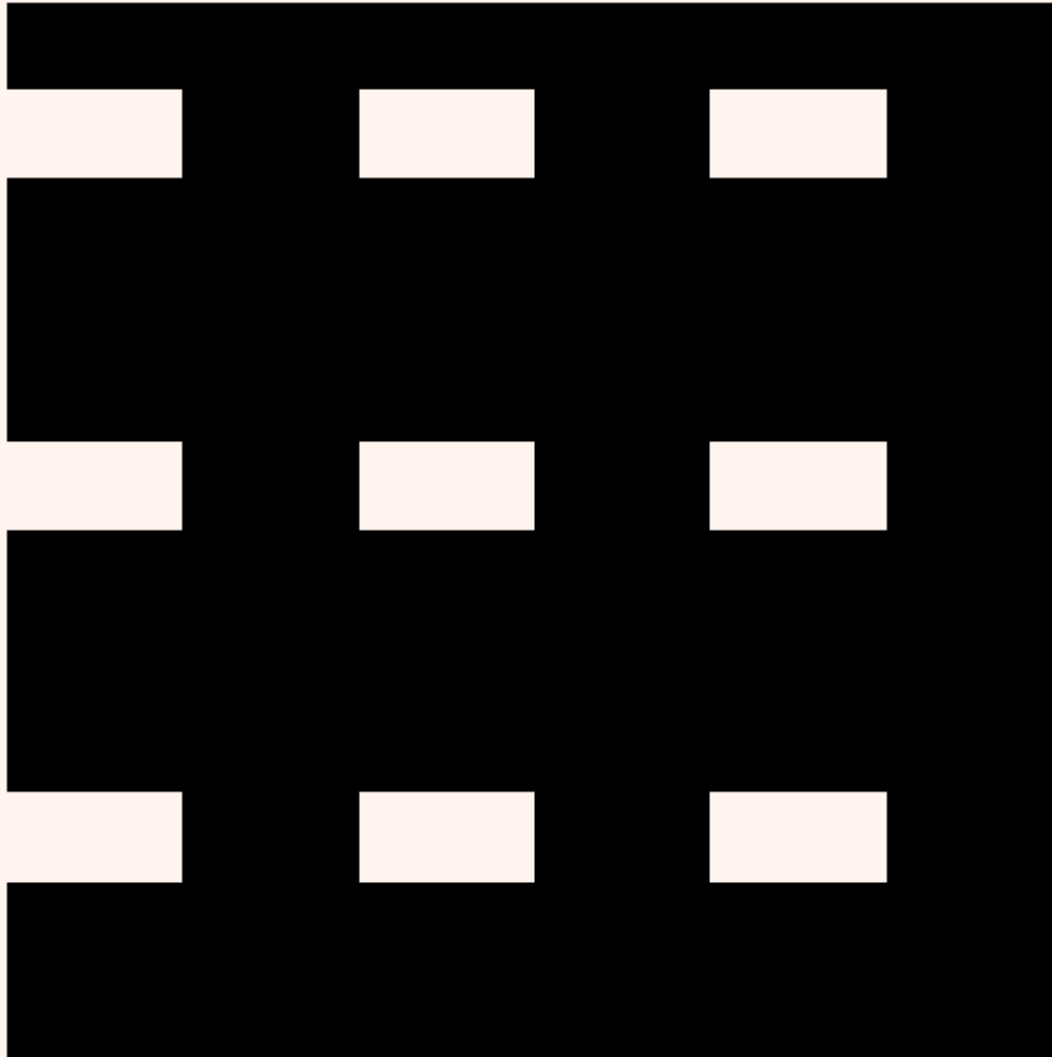


Filtered



مثال (ادامه...)

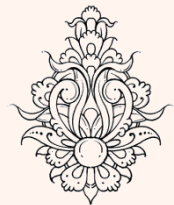
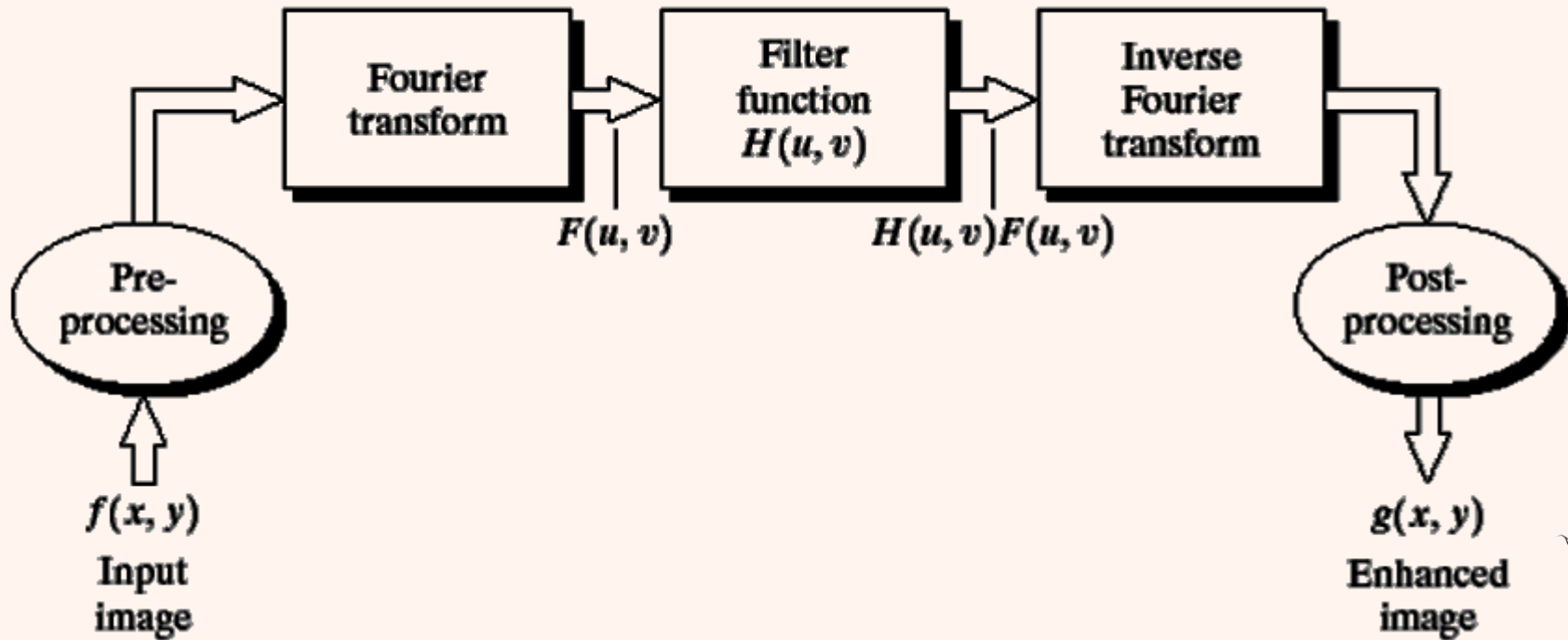
periodic signal!



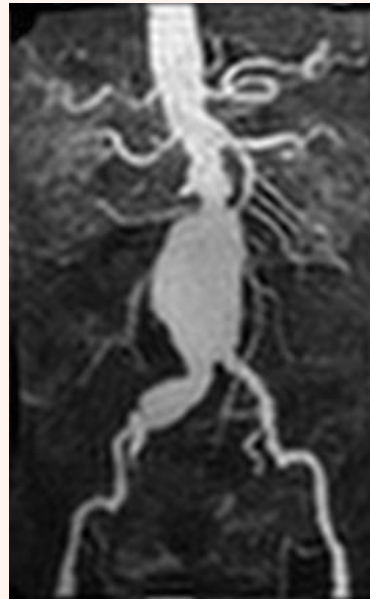
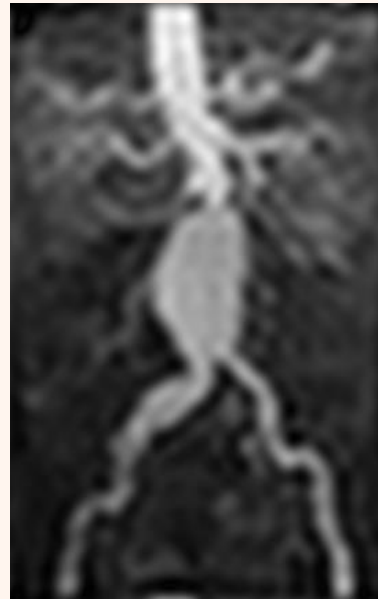
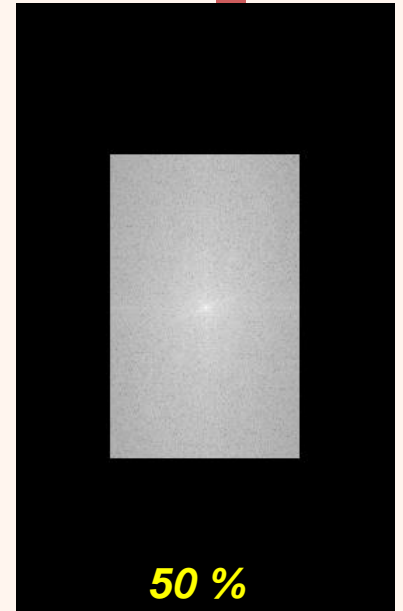
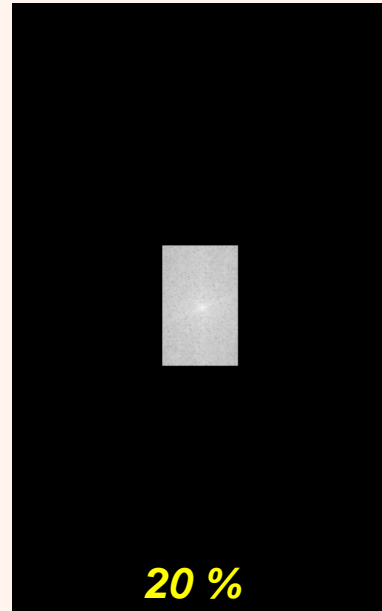
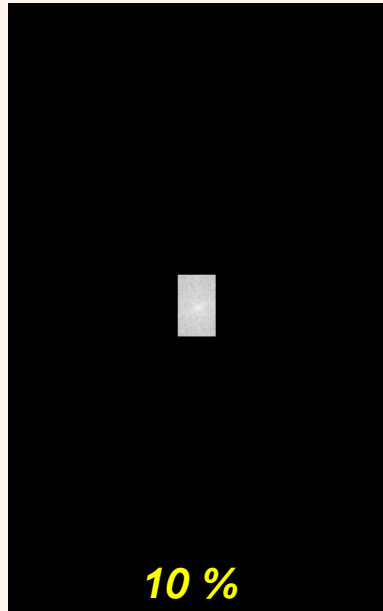
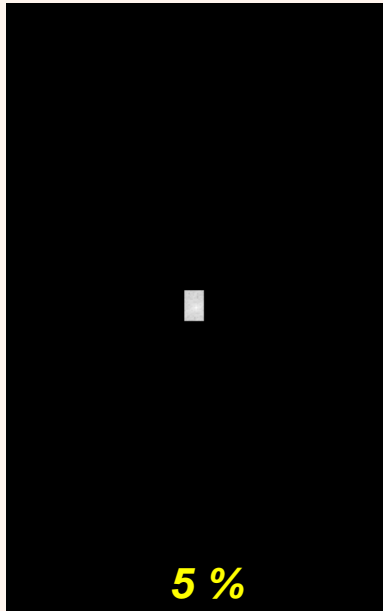
اعمال فیلتر در دامنه فرکانس

Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

Frequency domain filtering operation

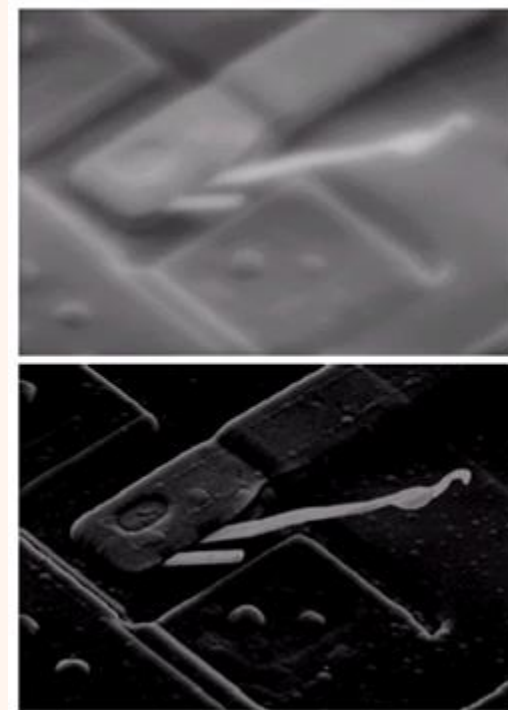
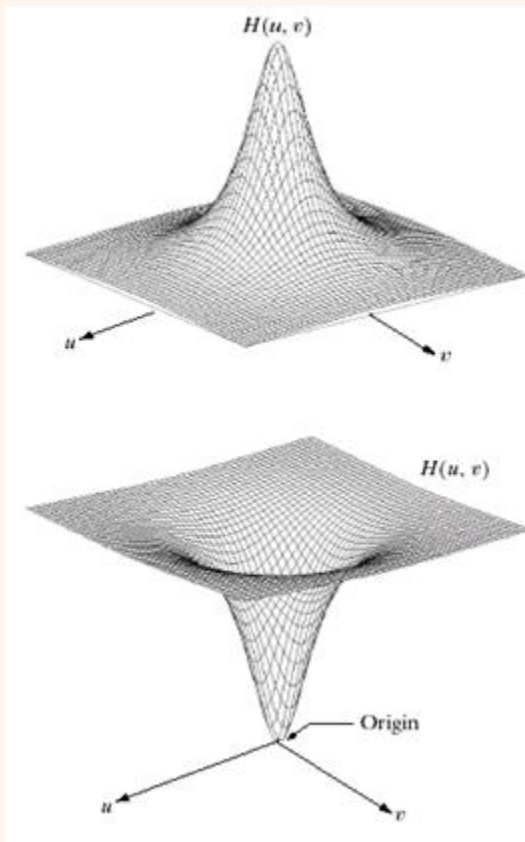
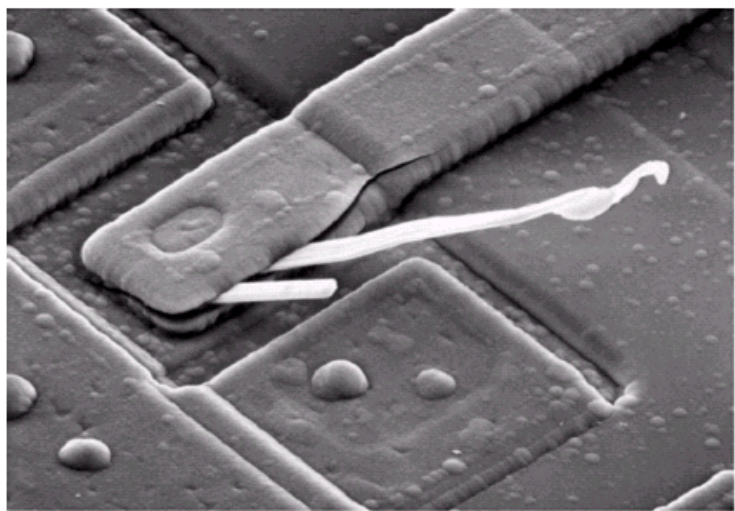


در مواردی که پنجره‌ی مورد نظر بزرگ است اعمال فیلتر در دامنه فرکانس به لحاظ مناسبات از کارایی بیشتری برخوردار است.



Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

Low Pass Filter



High Pass Filter

بهشتی

مراحل اعمال فیلتر در دامنه‌ی فرکانس

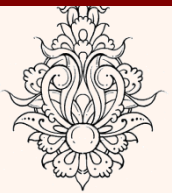
تعداد صفرهای بهینه برای اضافه کردن را با توجه به اندازه‌ی تصویر به دست آورید.

تبدیل فوری را برای تصویر با توجه به اندازه‌ی جدید به دست آورید.

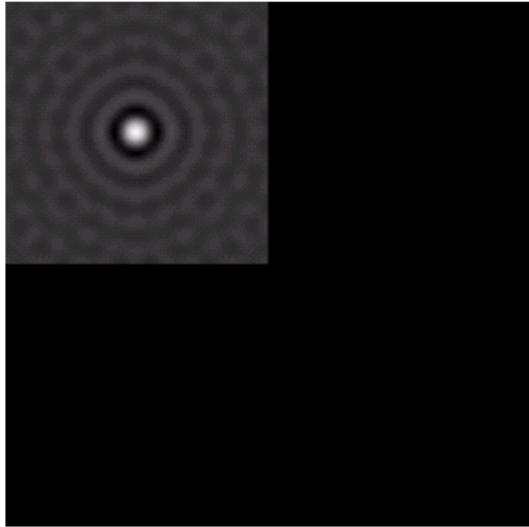
فیلتر مورد نظر را برای اندازه‌ی جدید به دست آورید. (اندازه‌ی فیلتر و تصویر اصلی باید یکسان باشد)

تصویر و فیلتر را در هم ضرب نمایید.

از نتیجه‌ی به دست آمده تبدیل معکوس فوری گرفته برای اندازه‌ی تصویر اصلی آنرا برش دهید.



مثال



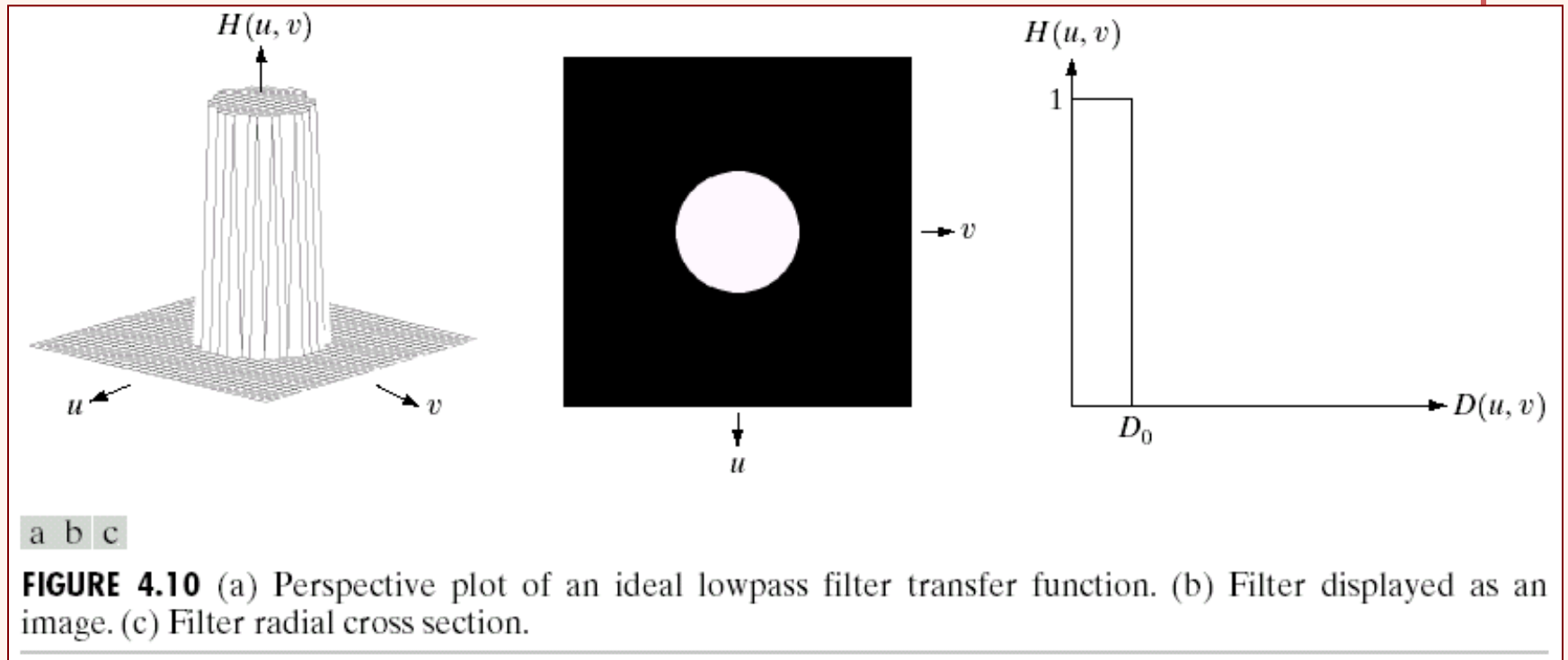
Padded Lowpass Filter in the Spatial domain



Result of filtering with padding



فیلتر ایده آل



اعمال فیلتر ایده آل

Ideal filter

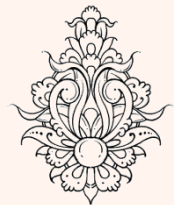
```
f = imread('cameraman.tif');  
PQ=paddedsz(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('ideal',PQ(1),PQ(2),sig);  
imshow(fftshift(H),[ ]);  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
figure;  
imshow(g,[ ]);
```

Filtered



Org

Ideal Filter



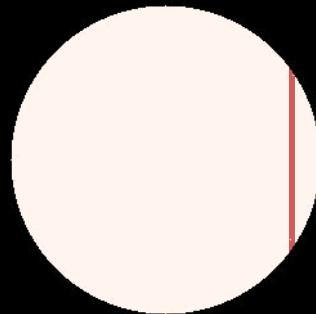
Sig=10



Sig=20

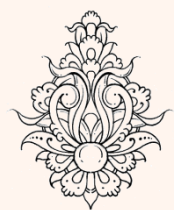


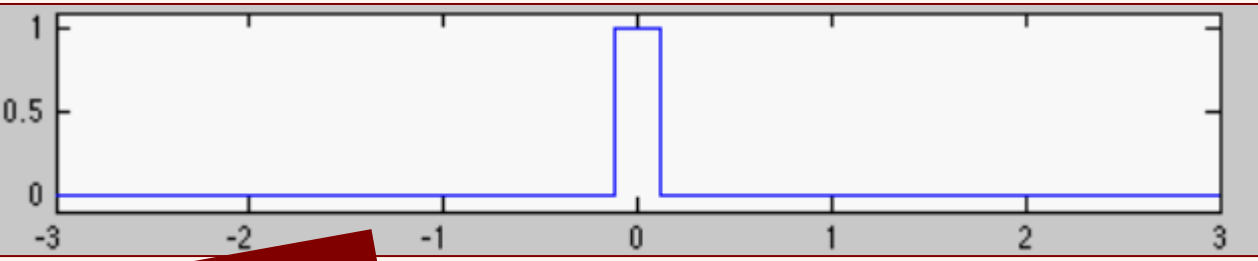
Sig=120



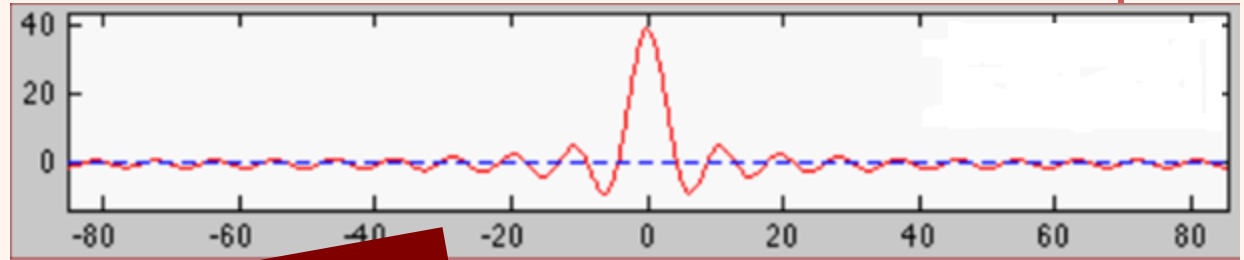


**Ringing
Artifact**

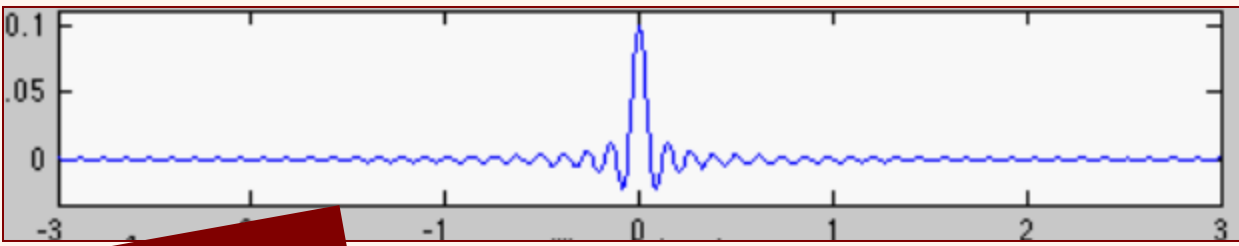




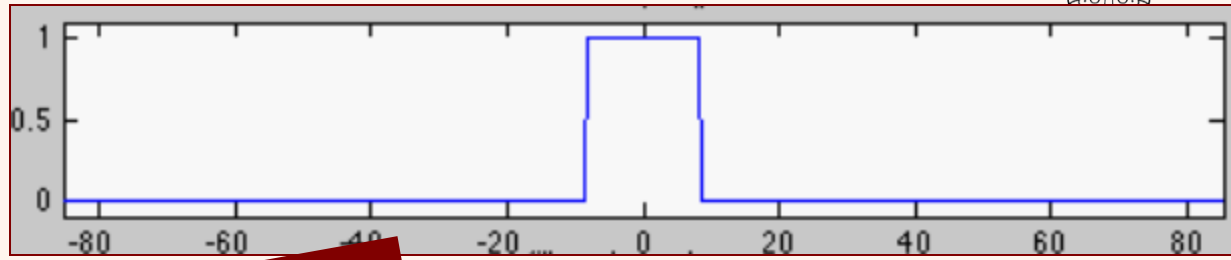
Spatial



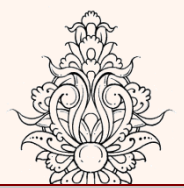
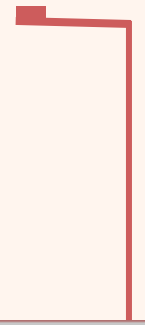
Frequency

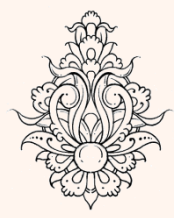
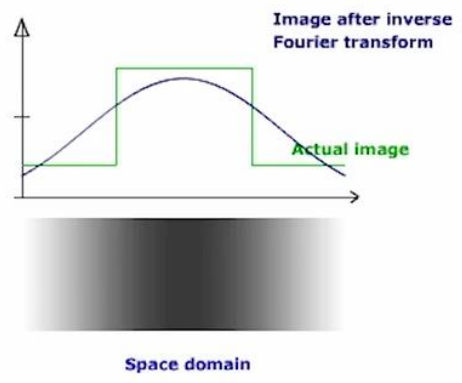
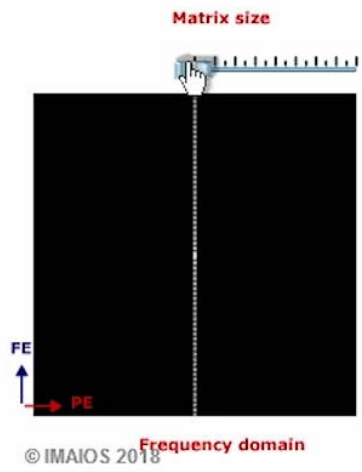


Spatial



Frequency





فیلتر پایین‌گذر گاوسی

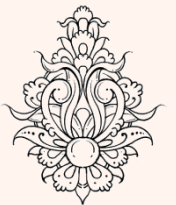
- ساختار فیلتر مذکور مانند زیر است:

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2\sigma^2}$$

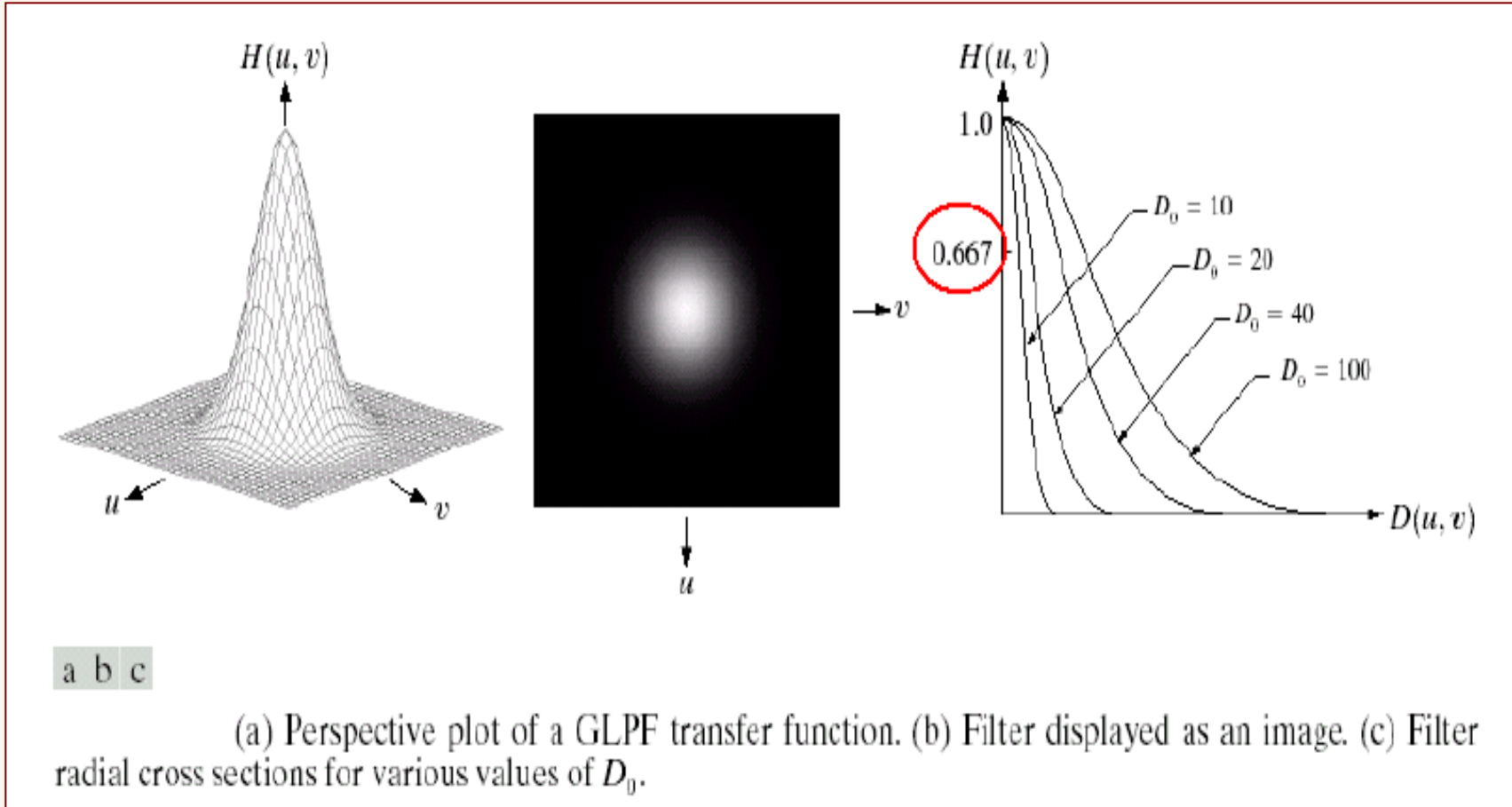
$D(u, v)$ بیان‌گر فاصله از مرکز است.

- اگر $\sigma = D_0$

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v)/2D_0^2}$$



فیلتر پایین‌گذر گاوسی



تاشکانه
سپهر
بهشتی

```
f = imread('cameraman.tif');  
imshow(f, [ ]);  
PQ=paddedsized(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),sig);  
figure;  
imshow(fftshift(H), [ ]);  
G=H.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
figure;  
imshow(g, [ ]);
```

Filtered



Org

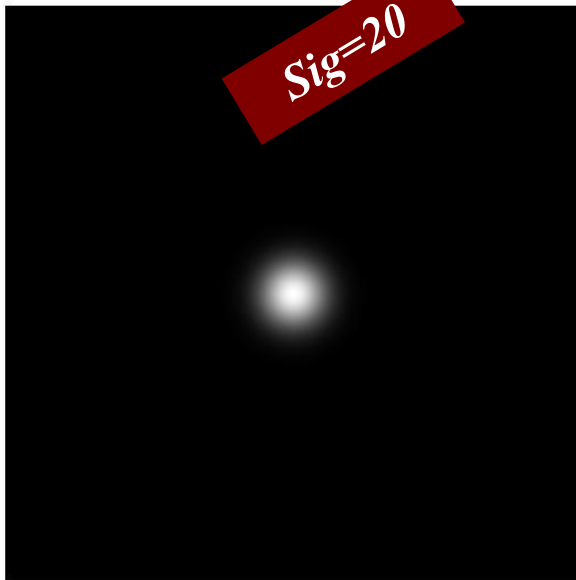
Gaussian Filter



Sig=10



Sig=20



Sig=120



fax transmissions

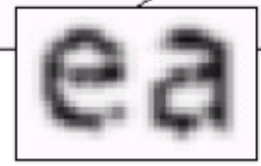
a b

(a) Sample text of poor resolution (note broken characters in magnified view).
(b) Result of filtering with a GLPF (broken character segments were joined).

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.



فشارده سازی

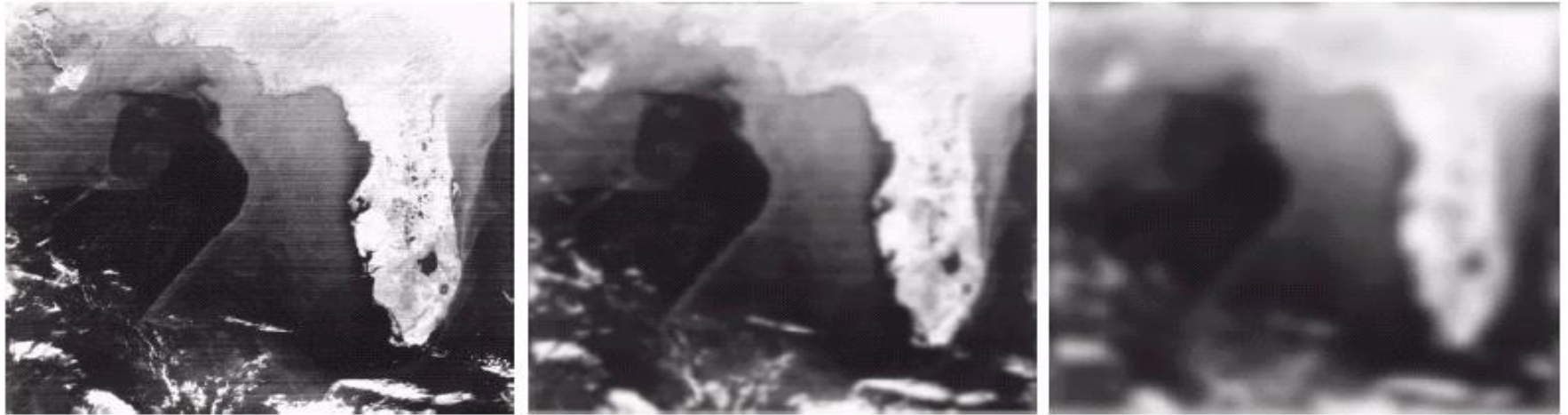
از جزئیات ریز صرفنظر می‌شود



a b c

(a) Original image (1028×732 pixels). (b) Result of filtering with a GLPF with $D_0 = 100$. (c) Result of filtering with a GLPF with $D_0 = 80$. Note reduction in skin fine lines in the magnified sections of (b) and (c).

• کاهش خطوط ناشی از اسکن نمودن



a b c

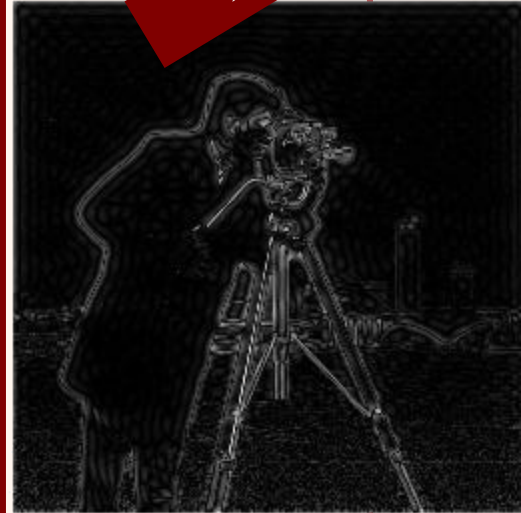
(a) Image showing prominent scan lines. (b) Result of using a GLPF with $D_0 = 30$. (c) Result of using a GLPF with $D_0 = 10$. (Original image courtesy of NOAA.)

High Pass Filter

```
f = imread('cameraman.tif');  
imshow(f, []);  
PQ=paddedsize(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('ideal',PQ(1),PQ(2),sig);  
Hh=1-H;  
figure;  
imshow(fftshift(Hh), []);  
G=Hh.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
Figure;imshow(g, []);  
Figure;imshow(abs(g), []);
```

فیلتر بالا

Filtered



Org

Ideal High
pass

Filtered



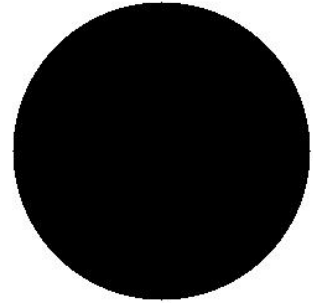
Sig=10



Sig=20



Sig=120



High Pass Filter

```
f = imread('cameraman.tif');  
imshow(f, []);  
PQ=paddedsized(size(f));  
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));  
sig=50;  
H=lpfilter('gaussian',PQ(1),PQ(2),sig);  
Hh=1-H;  
figure;  
imshow(fftshift(Hh), []);  
G=Hh.*F;  
g=real(ifft2(G));  
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));  
Figure;imshow(g, []);  
Figure;imshow(abs(g), []);
```



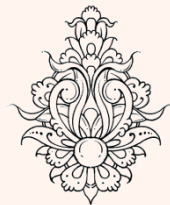
Org

Gaussian High
pass

فیلتر بالا



Filtered

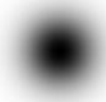


Filtered

Sig=10



Sig=20



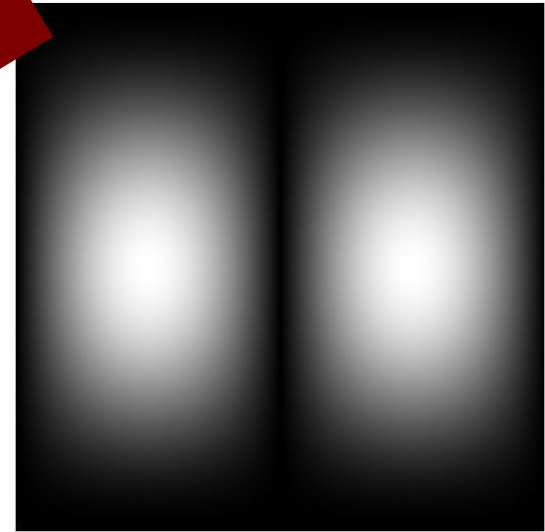
Sig=120



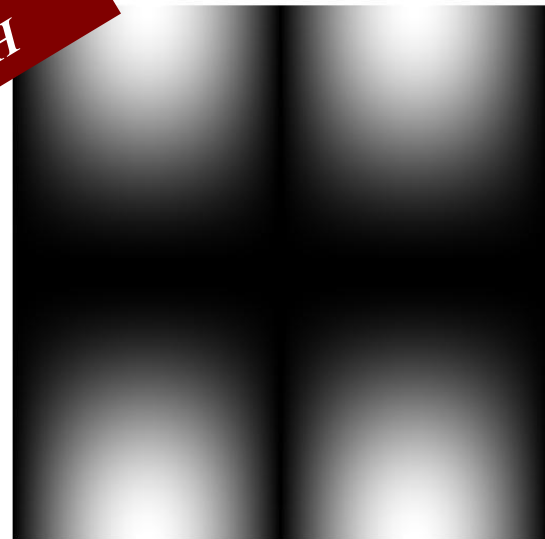
به دست آوردن معادل فیلتر

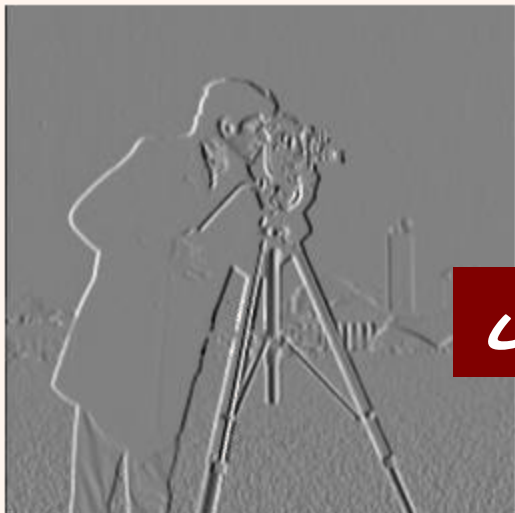
```
clear all,clc;
f = imread('cameraman.tif');
imshow(f,[ ]);
h=fspecial('sobel');
PQ=paddedsized(size(f));
F=fft2(f,PQ(1),PQ(2));
H1=freqz2(h,PQ(1),PQ(2));
H=fftshift(H1);
figure;imshow(abs(H1),[ ]);
figure;imshow(abs(H),[ ]);
G=H.*F;
g=real(ifft2(G));
g=g(1:size(f,1),1:size(f,2));
figure;imshow(g,[ ]);
figure;imshow(abs(g),[ ]);
gs=imfilter(double(f),h);
figure;imshow(gs,[ ]);
figure;imshow(abs(gs),[ ]);
d=abs(gs-g);
max(d(:))
```

H1



H





دامنه‌ی فرکانس



دامنه‌ی زمان-مکان

