

مقدمات ریاضی (۱)

فشرده‌سازی اطلاعات

۰۱-۰۰۲-۱۰-۱۴۰

مروری بر  
فضای تبدیل (خطی)

بخش پنجم

قسمت اول



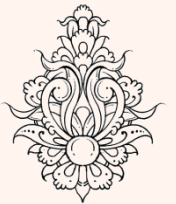
دانشگاه شهید بهشتی  
پژوهشکده‌ی فضای مجازی

بهار ۱۴۰۲

احمد محمودی ازناوه

# فهرست مطالب

- پردازش تصویر در فضای تبدیل (فرکانسی)
- تبدیل‌های خطی
  - مرور برخی مفاهیم پایه
  - تبدیل‌های یک‌بعدی
  - بردارهای پایه
  - بردارهای متعامد یک‌
  - تبدیل‌های یکانی
- تبدیل‌های دوبعدی
  - تبدیل‌های جدایی‌پذیر
  - تصاویر پایه



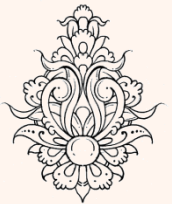
# چرا تبدیل؟

- سیگنال اصلی در حوزه‌ی زمانی-مکانی دارای همبستگی بین نمونه‌ها (پیکسل‌ها) می‌باشد.
- برای محاسبه و پردازش نیاز به روابطی چون کانولوشن است که پیچیدگی بالایی دارد.
- هدف از تبدیل

– از میان بردن همبستگی میان نمونه‌ها

– تبدیل روابطی چون کانولوشن به ضرب در حوزه‌ی تبدیل

– استفاده از داده‌ی تبدیل یافته در سنجش برخی کمیت‌ها



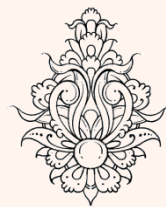
# فضای برداری

- یک فضای برداری شامل مجموعه‌ای بردار «مستقل خطی» است.
- بردارهای فضای مذکور توسط «ترکیب خطی» از آن مجموعه قابل ساخت است.
- مثال:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بردارهای یکه

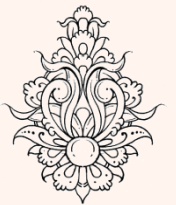
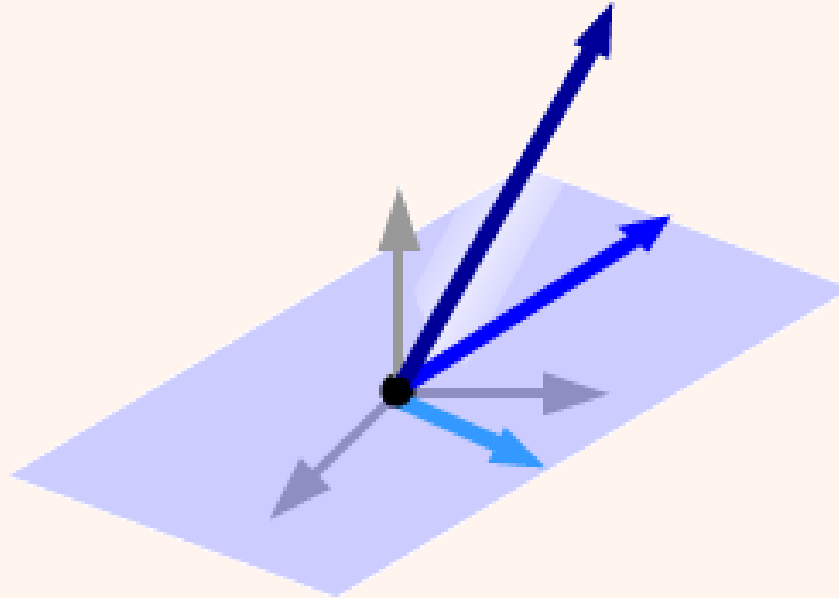
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



# استقلال خطی

- اگر  $v_i$  بردارهای یک فضا در نظر گرفته شوند، در صورتی که «مستقل خطی» باشند، خواهیم داشت:

$$\sum_i a_i v_i = 0, \quad \text{iff} \quad a_i = 0, \quad \forall i$$



# نکات

- اگر  $v_i$ ها «**بردارهای پایه**» باشند، هر برداری مانند  $v$  از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\forall v \neq 0, \sum_i b_i v_i = v, \exists b_i \neq 0$$

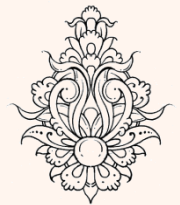
- اگر بردارهای پایه **متعامد** باشد، فضای برداری را متعامد گویند:

**orthogonal**

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ \|v_i\|^2 & \text{for } i = j \end{cases}$$

اگر اندازه‌ی بردارها به مقدار یک نرمالیزه گردد، یک فضای متعامد نرمال ایجاد می‌شود.

**orthonormal**



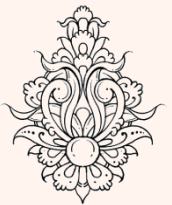
# تبدیل در فضای یک‌بعدی

برای سادگی بیشتر، نخست به بررسی تبدیلهای در فضای یک‌بعدی خواهیم پرداخت:

$$x(n) \rightarrow X(K)$$
$$0 \leq n \leq N-1 \quad 0 \leq K \leq N-1$$

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K, n) x(n)$$

$$0 \leq K \leq N-1$$



# تبدیل در فضای یک بعدی (ادامه...)

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K, n)x(n) \quad 0 \leq K \leq N-1$$

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdot & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{1,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$X_{N \times 1} = A_{N \times N} x_{N \times 1}$$





# تبدیل معکوس

• اگر داشته باشیم:

$$X = Ax$$

- می‌توان ماتریس  $B$  را به گونه‌ای در نظر گرفت که بتوان بردار  $x$  را از  $X$  تخمین زد:

$$\tilde{x} = B.X$$

$$\tilde{x}(n) = \sum_{K=0}^{N-1} b(n, K) X(K) \quad 0 \leq n \leq N-1$$

- چنانچه ماتریس  $A$  وارون‌پذیر باشد،  $B=A^{-1}$  می‌توان با تبدیل وارون به مقدار اصلی  $x$  دست یافت.



# ویژگی‌های ماتریس تبدیل

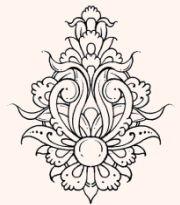
- اگر  $A$  ماتریسی مختلط باشد، مزدوج-ترانهادهی  $A$  را به صورت زیر نشان می‌دهند:
- مثال:

$$A^{*T}$$

- اگر  $A$  را به صورت زیر داشته باشیم مزدوج-ترانهادهی آن را محاسبه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 3 + 7i & 0 \\ 2i & 4 - i \end{bmatrix} \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} \overline{3 + 7i} & \bar{0} \\ \overline{2i} & \overline{4 - i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 7i & 0 \\ -2i & 4 + i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 - 7i & -2i \\ 0 & 4 + i \end{bmatrix}$$



# ویژگی‌های ماتریس تبدیل (ادامه...)

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K, n) x(n)$$

در ماتریس‌های متعامد، ترانزاده و معکوس یک ماتریس چه ارتباطی با هم دارند؟



$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdot & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{1,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$AA^T = ?$

$A$

توسعه  
بهبودی

# ویژگی‌های ماتریس تبدیل (ادامه...)

در ماتریس‌های متعامد، ترانزاده و معکوس یک ماتریس چه ارتباطی با هم دارند؟

$$A^T = A^{-1}$$

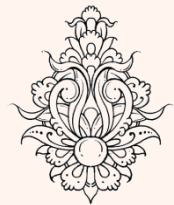
• ماتریس یکانی

• هنگامی که  $A^{*T}$  و معکوس یک ماتریس با هم برابر باشد یک «ماتریس یکانی» خواهیم داشت.

**Unitary**

$$A^{*T} = A^{-1}$$

$$A^{*T} \triangleq A^H$$



**Unitary and Hermitian**

# مثال

- نشان دهید ماتریس  $A$  یکانی است.

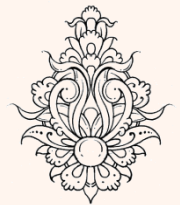
$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$A A^{*T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-i & 1+i \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = I_2$$

و ماتریس یکانی است.

$$A^{*T} = A^{-1}$$

• پس



# معکوس تبدیل یکانی

- اگر ماتریس  $A$  معکوس‌پذیر باشد، با در نظر گرفتن  $B=A^{-1}$  می‌توان به گونه‌ی یکتا به ماتریس  $B$  و تبدیل معکوس دست یافت.
- اگر ماتریس  $A$  ماتریسی یکانی باشد، در این حالت تبدیل به دست آمده یکانی است.
- روابط تبدیل و معکوس آن به صورت زیر است:

$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K, n) x(n)$$

$$x(n) = \sum_{K=0}^{N-1} b(n, K) X(K)$$

$$A^{*T} = A^{-1}$$

$$x(n) = \sum_{K=0}^{N-1} a^*(K, n) X(K)$$



$$X(K) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(K, n) x(n)$$

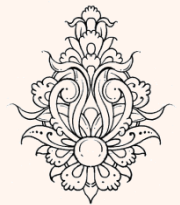
تبدیل

$$\begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdot & \alpha_{0,N-1} \\ \alpha_{1,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$x(n) = \sum_{K=0}^{N-1} b(n, K) X(K)$$

$$x(n) = \sum_{K=0}^{N-1} a^*(K, n) X(K)$$

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ x(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \alpha_{2,0} & \cdot & \alpha_{N-1,0} \\ \alpha_{0,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{0,2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{0,N-1} & \alpha_{1,N-1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \cdot \\ \cdot \\ X(N-1) \end{bmatrix}$$

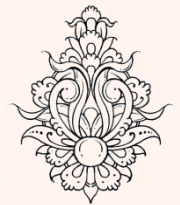


# خصوصیات تبدیل یکانی

- تمامی مقادیر ویژهی ماتریس  $A$  دارای اندازهی یک هستند.
- انرژی بردار اصلی و تبدیل یافته یکسان است.

$$\|X\|^2 = (A.x)^H . A.x = x^H . A^H . A.x = \|x\|^2$$

- مقادیر اصلی همبستگی بالا و مقادیر تبدیل یافته ناهمبسته اند.





# تبدیل دو بعدی

$$f(n_1, n_2) \xrightarrow{\quad\quad\quad} F(K_1, K_2)$$
$$0 \leq n_1, n_2 \leq N - 1 \quad 0 \leq K_1, K_2 \leq N - 1$$

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{f_{K_1, K_2}}(n_1, n_2)$$

$$0 \leq K_1, K_2 \leq N - 1$$

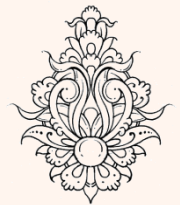


# تبدیل معکوس

$$f(n_1, n_2) = \sum_{K_1=0}^{N-1} \sum_{K_2=0}^{N-1} F(K_1, K_2) t_{b_{n_1, n_2}}(K_1, K_2)$$

$$0 \leq n_1, n_2 \leq N - 1$$

$t_f$  و  $t_b$  نشان‌دهنده‌ی تبدیل رو به جلو و رو به عقب هستند، که به تمامی ضرایب  $K_1, K_2, n_1, n_2$  وابسته‌اند.



# تبدیل جدایی‌پذیر

- اگر بتوان تبدیلی را به صورت زیر نوشت، آن را «جدایی‌پذیر» می‌گویند:

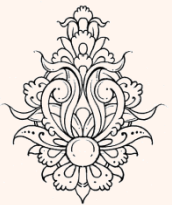
$$t_{f_{K_1, K_2}}(n_1, n_2) = t_{1f_{K_1}}(n_1) \cdot t_{2f_{K_2}}(n_2)$$

اگر دو بخش با هم برابر باشند، تبدیل را «متقارن» گویند.  
اگر تبدیلی جدایی‌پذیر و متقارن باشد، نمونه‌ی نمایش ماتریسی را به‌گونه‌ی زیر خواهیم داشت:

$$F = T_f \times f \times T_f^T$$

برای معکوس تبدیل (مقیقی) نیز خواهیم داشت:

$$f = T_b F T_b^T$$



# تبدیل جدایی‌پذیر متقارن

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{f_{K_1, K_2}}(n_1, n_2)$$

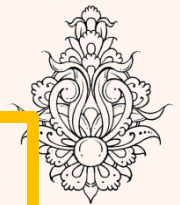
$$t_{f_{K_1, K_2}}(n_1, n_2) = t_{1f_{K_1}}(n_1) \cdot t_{2f_{K_2}}(n_2)$$

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{1f_{K_1}}(n_1) \cdot t_{2f_{K_2}}(n_2)$$

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} t_{1f_{K_1}}(n_1) \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) \cdot t_{2f_{K_2}}(n_2)$$

اعمال تبدیل روی ستون‌ها

اعمال تبدیل روی سطرها



# تبدیل جدایی‌پذیر

- اگر داشته باشیم:

$$F = T_f f T_f^T \quad T_f^{-1} = T_f^{*T}$$

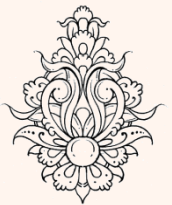
- تبدیل دو بعدی یکانی خواهیم داشت، در این حالت با صرف نظر کردن از اندیس‌های  $f$  و  $b$  داریم:

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$

$$0 \leq K_1, K_2 \leq N - 1$$

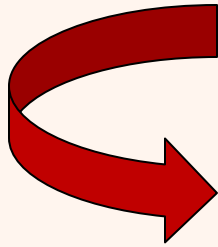
$$f(n_1, n_2) = \sum_{K_1=0}^{N-1} \sum_{K_2=0}^{N-1} F(K_1, K_2) t_{K_1, K_2}^*(n_1, n_2)$$

$$0 \leq n_1, n_2 \leq N - 1$$



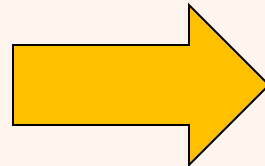
# تبدیل معکوس

$$F = T f T^T \quad T^{-1} = T^{*T}$$

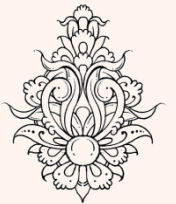


$$T^{*T} . F . T^{T^{*T}} = T^{*T} . T . f . T^T . T^{T^{*T}}$$
$$T^{*T} . F . T^* = f$$

$$F = T . f . T^T$$



$$f = T^{*T} . F . T^*$$

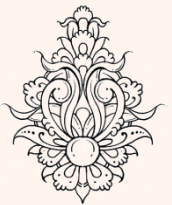


# انرژی در حوزه تبدیل

- مقدار انرژی در ماتریس اصلی و ماتریس انتقال یافته یکسان است.

$$\sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} \|f(n_1, n_2)\|^2 = \sum_{K_1=0}^{N-1} \sum_{K_2=0}^{N-1} \|F(K_1, K_2)\|^2$$

- توزیع انرژی در ماتریس نتیجه شده بسته به نوع انتقال می‌تواند متفاوت باشد.
- به بیانی دیگر تمرکز انرژی بسته به تبدیل در محدوده‌ی خاصی قرار می‌گیرد.



# تصاویر پایه

## Basis Images

2	-1
5	6

$$2 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + -1 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 5 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 6 \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

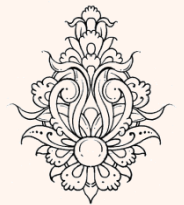
بردار یکه محور اول

بردار یکه محور دوم

بردار یکه محور سوم

بردار یکه محور چهارم

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$
$$0 \leq K_1, K_2 \leq N - 1$$



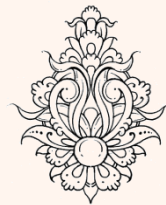


# تصاویر پایه (ادامه...)

$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} f(n_1, n_2) t_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$
$$0 \leq K_1, K_2 \leq N - 1$$

- اگر مقادیر  $K_1$  و  $K_2$  را ثابت در نظر بگیریم برای تمامی مقادیر  $n_1$  و  $n_2$  جمع صورت می‌پذیرد.

$$A_{n_1, n_2} = t_{K_1, K_2}(n_1, n_2)$$
$$= \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} (f(n_1, n_2) \cdot A_{n_1, n_2})$$



# تصاویر پایه (ادامه...)

- نتیجه‌ی به دست آمده همان ضرب داخلی دو ماتریس است که حاصلی اسکالر دارد.

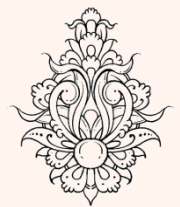
$$F(K_1, K_2) = \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} (f(n_1, n_2) \times A_{K_1, K_2}(n_1, n_2)) = \langle f, A_{K_1, K_2} \rangle$$

$$0 \leq K_1, K_2 \leq N-1$$

$$F = T \cdot f \cdot T^T$$

- ماتریس  $A$  به دست آمده نتیجه‌ی ضرب خارجی  $K_1$  امین ستون ماتریس  $T^T$  در ترانهاده‌ی  $K_2$  امین ستون  $T^T$  است:

$$A_{K_1, K_2} = \tau_{K_1(N \times 1)} \times \tau_{K_2(1 \times N)}^T$$



$$F = T \times f \times T^T$$

با مشخص بودن تصویر پایه می‌توان دید شهودی بهتری نسبت تبدیل مورد نظر داشت.

$$F_{k_1, k_2} = \tau_{K_1(1 \times N)}^T \times f_{(N \times N)} \times \tau_{K_2(N \times 1)}$$

$$F_{k_1, k_2} = \langle f, A_{k_1, k_2} \rangle$$

$$\begin{bmatrix}
 \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdot & \alpha_{0,N-1} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \alpha_{k_1,0} & \alpha_{k_1,1} & \alpha_{k_1,2} & \cdot & \alpha_{k_1,N-1} \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \alpha_{0,0} & \cdot & \alpha_{k_2,0} & \cdot & \alpha_{0,N-1} \\
 \alpha_{1,0} & \cdot & \alpha_{k_2,1} & \cdot & \cdot \\
 \alpha_{2,0} & \cdot & \alpha_{k_2,2} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \alpha_{N-1,0} & \cdot & \alpha_{k_2,N-1} & \cdot & \alpha_{N-1,N-1}
 \end{bmatrix}$$

سطر  $k_1$

$$\tau_{K_1(1 \times N)}^T$$

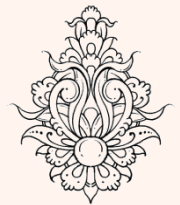
$T$

$f$

$T^T$

ستون  $k_2$

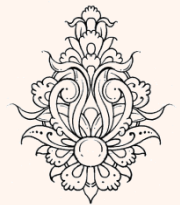
$$\tau_{K_2(N \times 1)}$$



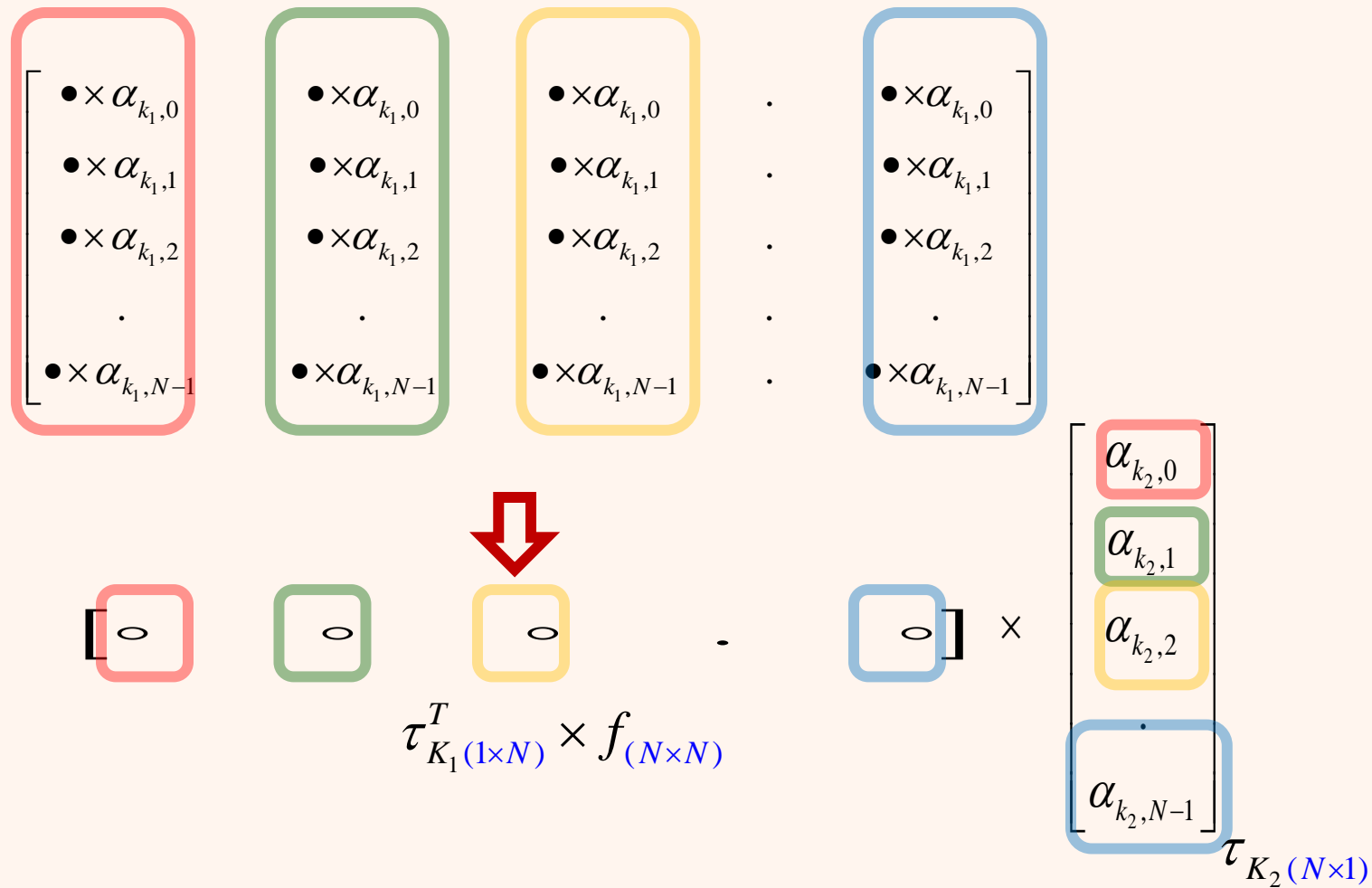
$$\tau_{K_1(1 \times N)}^T \times f_{(N \times N)}$$

$$\begin{array}{c}
 \tau_{K_1(1 \times N)}^T \\
 \left[ \begin{array}{cccc|cccc}
 \alpha_{0,0} & \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdot & \alpha_{0,N-1} & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \alpha_{k_1,0} & \alpha_{k_1,1} & \alpha_{k_1,2} & \cdot & \alpha_{k_1,N-1} & \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \alpha_{N-1,0} & \alpha_{N-1,1} & \cdot & \cdot & \alpha_{N-1,N-1} & \bullet & \bullet & \cdot & \cdot & \bullet
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{c} \tau_{K_1(1 \times N)}^T \\ \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \end{array} \right] \end{array}} \right]$$

$T$ 
 $f$



## Sum up of all elements of a each column



## Sum up of all elements



$F_{k_1, k_2} :$

**Sum up of all elements**

$$\begin{bmatrix} \bullet \times \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,0} & \bullet \times \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,1} & \bullet \times \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \bullet \times \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \bullet \times \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,0} & \bullet \times \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,1} & \bullet \times \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \bullet \times \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \bullet \times \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,0} & \bullet \times \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,1} & \bullet \times \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \bullet \times \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \bullet \times \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,0} & \bullet \times \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,1} & \bullet \times \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \bullet \times \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}$$

**Dot product**

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdot & \bullet \end{bmatrix}$$

$A_{k_1, k_2}$

$f$



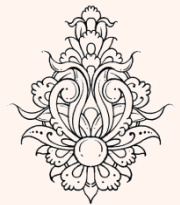
$F_{k_1, k_2} = \langle f, A_{k_1, k_2} \rangle$

$A_{k_1, k_2} :$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,0} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,1} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,2} \times \alpha_{k_2,N-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_1,N-1} \times \alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_{k_1,0} \\ \alpha_{k_1,1} \\ \alpha_{k_1,2} \\ \cdot \\ \alpha_{k_1,N-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_{k_2,0} & \alpha_{k_2,1} & \alpha_{k_2,2} & \cdot & \alpha_{k_2,N-1} \end{bmatrix}$$

$$A_{K_1, K_2} = \tau_{K_1} (N \times 1) \times \tau_{K_2}^T (1 \times N)$$



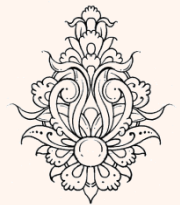
# مثال

$$F(0,0) = \langle f, A_{0,0} \rangle$$

$$F(5,6) = \langle f, A_{5,6} \rangle$$

هر عنصر از  $F$  را می‌توان با محاسبه‌ی ضرب داخلی ماتریس  $f$  در ماتریس متناظر  $A$  محاسبه نمود.

تصاویر پایه نامیده می‌شوند.  $A_{K_1, K_2}$





# مثال

- اگر  $f$  را تصویر اصلی و  $T$  را ماتریس انتقال در نظر بگیریم:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = T^H \quad f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F = T f T^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$



# تصاویر پایه

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = T^H \Rightarrow T^{*T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{0,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{0,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad -1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad 1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad -1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \langle f, A_{0,0} \rangle & \langle f, A_{0,1} \rangle \\ \langle f, A_{1,0} \rangle & \langle f, A_{1,1} \rangle \end{bmatrix}$$



# مثال

$$T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = T^H \quad f = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

• اگر  $f$  را تصویر اصلی و  $T$  را ماتریس انتقال در نظر بگیریم:

$$A_{0,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{0,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{1,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_{1,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

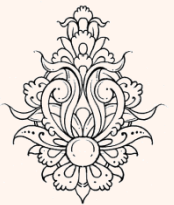
$$F_{0,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (1+2+3+4)/2 = 5$$

$$F_{0,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = (1+3-2-4)/2 = -1$$

$$F_{1,0} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = (1+2+-3-4)/2 = -2$$

$$F_{1,1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (1+4-2-3)/2 = 0$$

$$F = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$



دانشگاه  
تهران

- Fundamentals of digital image processing  
Book by Anil Kumar Jain

