mathematical morphology

ریخت‌شناسی

مورفولوژی

پردازش تصاویر دیجیتال
(بخش نهم)

دانشگاه شهید بهشتی
پاییز ۱۴۰۲
احمد محمودی ازناوه

http://faculties.sbu.ac.ir/~a_mahmoudi/

فهرست مطالب

- ریخت‌شناسی دودویی
- سایش
- گسترش
- باز کردن
- بستن
- HMT
- الگوریتم‌های پایه

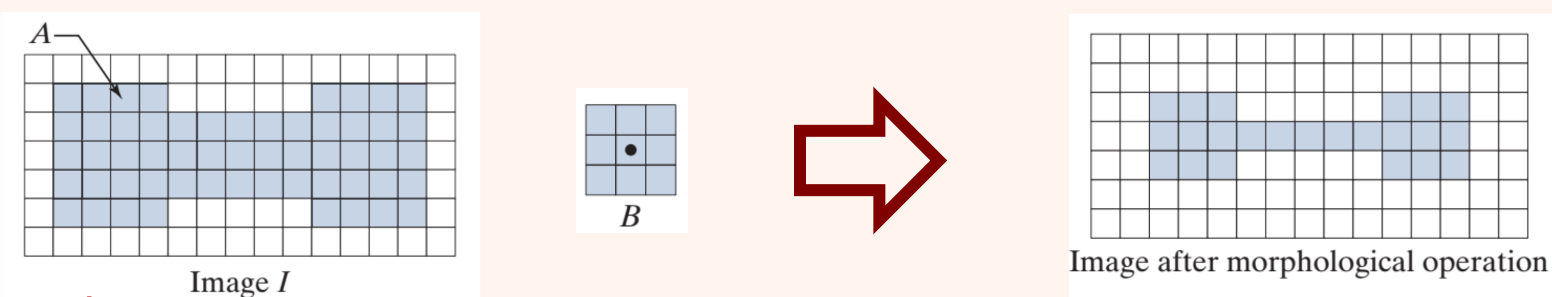
ریخت‌شناسی (تصاویر دودویی)

- ابزاری است که برای استخراج اجزای تصویر که برای بازنمایی و توصیف اشکال، نمایش اسکلت و به دست آوردن پوش محدب (convex hull) به کار می‌رود.
- ریخت‌شناسی از جمله ابزارهایی است که برای استخراج معنا از تصاویر به کار می‌رود.
- می‌توان گفت اساس ریخت‌شناسی بسیار شبیه اعمال فیلترهای زمانی- مکانی است.
- ریخت‌شناسی ارتباط نزدیکی با نظریه مجموعه‌ها دارد.
  - اشیای موجود در تصاویر، نقش مجموعه‌ها را دارند.
  - در تصاویر دودویی اعضای هر مجموعه دوتایی‌های مرتب ($\in \mathbb{Z}^2$) هستند که موقعیت پیکسل‌های پیش‌زمینه هستند.

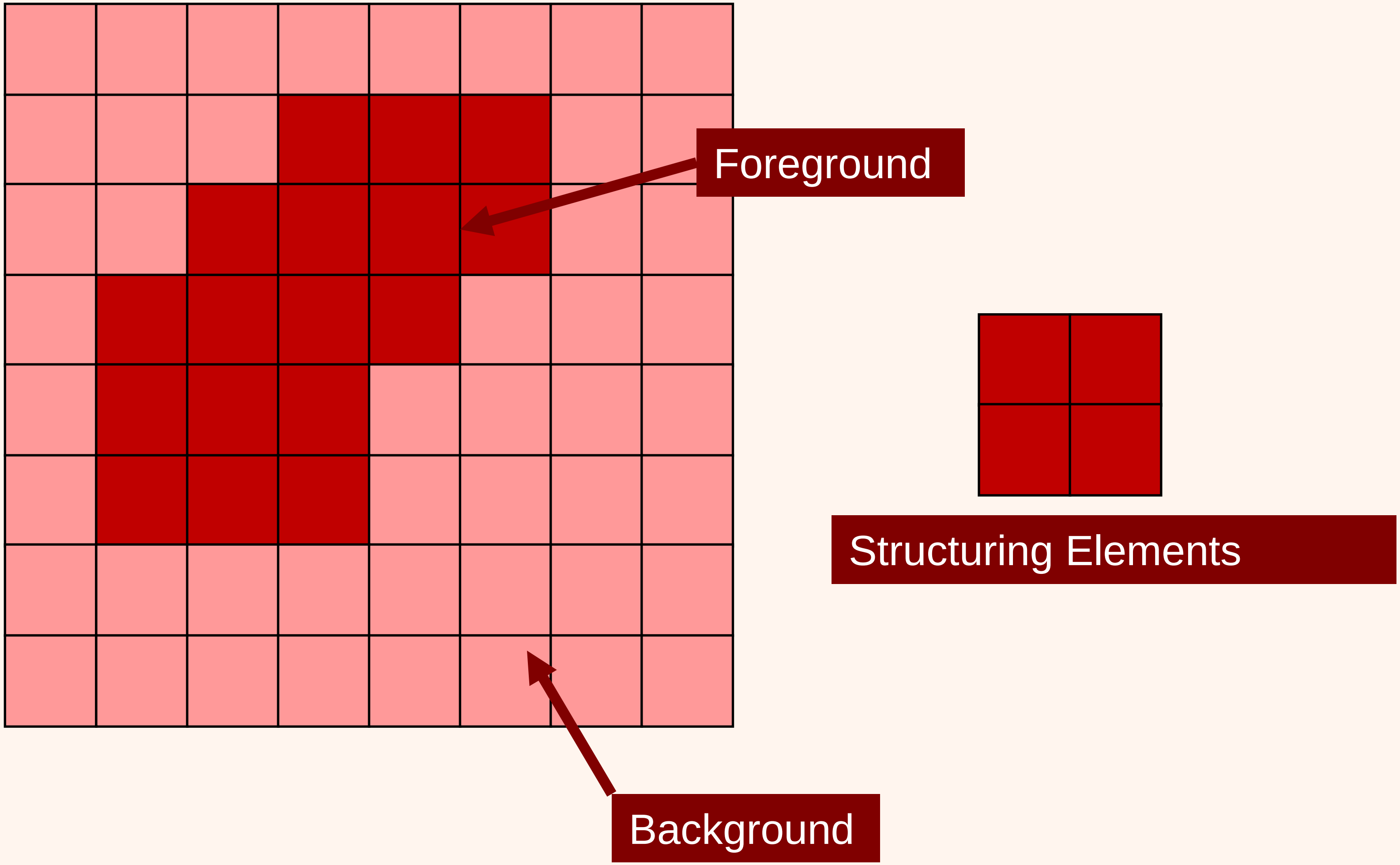
ریخت‌شناسی (ادامه...)

- عملگرهای مورفولوژی بر روی دو نوع مجموعه اعمال می‌شوند:
  - اشیا(شامل پیکسل‌های پیش‌زمینه) Objects
  - مولفه‌های ساختاری(شامل پیکسل‌ها پیش‌زمینه، پس‌زمینه و بی‌تفاوت(don’t care)) Structuring Elements

- ساختار مورد نظر تمامی پیکسل‌های تصویر را پویش می‌کند و در انتها مقدار به دست آمده براساس عملگر اعمال شده به دست می‌آید.



ریخت‌شناسی (ادامه...)



ریخت‌شناسی (ادامه...)

- مولفه‌ی ساختاری می‌تواند اشکال گوناگون و اندازه‌های مختلف داشته باشد:
  - معمولا ابعاد آن‌ها فرد است.

1	1	1
1	**1**	1
1	1	1

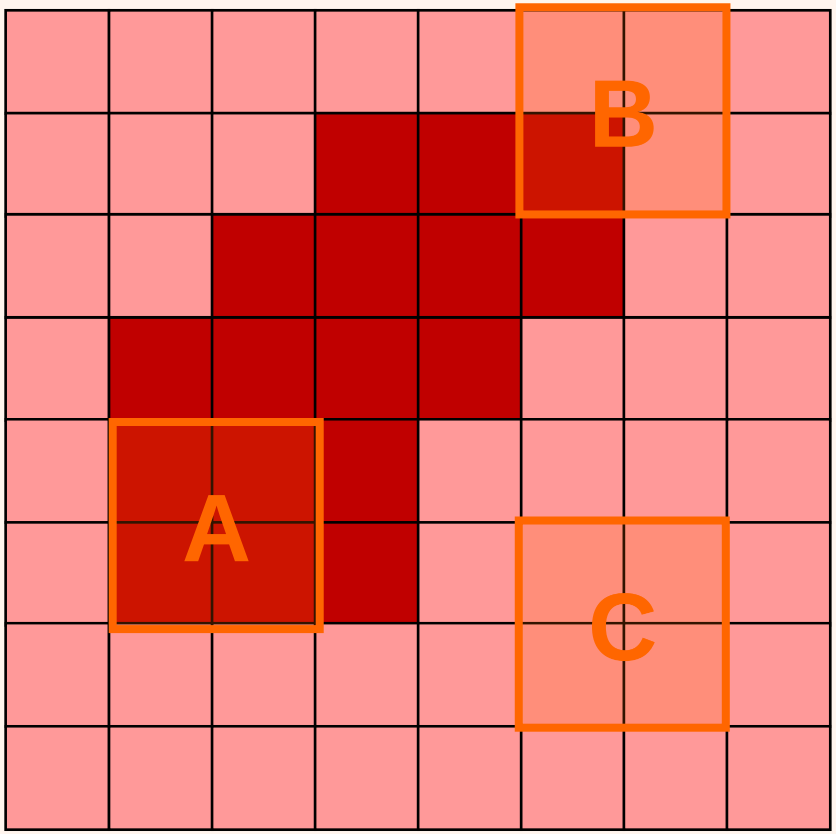
0	1	X
1	**1**	1
0	1	0

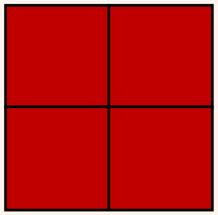
origin

0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
1	1	**1**	1	1
0	1	1	1	X
0	0	1	0	X

ریخت‌شناسی (ادامه...)

عملگرها بر اساس دو مفهوم اصابت (Hit) و گنجیدن(fit) تعریف می‌شوند:





Structuring Elements

B

اصابت(Hit):
یکی از پیکسل‌های مولفه‌ی ساختاری توسط پیکسل‌های پیش‌زمینه پوشش داده شوند.

A

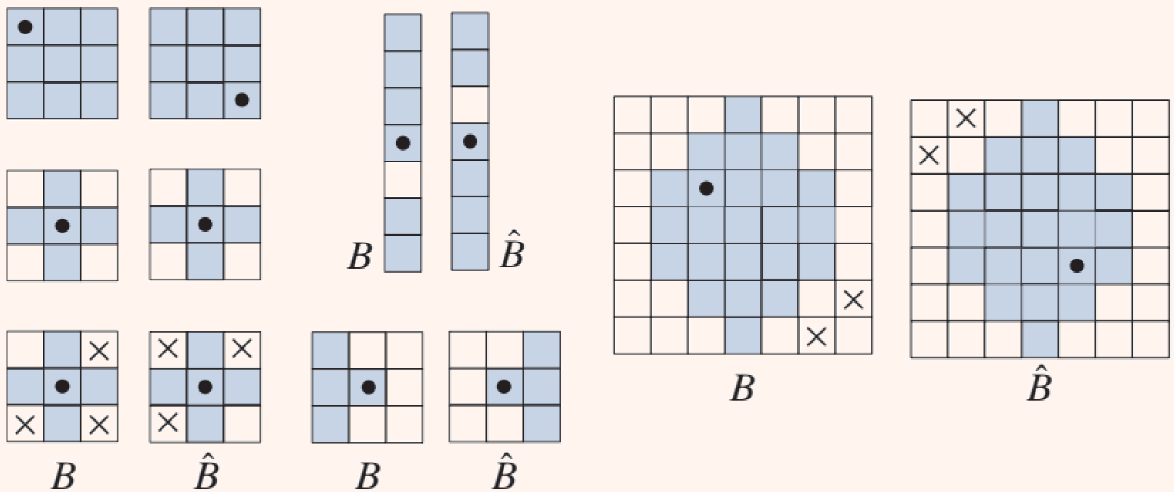
گنجیدن(Fit):
تمام پیکسل‌های مولفه‌ی ساختاری توسط پیکسل‌های پیش‌زمینه پوشش داده شوند.

عملگرها

انعکاس

The reflection of a set B, denoted B,

$$B = \{w \mid w = -b, \text{for } b \in B\}$$



انتقال

The translation of a set B by point $z = (z_1, z_2)$, denoted $(B)_Z$,

$$(B)_Z = \{c \mid c = b + z, \text{for } b \in B\}$$

عملگرها(ادامه...)

- به طور کلی دو عملگر گسترش(dilation) و سایش(erosion) به عنوان عملگرهای پایه در نظر گرفته می‌شوند.
- بسیاری از عملگرهایی که تعریف می‌شوند بر اساس این دو عملگر پایه هستند.

سایش

- شی در پیش‌زمینه را با A و مولفه‌ی ساختاری را B نشان می‌دهیم، در این حالت اگر g مجموعه به دست آمده پس از اعمال فرآیند مذکور باشد خواهیم داشت:

$$\boxed{\text{Erosion} \rightarrow \; A \ominus B}$$

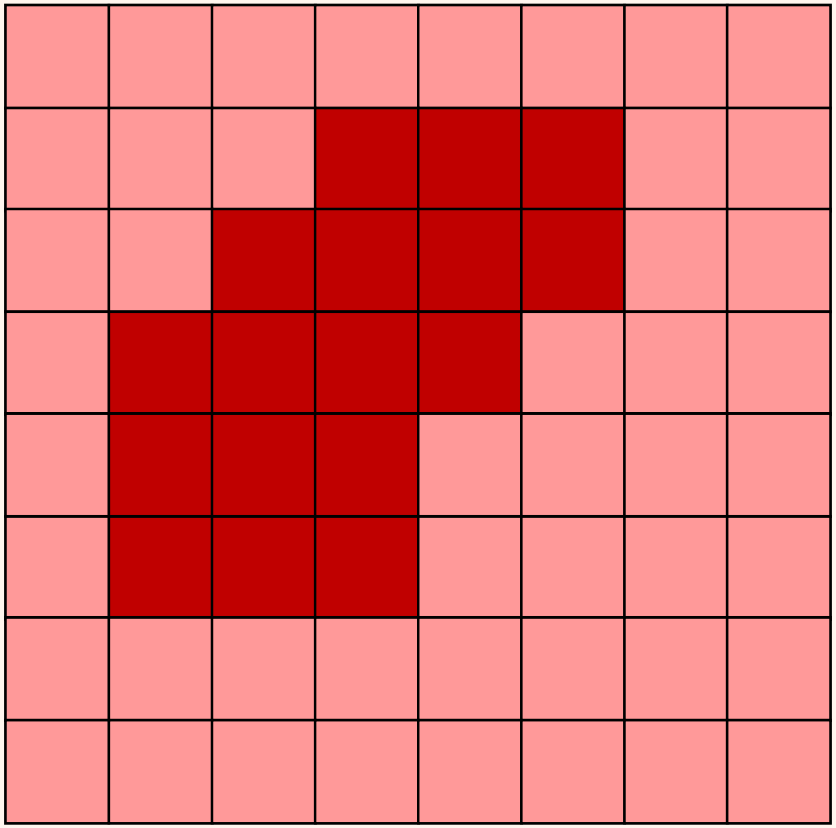
$$A \ominus B = \{z \mid (B)_Z \subseteq A\}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } (B)_{(x,y)} \text{ fits } A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

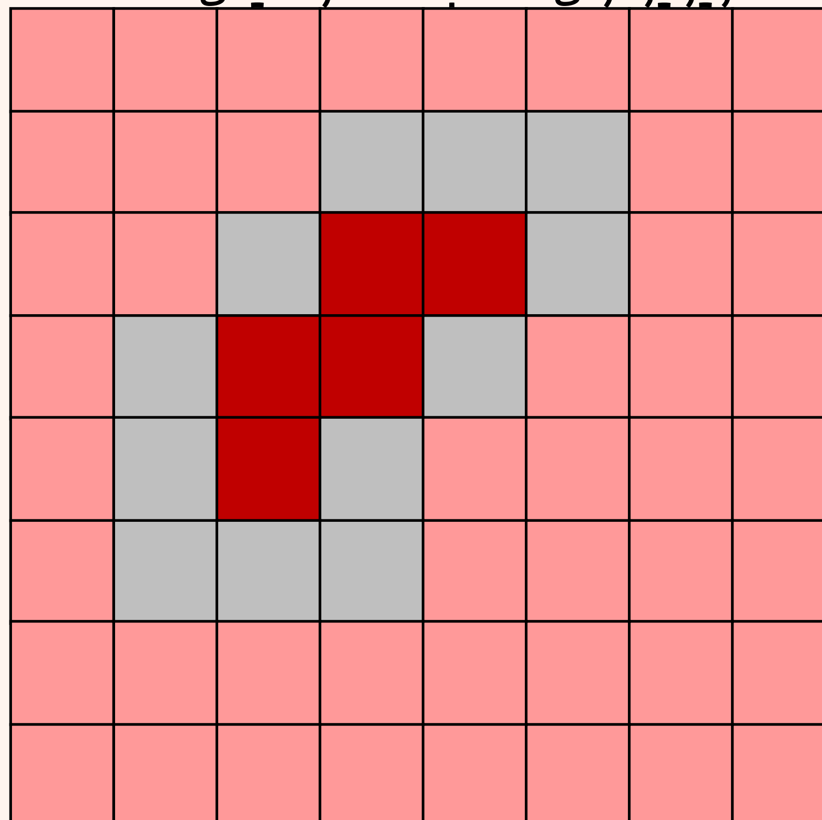
$$A \ominus B = \{z \mid (B)_Z \cap A^c = \varnothing\}$$

مثال

تصویر اصلی



تصویر پردازش شده با عملگر سایش



0	1	0
1	1	1
0	1	0

مولفه‌ی ساختاری

مثال سایش

Original image

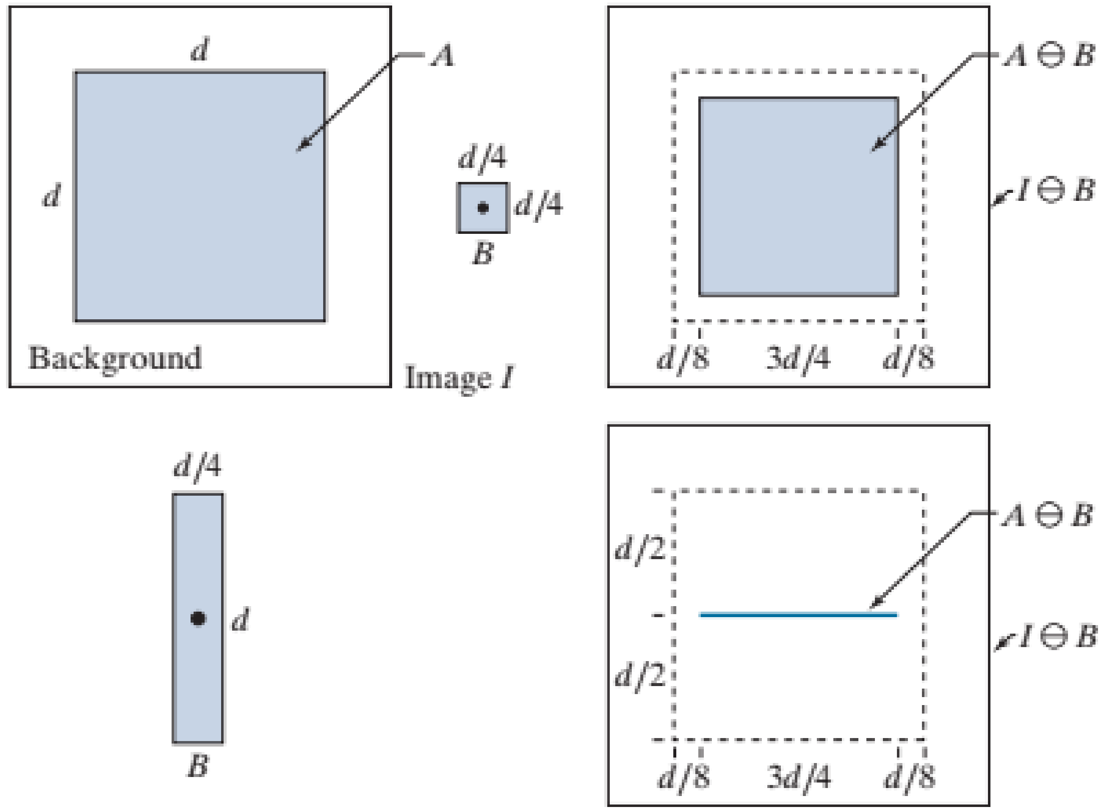
Erosion by 3*3 square structuring element

Erosion by 5*5 square structuring element

مثال-سایش

a b c
d e

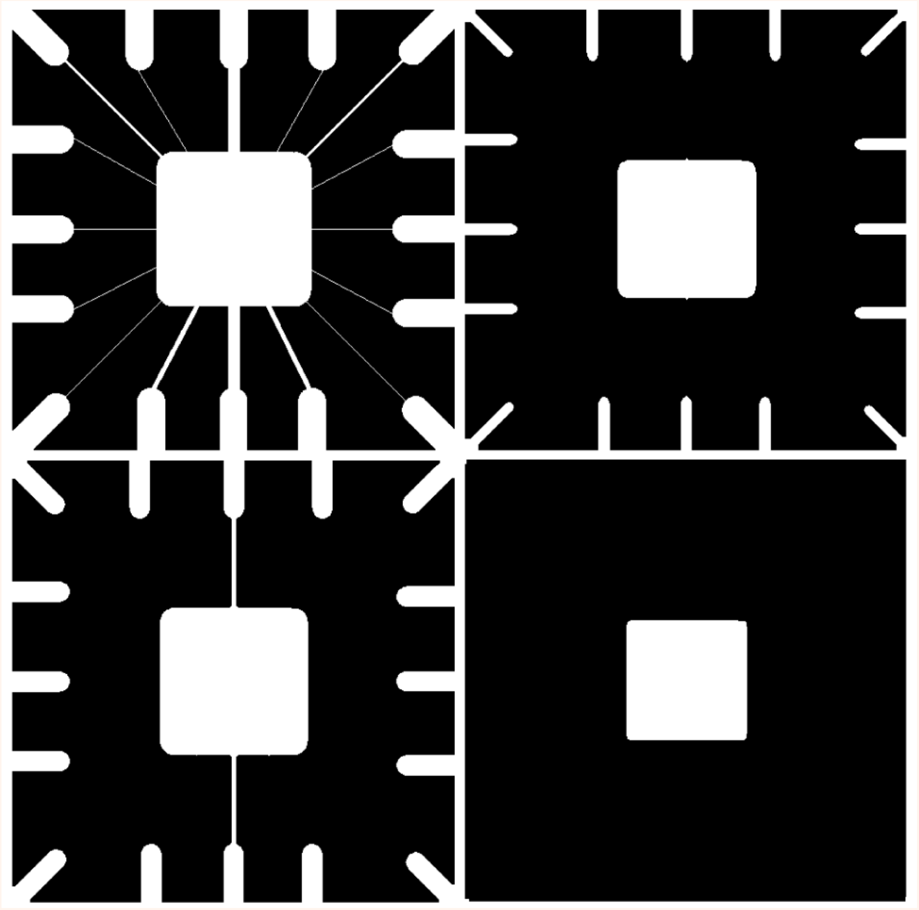
FIGURE 9.4
(a) Image I, consisting of a set (object) A, and background.
(b) Square SE, B (the dot is the origin).
(c) Erosion of A by B (shown shaded in the resulting image).
(d) Elongated SE.
(e) Erosion of A by B. (The erosion is a line.) The dotted border in (c) and (e) is the boundary of A, shown for reference.



مثال سایش

Original image

After erosion with a disc of radius 10



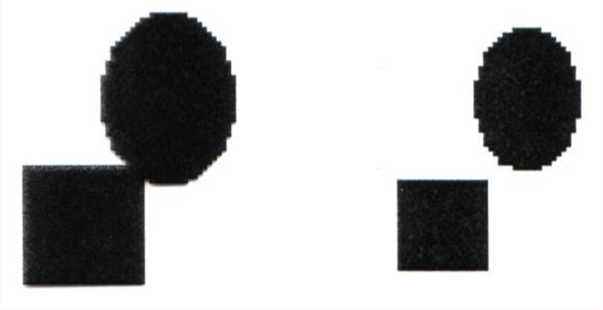
After erosion with a disc of radius 5

After erosion with a disc of radius 20

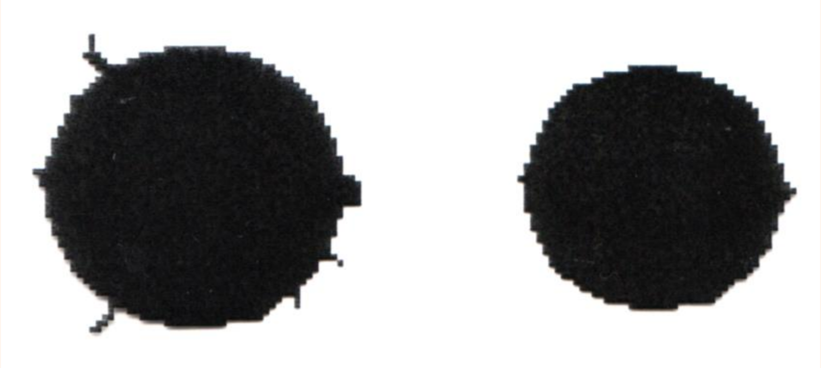
Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

نکات

- به وسیله‌ی سایش می‌توان object هایی را که به یکدیگر متصلند را جدا نمود:



- زواید یک شی را نیز می‌توان با اعمال سایش از میان برد:



گسترش

Dilation

- شی در پیش‌زمینه را با f و مولفه‌ی ساختاری را s نشان می‌دهیم، در این حالت اگر g مجموعه به دست آمده پس از اعمال فرآیند مذکور باشد خواهیم داشت:

$$Dilation \rightarrow A \oplus B$$

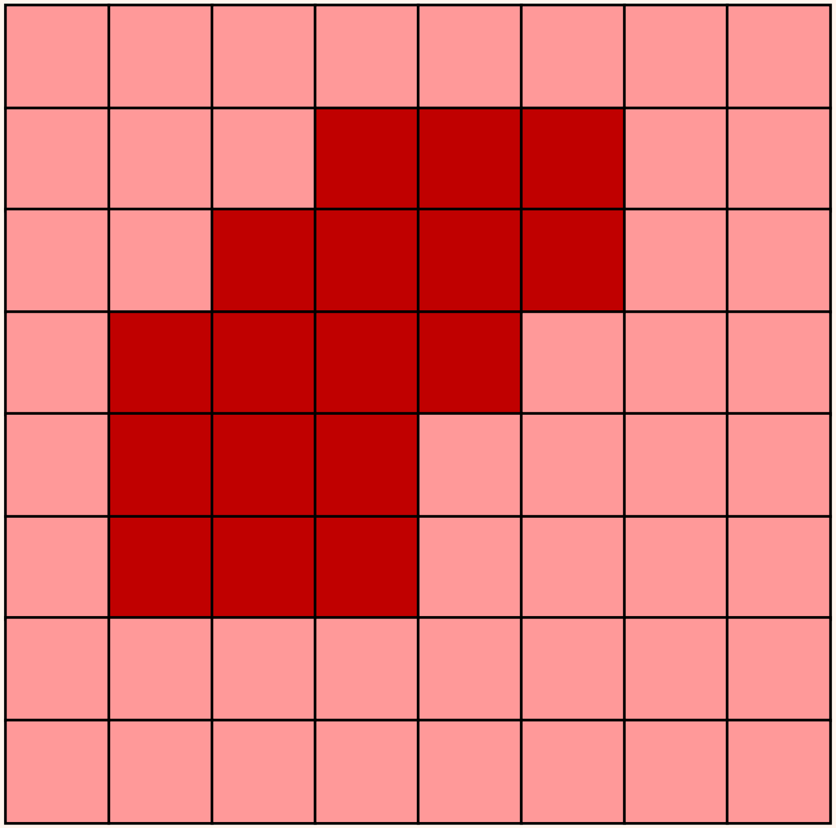
$$A \oplus B = \left\{ z \mid \left(B \right)_z \cap A \neq \varnothing \right\}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } \left(B \right)_{(x,y)} \text{ hits } A \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

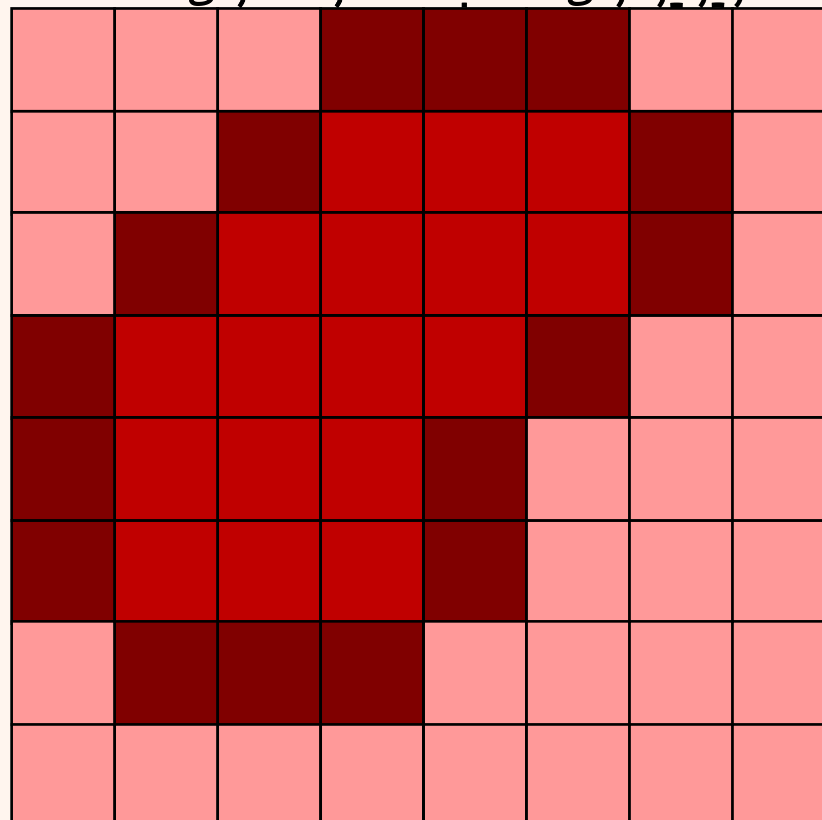
در برخی منابع گسترش تعریف این عملگر متفاوت است:
انعکاس‌یافته مولفه‌ساختار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال

تصویر اصلی



تصویر پردازش شده با عملگر گسترش



0	1	0
1	1	1
0	1	0

مولفه‌ی ساختاری

مثال- گسترش

Original image

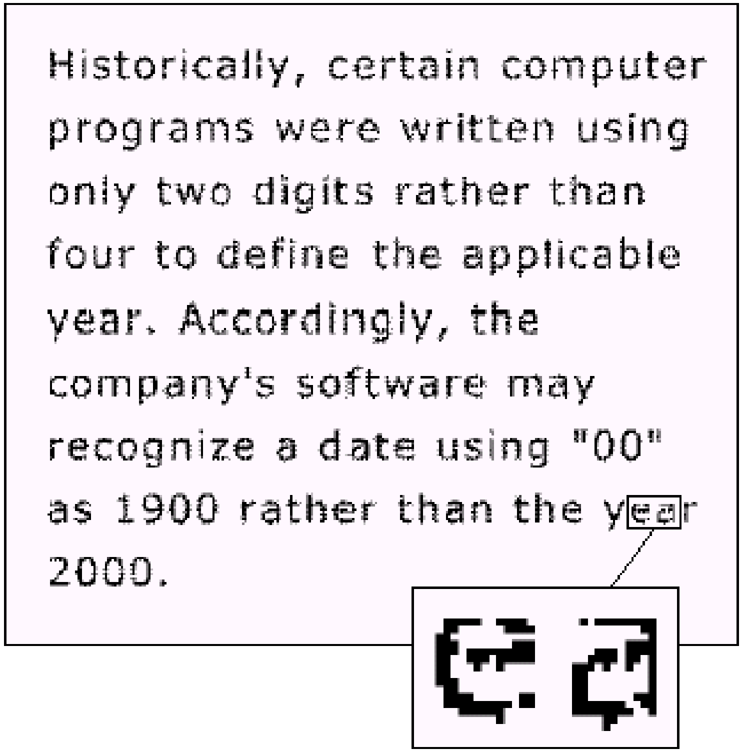
Dilation by 3*3 square structuring element

Dilation by 5*5 square structuring element

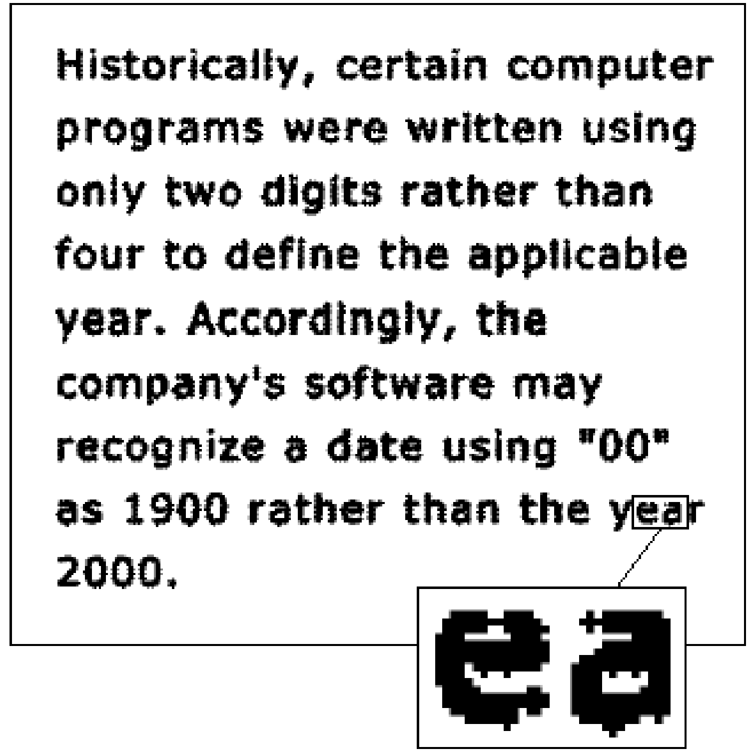
Images taken from Gonzalez & Woods, Digital Image Processing (2002)

مثال- گسترش

Original image


Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

After dilation

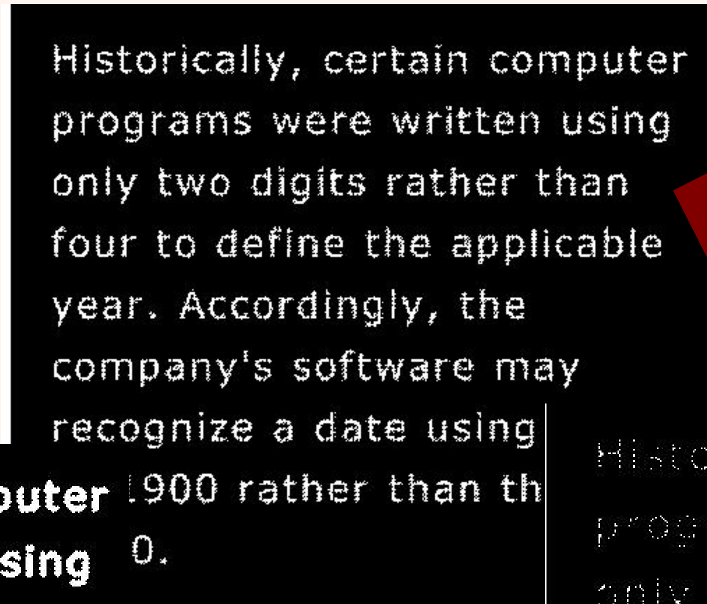

Historically, certain computer programs were written using only two digits rather than four to define the applicable year. Accordingly, the company's software may recognize a date using "00" as 1900 rather than the year 2000.

ساختار

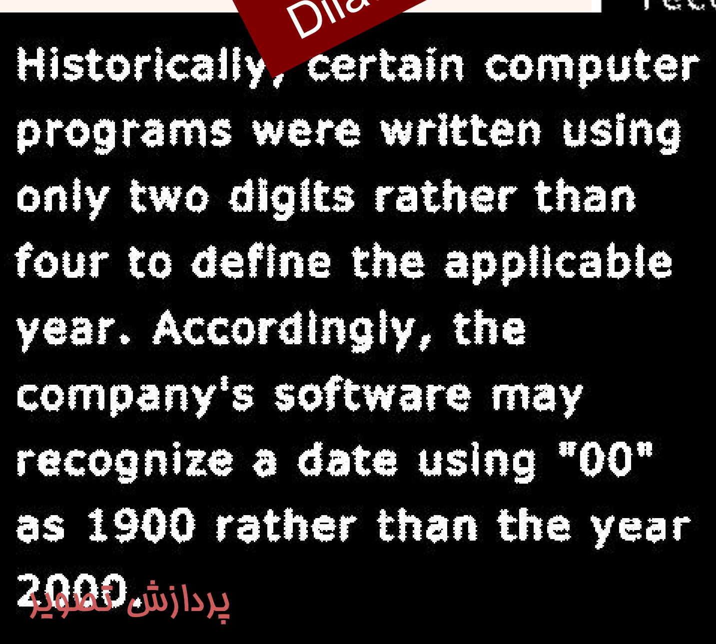
0	1	0
1	1	1
0	1	0

```
A = imread('Broken_Text.tif');
imshow(A,[]);
B=[0 1 0;1 1 1;0 1 0];
A2=imdilate(A,B);
figure;imshow(A2,[]);
```

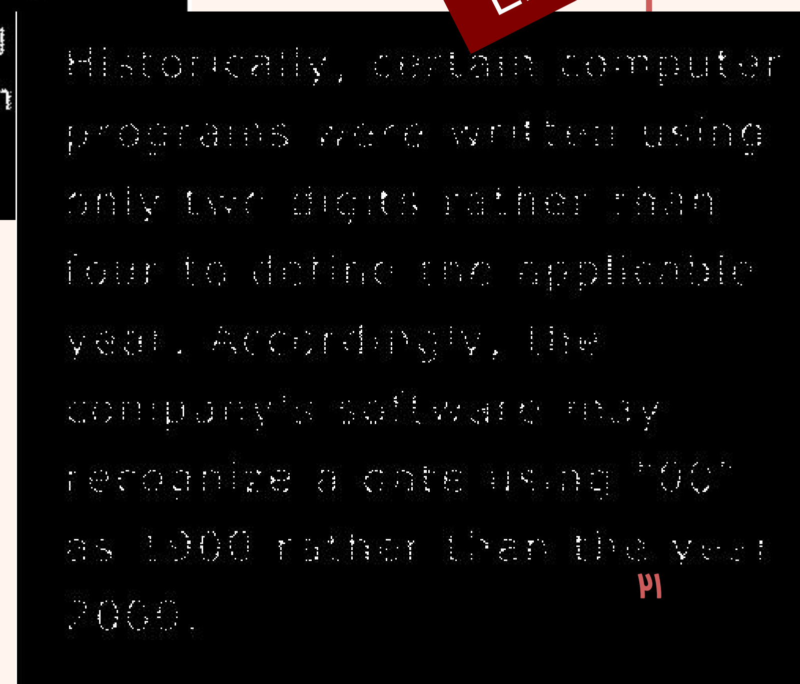
```
A = imread('Broken_Text.tif');
imshow(A,[]);
B=[0 1 0;1 1 1;0 1 0];
A2=imerode(A,B);
figure;imshow(A2,[]);
```



Org



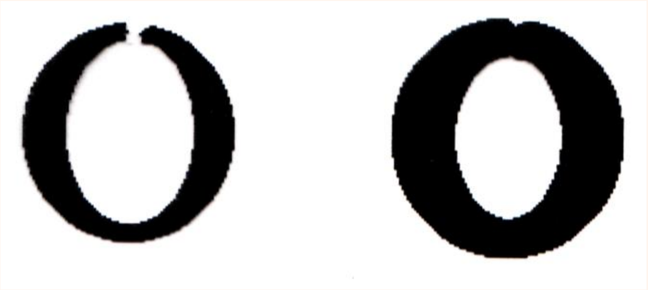
After Dilation



After Erosion

مثال- گسترش

- Dilation گسست‌ها را می‌پوشاند:



- Dilation خوردگی‌های اشیا را نیز می‌پوشاند:

فرآیند مذکور اندازه‌ی شی را بزرگ تر می‌کند

خاصیت دوگانی

گسترش و سایش دوگان یکدیگر هستند:

$$\left(A\ominus B\right)^{c}=A^{c}\oplus B$$

$$\left(A\ominus B\right)^{c}=\left\{z\,|\,\left(B\right)_{z}\subseteq A\right\}^{c}$$

$$=\left\{z\,|\,\left(B\right)_{z}\cap A^{c}=\varnothing\right\}^{c}$$

$$=\left\{z\,|\,\left(B\right)_{z}\cap A^{c}\neq\varnothing\right\}$$

$$=A^{c}\oplus B$$

خاصیت دوگانی

$$(A \oplus B)^c = A^c \ominus B$$

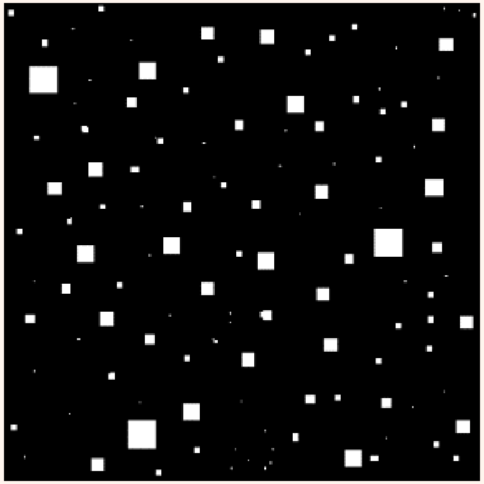
$$(A \oplus B)^c = \{z \mid (B)_Z \cap A \neq \varnothing\}^c$$

$$= \{z \mid (B)_Z \cap A^c = \varnothing\}$$

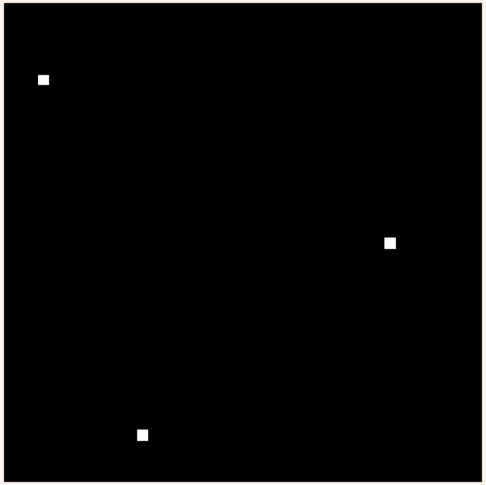
$$= A^c \ominus B$$

تمرین

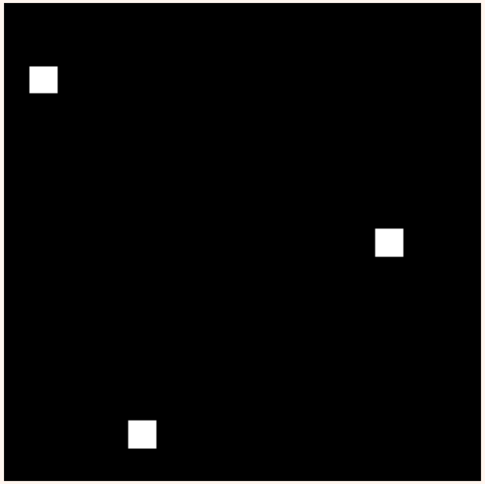
Square of size 1,3,5,7,9 and 15



هدف حذف همه‌ی مربع‌ها به جز بزرگ‌ترین آن‌هاست



Erosion with ones(13)



Dialation with ones(13)

بازکردن و بستن

- به وسیله‌ی ترکیب دو اپراتور سایش و گسترش دو اپراتور جدید جالبی به دست خواهند آمد که بسیار کاربردی هستند:

Opening

بازکردن: مرزها را هموارتر می‌کند، نوارهای باریک و پیش‌رفتگی‌ها را حذف می‌کند.

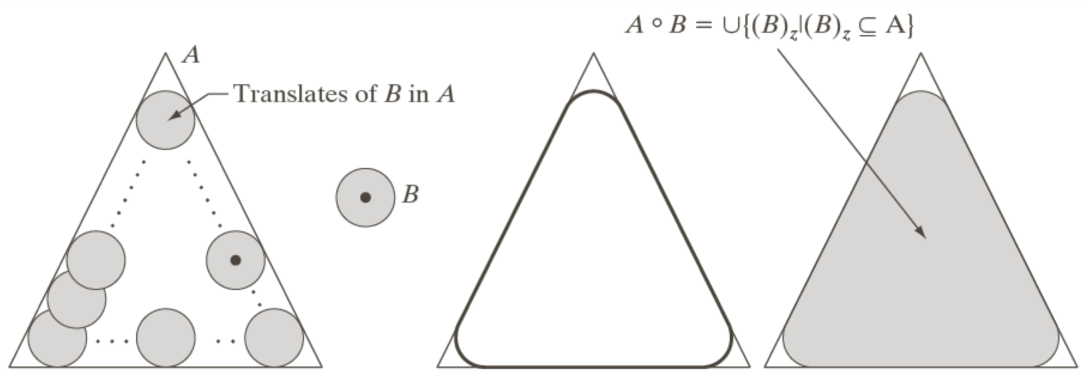
Closing

بستن: این عملگر نیز مرزها را هموار می‌کند، حفره‌ها را حذف می‌کند، نوارهای باریک را به هم متصل می‌سازد.

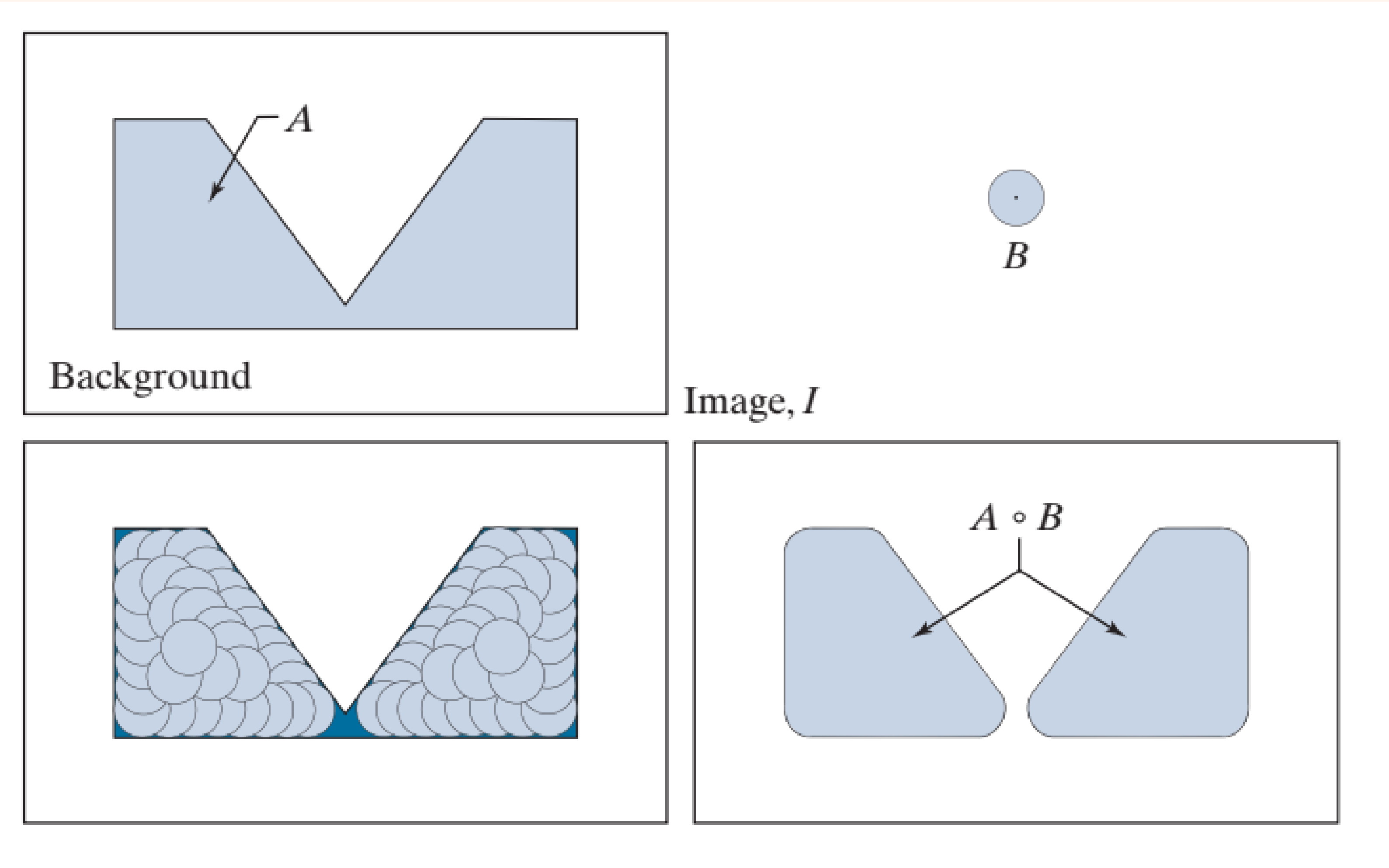
بازکردن

- هنگامی‌که به روی یک تصویر ابتدا erosion و سپس dilation اعمال نماییم، فرآیند Opening صورت گرفته است.

$$f \circ s = (f \ominus s) \oplus s$$

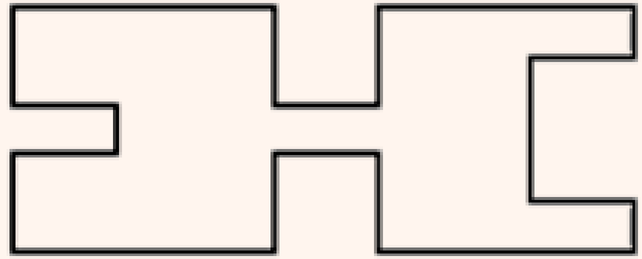


مثال-بازکردن



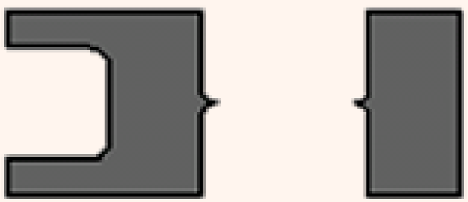
$$A \circ B = \bigcup \left\{ (B)_z \,\middle|\, (B)_z \subseteq A \right\}$$

مثال-بازکردن



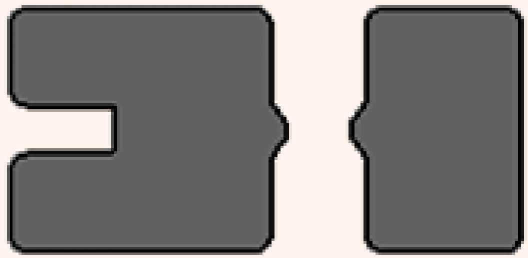
A

Original shape



$A \ominus B$

After erosion



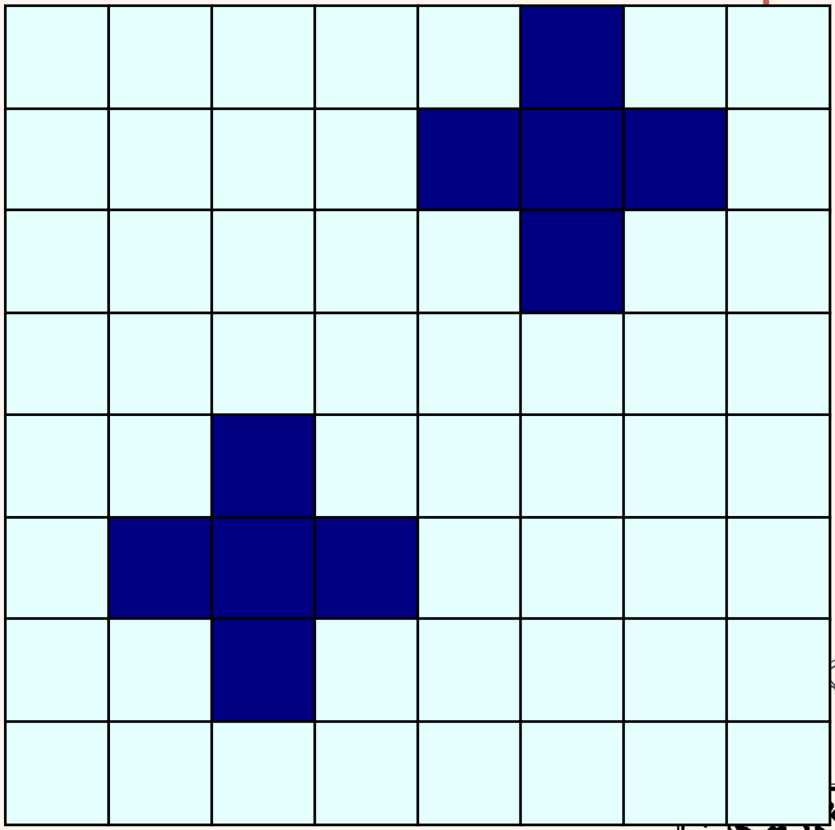
$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$

After dilation
(opening)

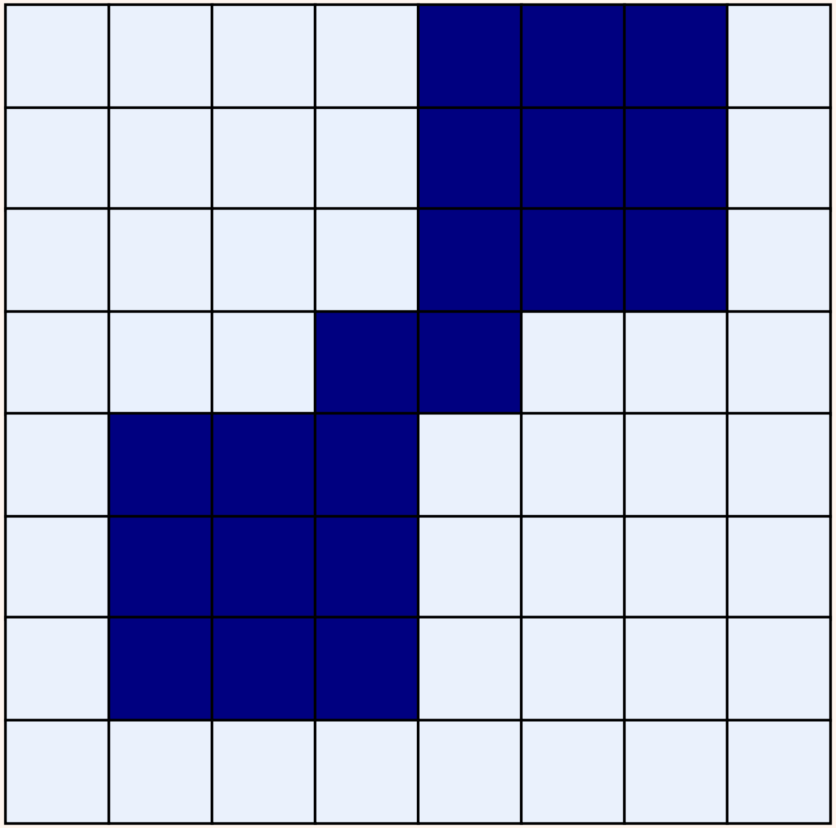
ساختار disc برای اعمال فرآیند استفاده شده است

مثال- بازکردن

تصویر پردازش شده با عملگر بازکردن



تصویر اصلی



$$A \circ B = \bigcup \left\{ (B)_z \,\middle|\, (B)_z \subseteq A \right\}$$

0	1	0
1	**1**	1
0	1	0

مولفه‌ی ساختاری

مثال- بازکردن

```
A = imread('Shapes.tif');
imshow(A);
se=strel('square',60);
A2=imopen(A,se);
figure;imshow(A2);
```

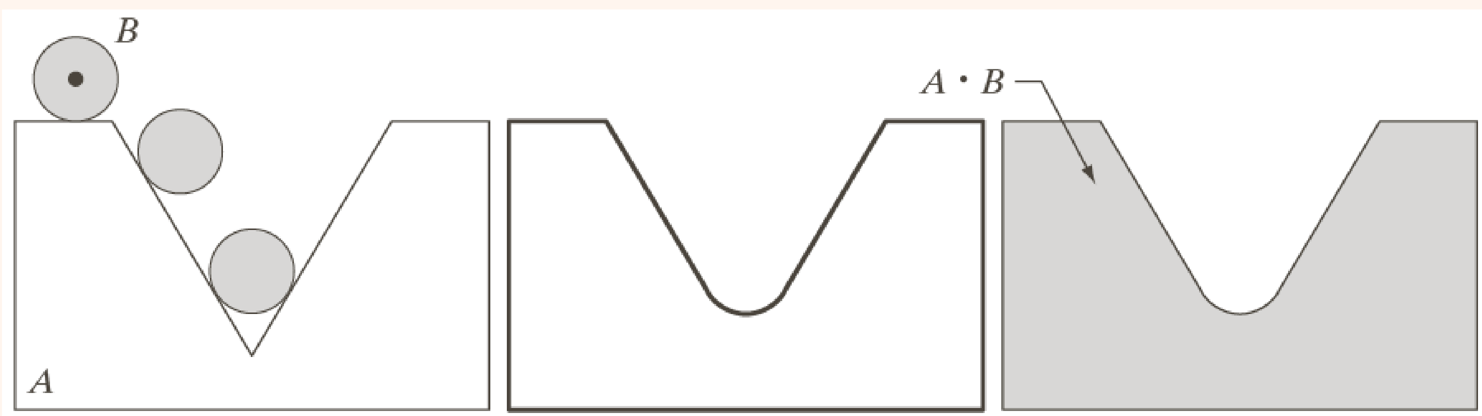
Org

After Opening

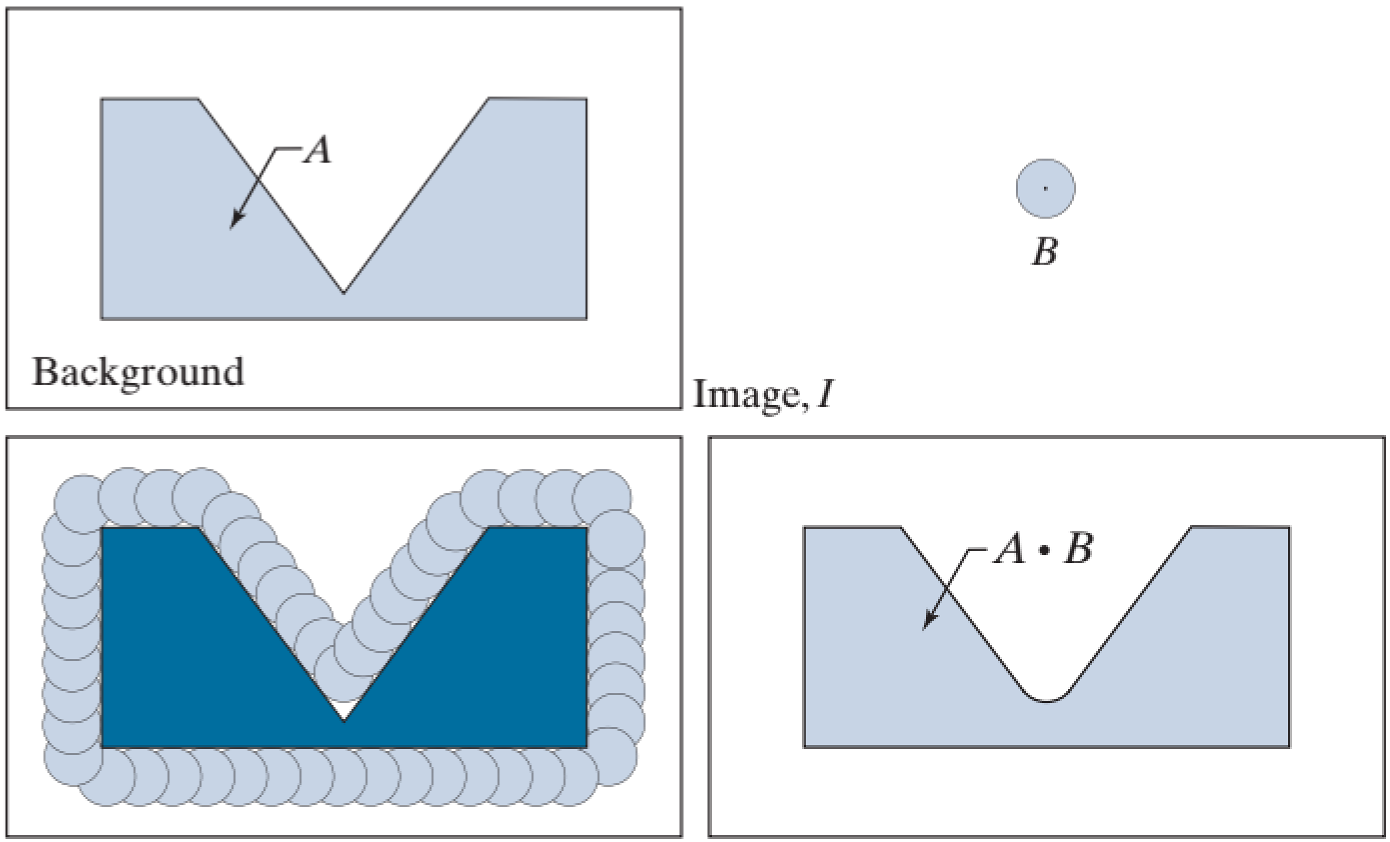
بستن

- هنگامی‌که به روی یک تصویر ابتدا dilation و سپس erosion اعمال نماییم، گوییم فرآیند Closing صورت گرفته است.

$$f \bullet s = (f \oplus s) \ominus s$$

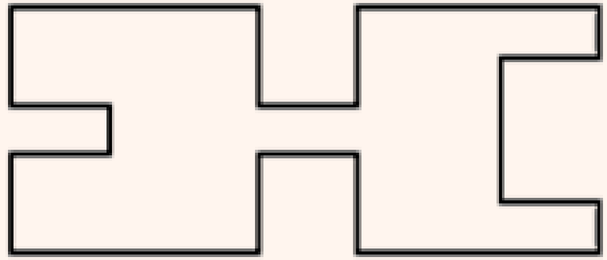


مثال- بستن



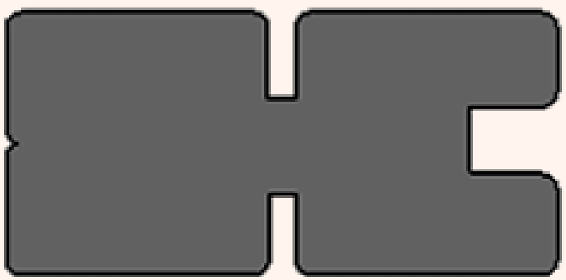
$$A \bullet B = \left[\bigcup \left\{ (B)_z \,\middle|\, (B)_z \cap A = \varnothing \right\} \right]^c$$

مثال- بستن



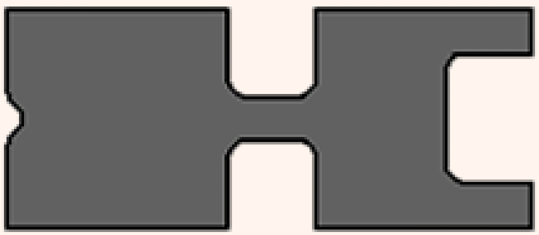
A

Original shape



$A \oplus B$

After Dilation



$A \cdot B = (A \oplus B) \ominus B$

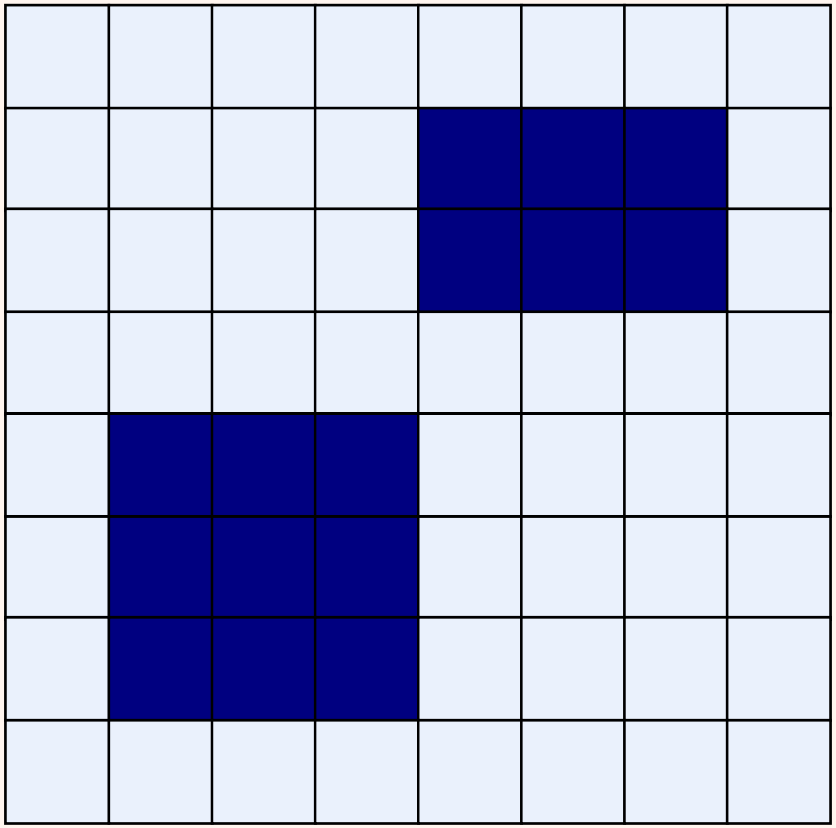
After Erosion (Closing)

ساختار disc برای اعمال فرآیند استفاده شده است

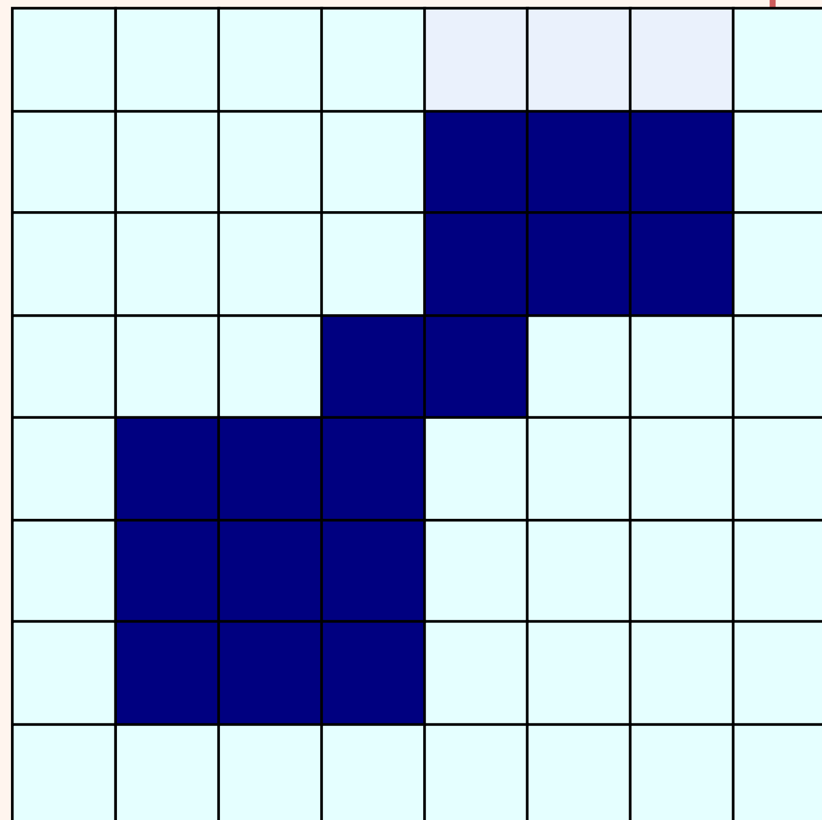
مثال- بستن

$$A \bullet B = \left[\bigcup\left\{(B)_z \,\middle|\, (B)_z \cap A = \varnothing\right\}\right]^c$$

تصویر اصلی



تصویر پردازش شده با عملگر بستن



0	1	0
1	1	1
0	1	0

مولفه‌ی ساختاری

مثال- بستن

```
A = imread('Shapes.tif');
imshow(A);
se=strel('square',60);
A2=imclose(A,se);
figure;imshow(A2);
```

Org

After Closing

خواص بستن و باز کردن

دوگانی

$$(A \bullet B)^c = (A^c \circ B) \qquad (A \circ B)^c = (A^c \bullet B)$$

باز کردن

(a) $A \circ B$ is a subset (subimage) of A

(b) if C is a subset of D, then $C \circ B$ is a subset of $D \circ B$

(c) $(A \circ B) \circ B = A \circ B$

بستن

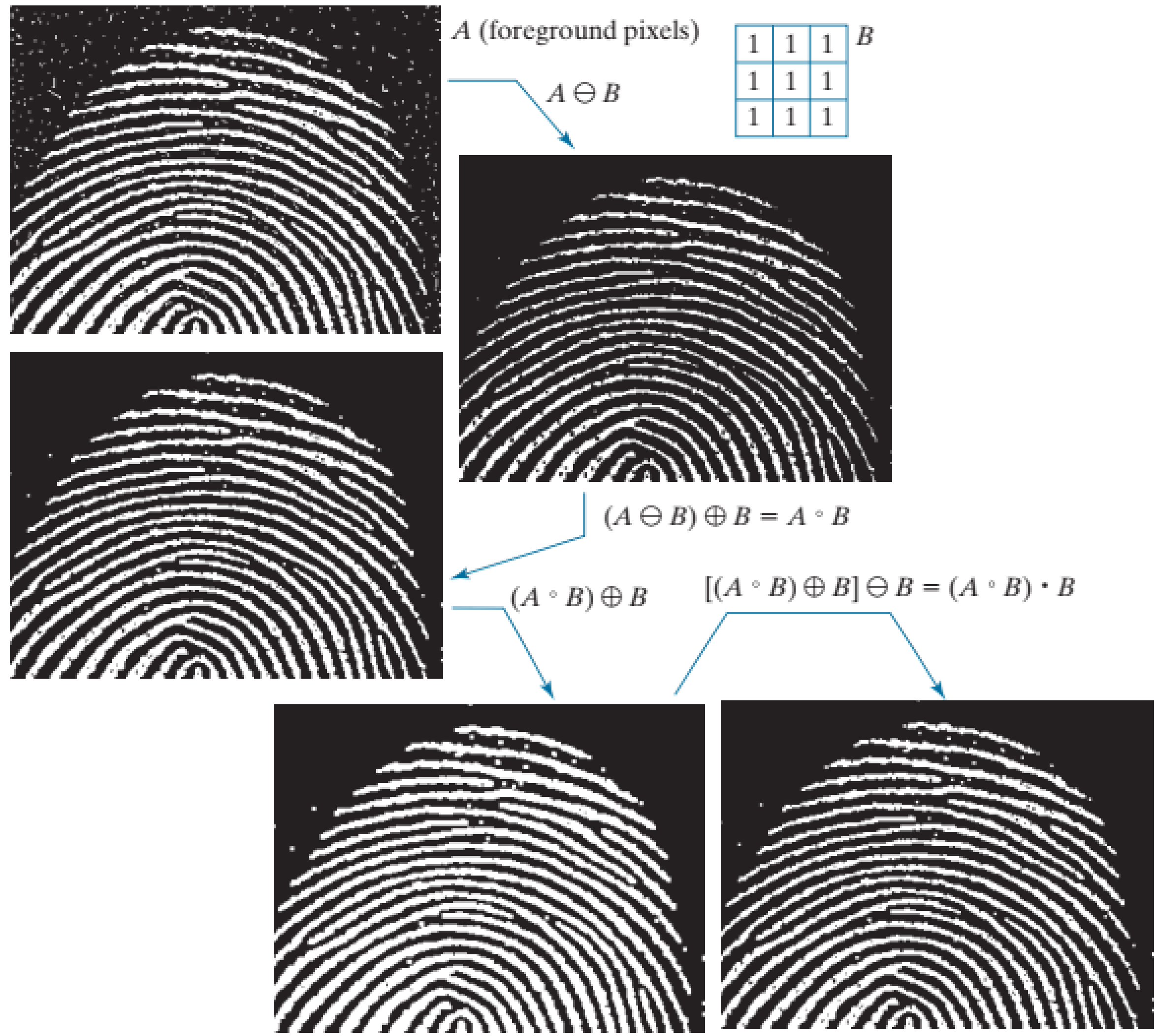
(a) A is subset (subimage) of $A \bullet B$

(b) If C is a subset of D, then $C \bullet B$ is a subset of $D \bullet B$

(c) $(A \bullet B) \bullet B = A \bullet B$

Morphological Processing Example

مثال



a b
d c
e f

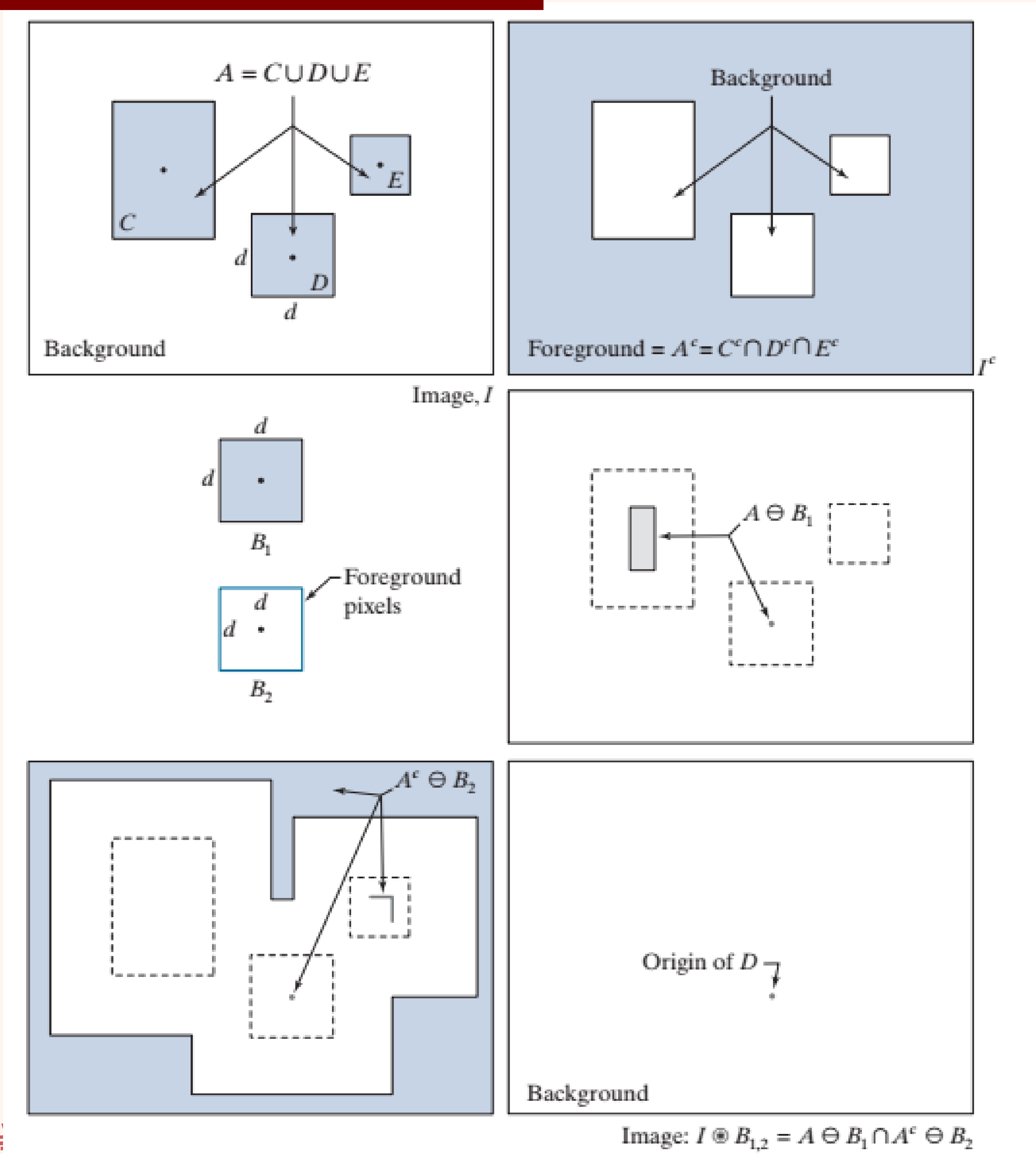
FIGURE 9.11 (a) Noisy image. (b) Structuring element. (c) Eroded image. (d) Dilation of the erosion (opening of A). (e) Dilation of the opening. (f) Closing of the opening. (Original image courtesy of the National Institute of Standards and Technology.)

Hit or Miss Transform(HMT)

- HMT یک روش پایه برای تشخیص اشکال است.
- بر خلاف سایر شیوه‌ها از دو مولفه‌ی ساختاری استفاده می‌کند.
  - B_1 – تشخیص شکل در پس‌زمینه
  - B_2 – تشخیص شکل در پیش‌زمینه
    - در واقع به گونه‌ای است که مرز شکل را می‌یابد.

$$I \circledast B_{1,2} = \left\{ z \middle| (B_1)_z \subseteq A \text{ and } (B_2)_z \subseteq A^c \right\}$$
$$= (A \ominus B_1) \cap (A^c \ominus B_2)$$

Hit or Miss Transform(HMT)



Hit or Miss Transform(HMT)

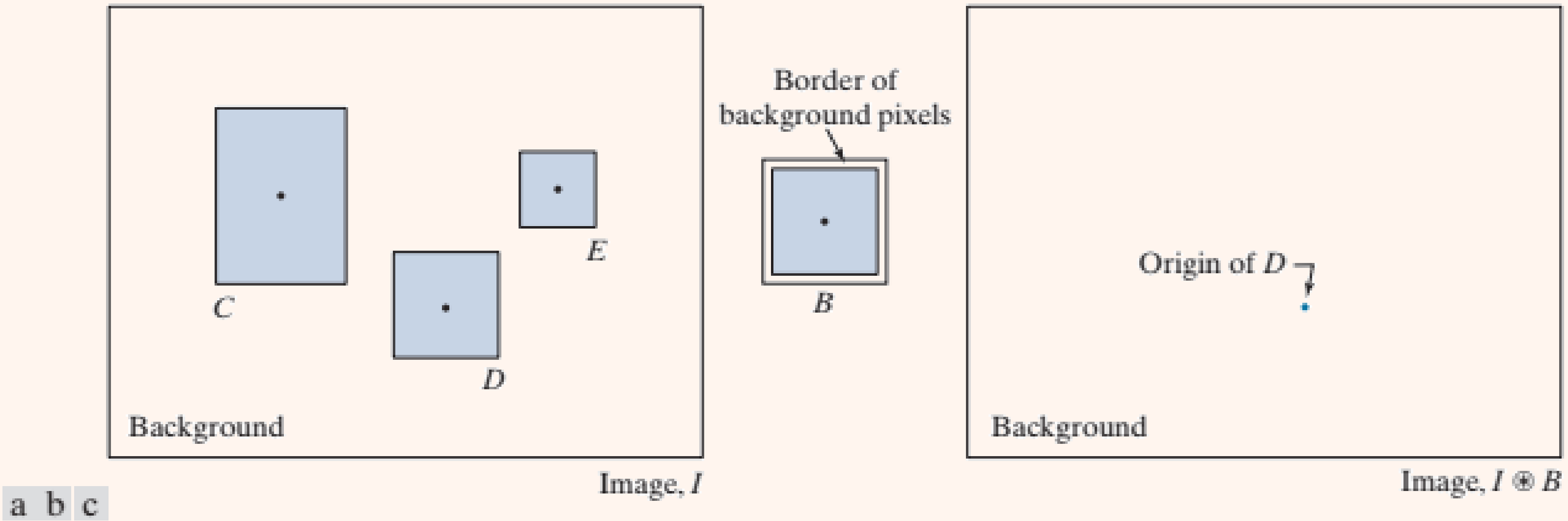
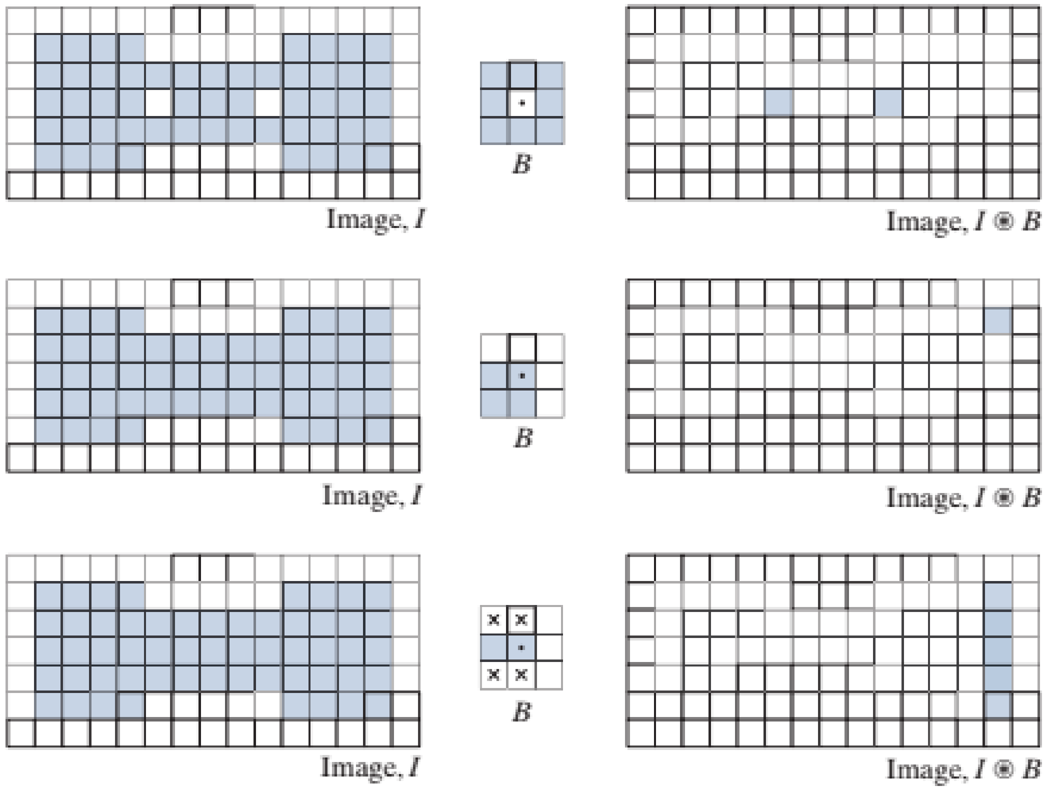


FIGURE 9.13 Same solution as in Fig. 9.12, but using Eq. (9-17) with a single structuring element.

$$I \circledast B = \left\{ z \,\middle|\, (B)_z \subseteq I \right\}$$



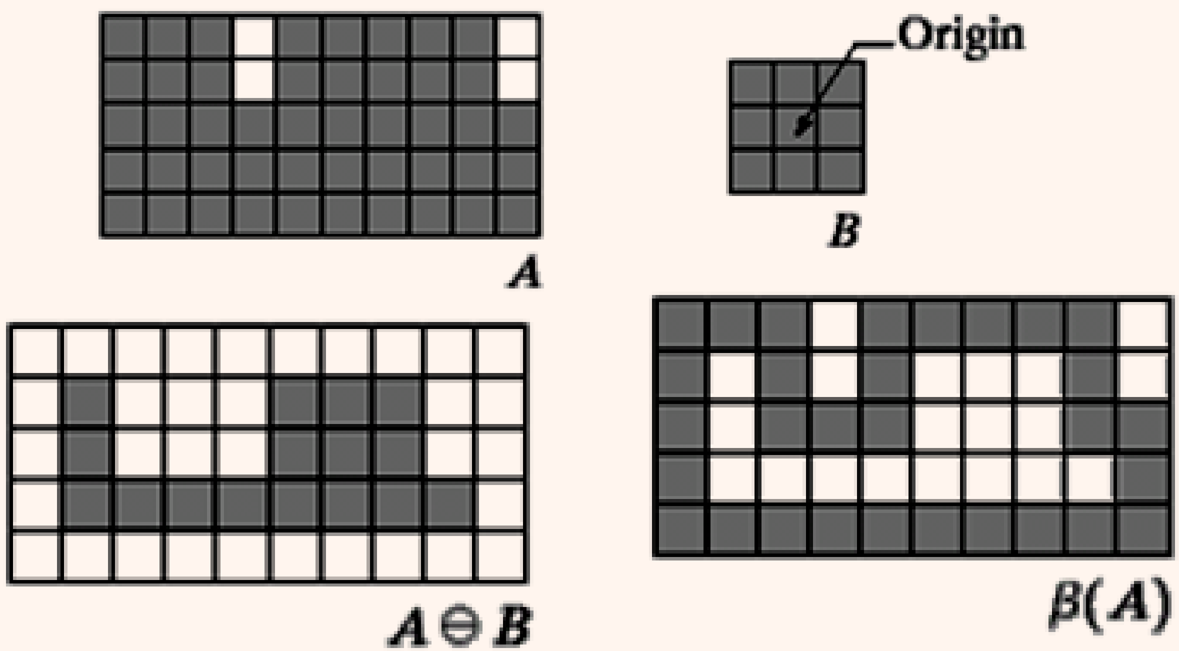
a b c
d e f
g h i

FIGURE 9.14 Three examples of using a single structuring element and Eq. (9-17) to detect specific features. First row: detection of single-pixel holes. Second row: detection of an upper-right corner. Third row: detection of multiple features.

Boundary extraction

- برای به‌دست آوردن مرزهای یک شی می‌توان به شیوه‌ی زیر عمل نمود:

$$\beta(A) = A - (A \ominus B)$$



Boundary extraction

- تصویر اصلی و نتیجه‌ی اعمال فرآیند تشخیص مرز

Original Image

Extracted Boundary

Hole Filling

پر کردن حفره

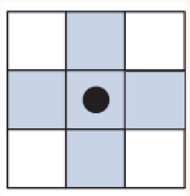
۲

- با استفاده از فرآیند زیر به هدف دست می‌یابیم:

$\boxed{X_0}$ آرایه‌ای هم اندازه با تصویر اصلی شامل A
تنها شامل نقطه‌ی شروع (داخل محدوده)

$$\boxed{X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \qquad k = 1,2,3.....}$$

Conditional dilation



ساختار

مکمل تصویر

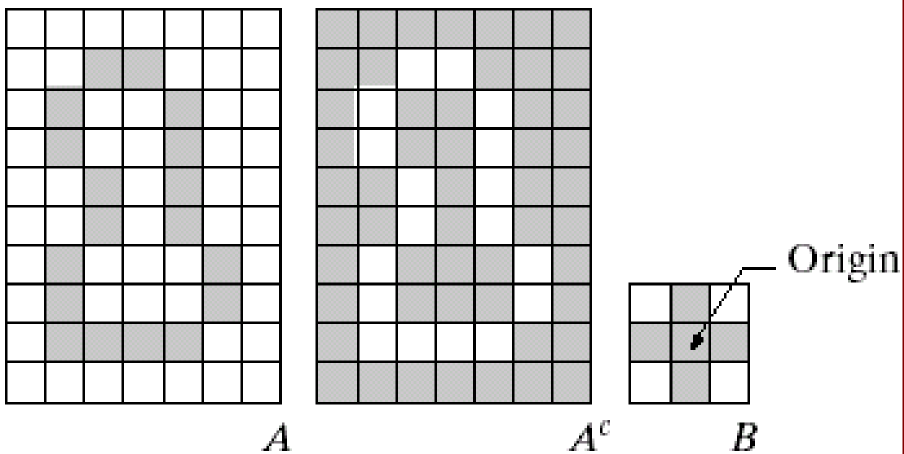
- فرآیند گسترش تا جایی ادامه می‌یابد که X_k و X_{k-1} یکسان شود. در این حالت X_k شامل تمام نقاط داخلی بخش مورد نظر است.

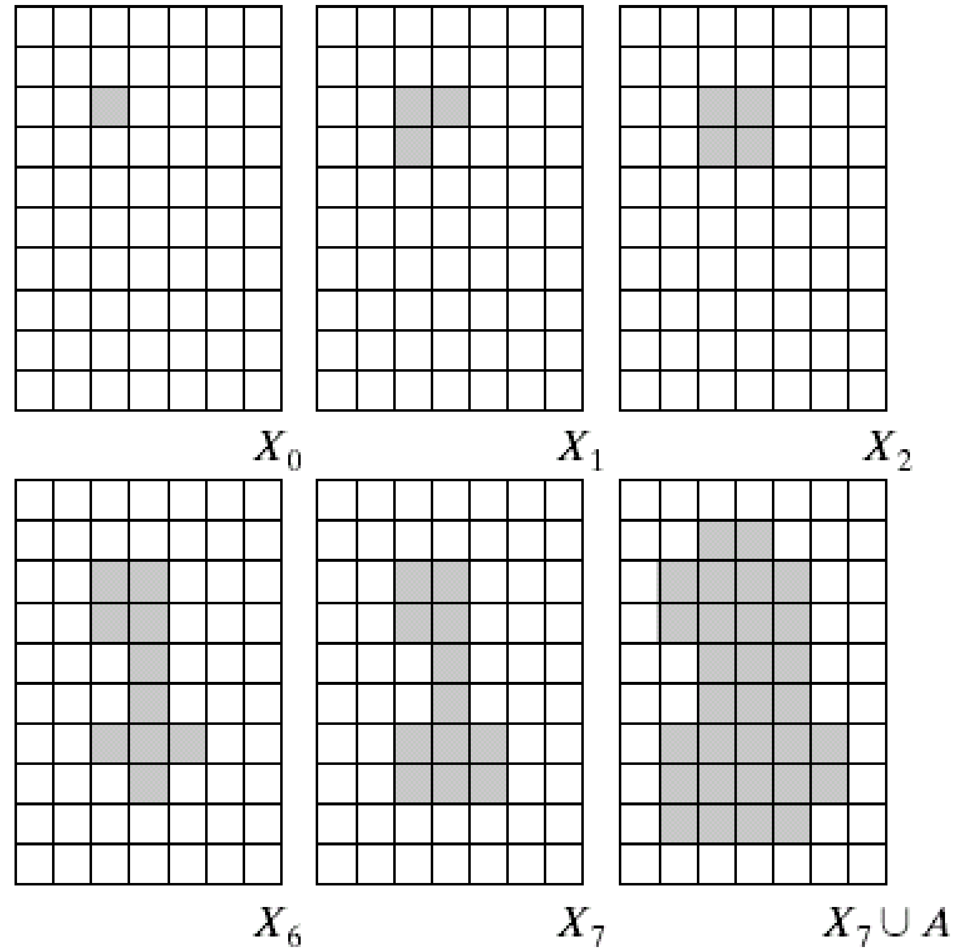
Hole Filling

مثال

۲

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \qquad k = 1,2,3.....$$





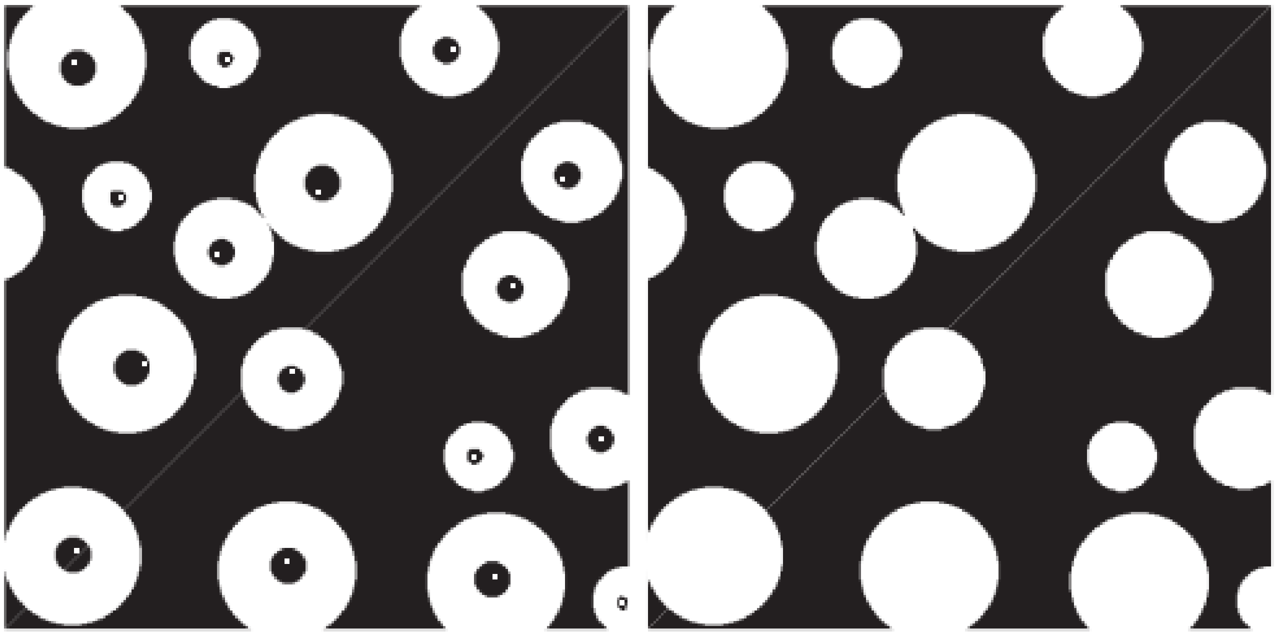
Hole Filling

مثال

۲

a b

FIGURE 9.18 (a) Binary image. The white dots inside the regions (shown enlarged for clarity) are the starting points for the hole-filling algorithm. (b) Result of filling all holes.



Extraction of Connected Components

- یافتن اجزا به هم پیوسته در یک تصویر، نقش مهمی در بسیاری از الگوریتم‌های خودکار تحلیل تصویر دارد.
  - در اینجا نیز مشابه با کاربرد پیشین عمل می‌شود:

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A$$

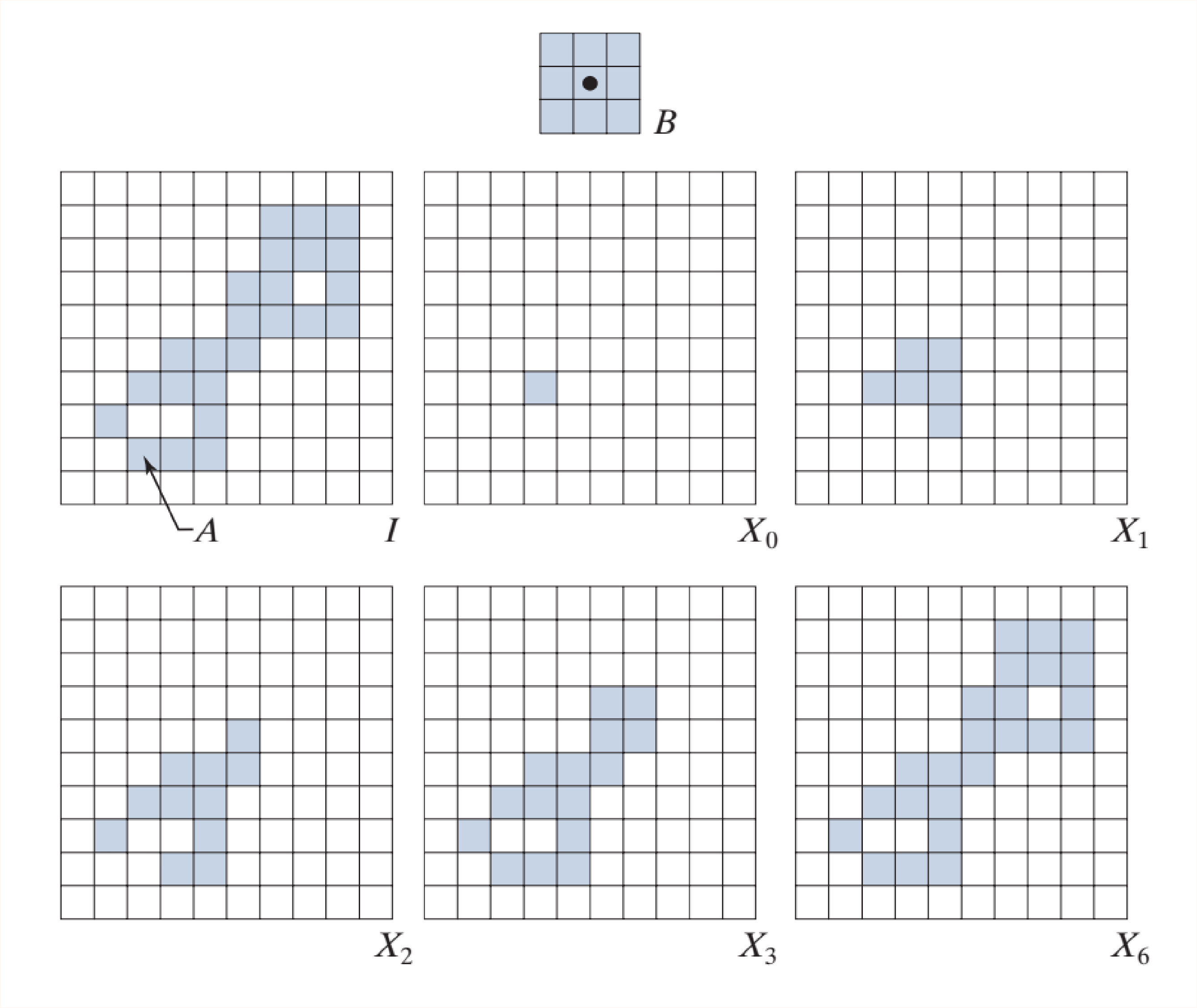
با یک تفاوت جزیی

$$B: \text{structuring element}$$

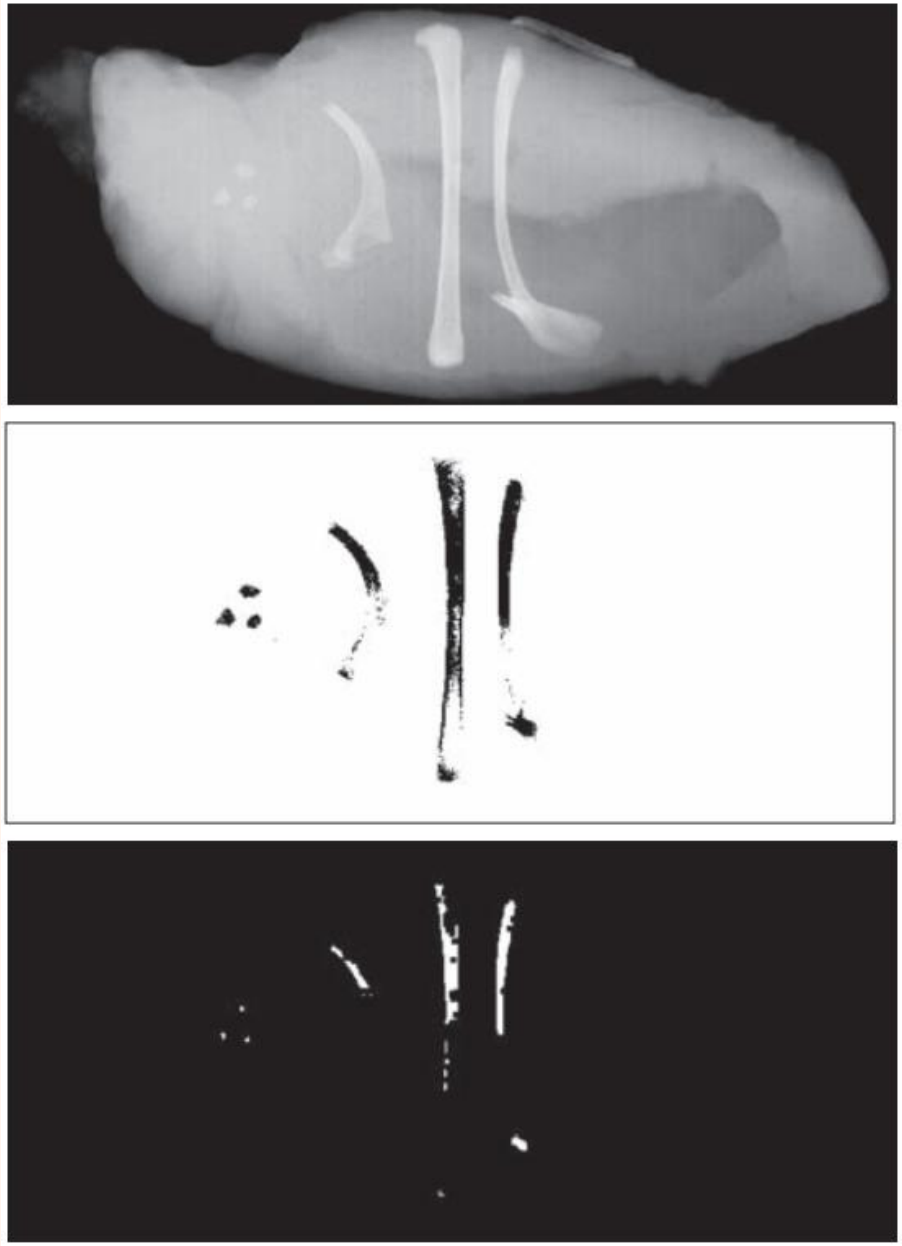
$$\text{until } X_k = X_{k\text{-}1}$$

Extraction of Connected Components

مثال

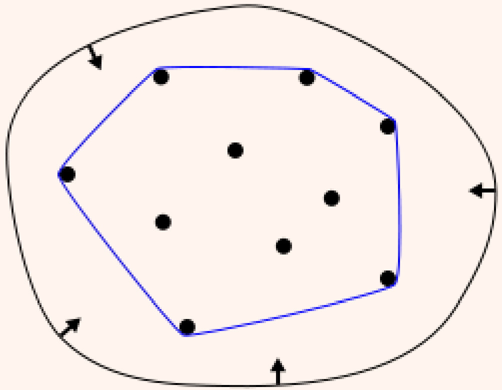


Extraction of Connected Components



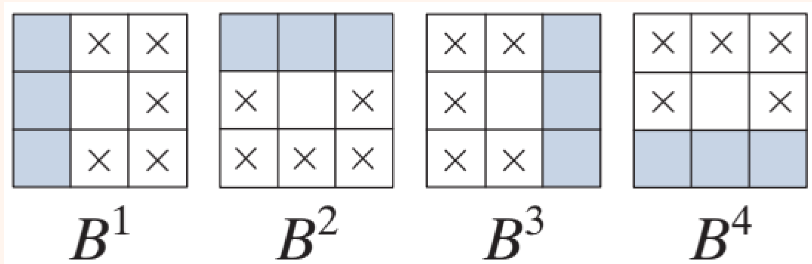
Connected component	No. of pixels in connected comp
01	11
02	9
03	9
04	39
05	133
06	1
07	1
08	743
09	7
10	11
11	11
12	9
13	9
14	674
15	85

- هدف به دست آوردن کوچک‌ترین «پوشش محدب» برای یک مجموعه از نقاط است.
  - باید توجه داشت که در تصویر این نقاط گسسته هستند.



wikipedia

چنان‌چه B^i ها مولفه‌های ساختاری زیر باشند:



رابطه زیر تا زمانی که به همگرایی برسد

$$X_k^i = X_{k-1}^i$$

به ازای k=1 to 4 انجام می‌شود:

$$X_k^i = (X_{k-1} \circledast B^i) \cup A \qquad \text{with } X_0^i = A$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \quad \text{and} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

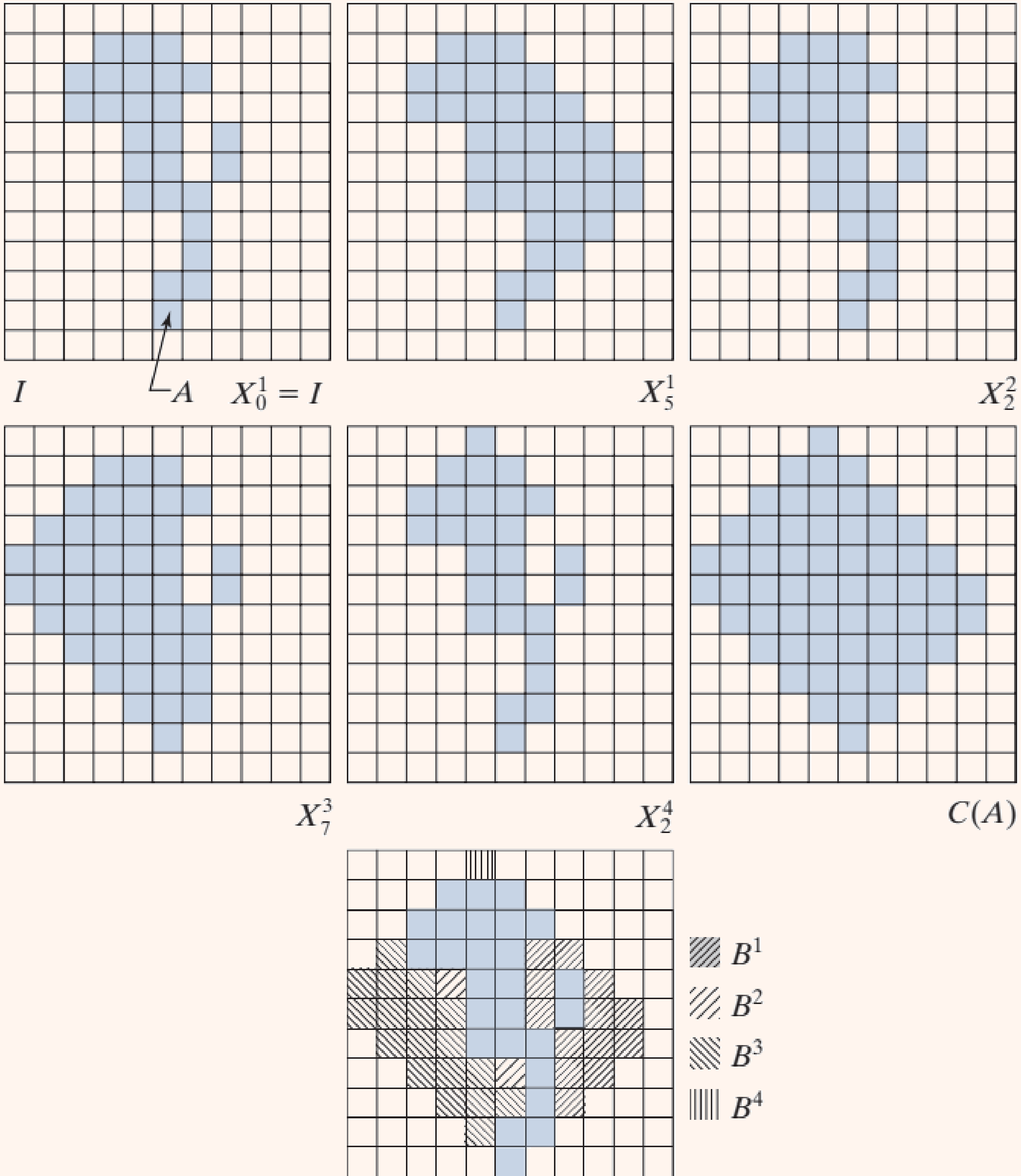
اگر

$$D^i = X_k^i$$

پوشش محدب به صورت زیر به دست می‌آید:

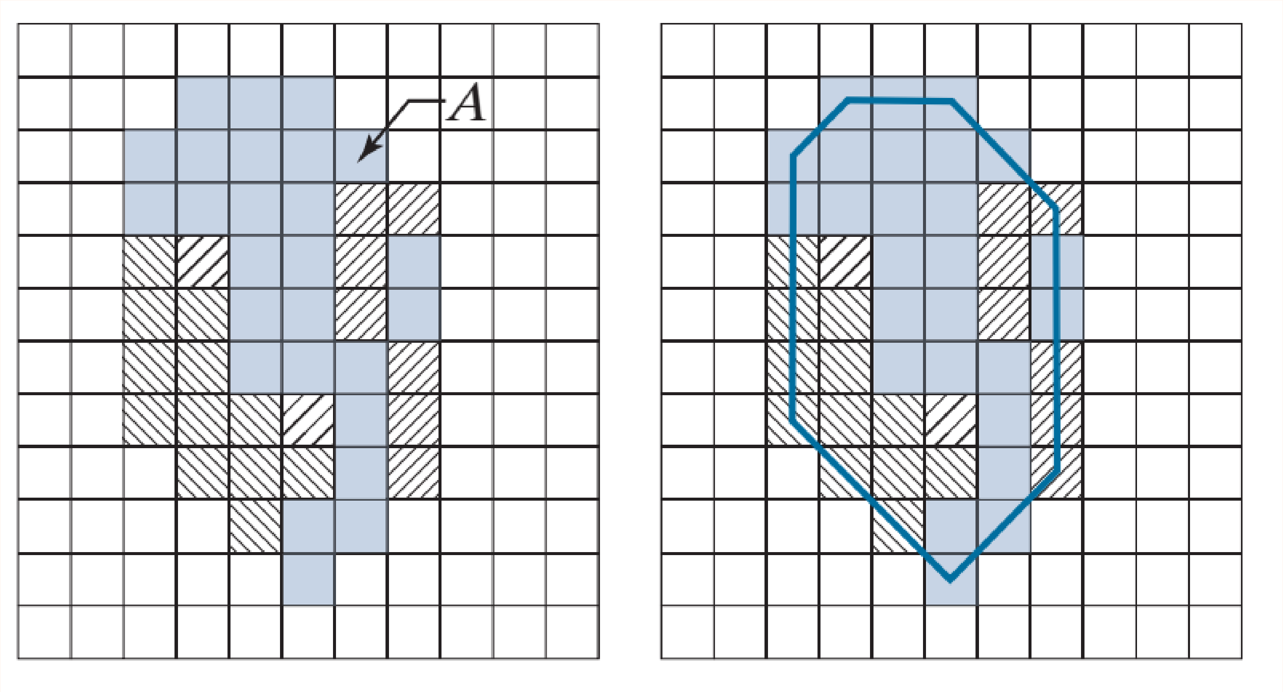
$$C(A) = \bigcup_{i=1}^{4} D^i$$

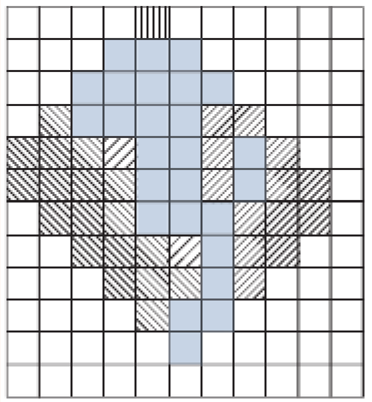
مثال



البته روندی که تا کنون مطرح شد، کوچک‌ترین مجموعه نیست.

یک راه ساده، محدود کردن رشد نواحی به مختصات شکل اولیه است.

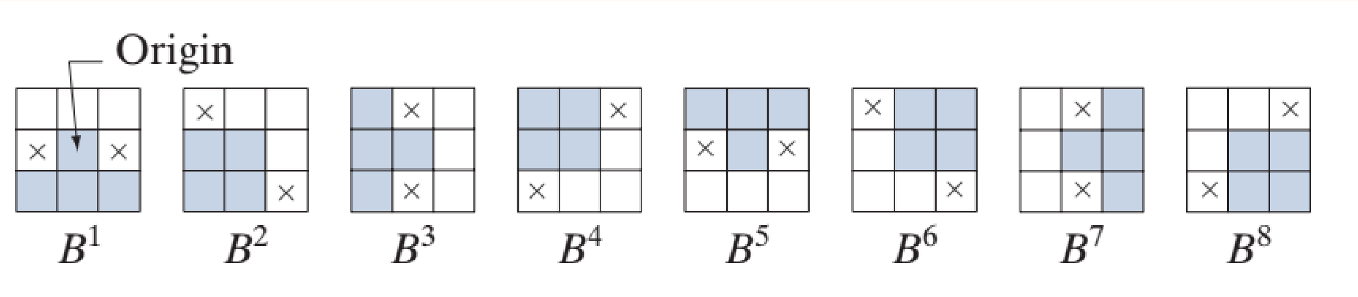




نازک‌سازی

ابتدا

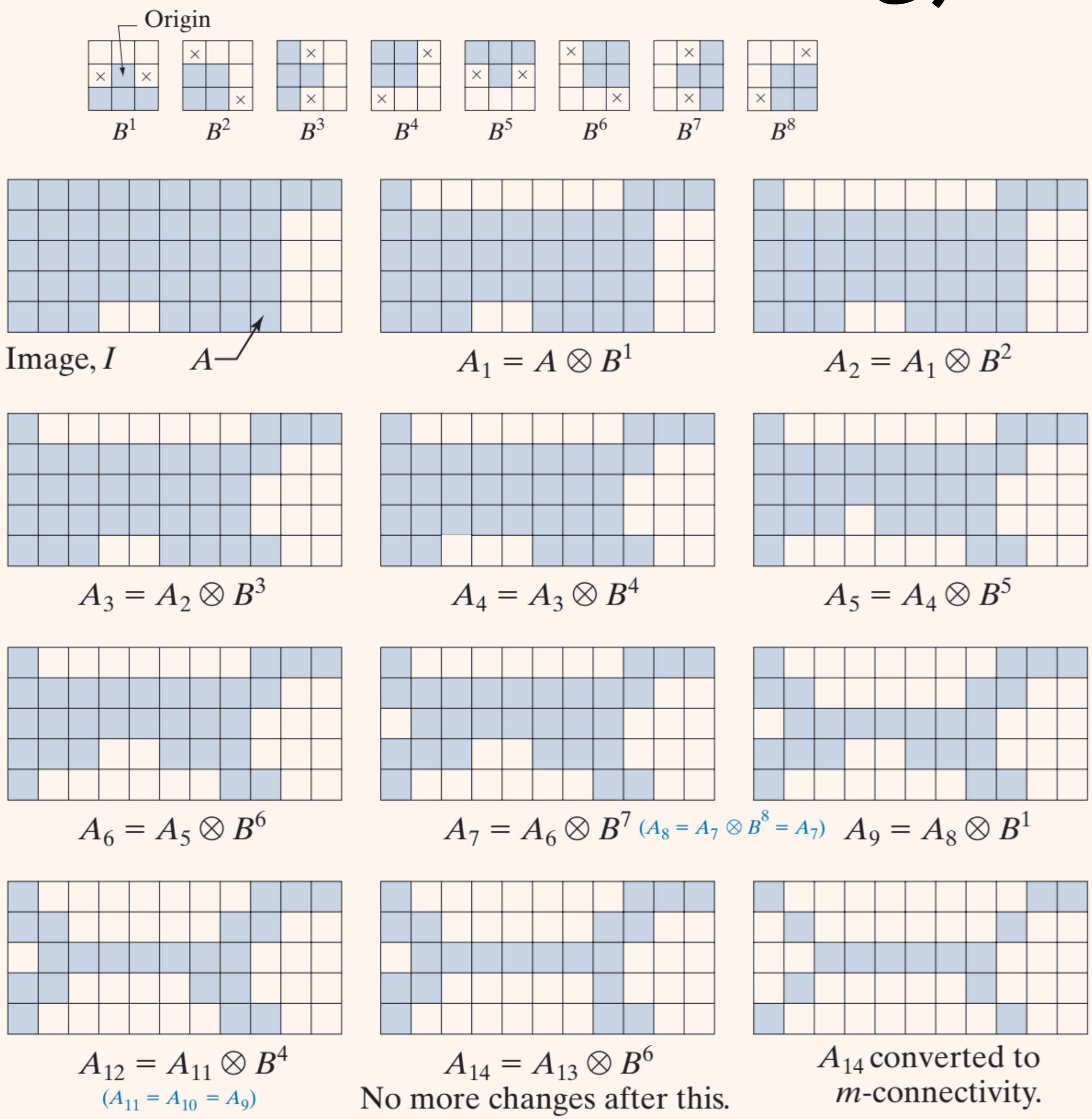
$$A \otimes B = A - (A \circledast B)$$
$$= A \cap (A \circledast B)^c$$



برای به دست آوردن نتیجه‌ای مناسب‌تر

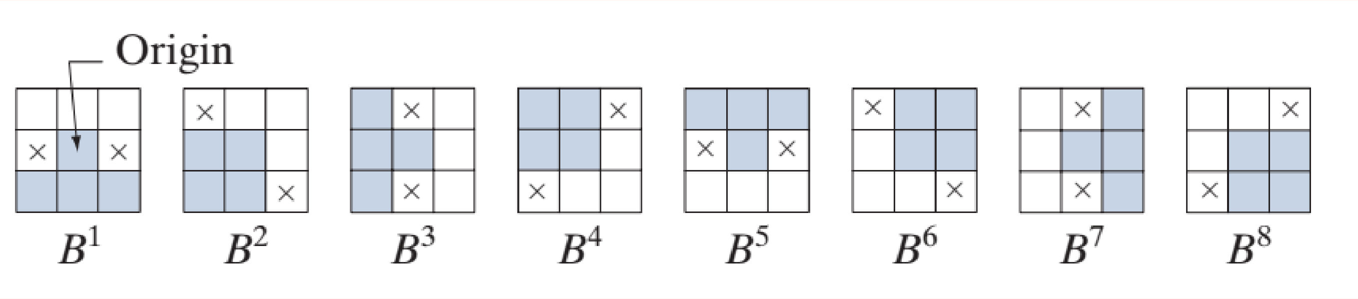
$$A \otimes \{B\} = ((\ldots((A \otimes B^1) \otimes B^2)\ldots) \otimes B^n)$$

نازک‌سازی


Origin
B^1 B^2 B^3 B^4 B^5 B^6 B^7 B^8
Image, I
A
$A_1 = A \otimes B^1$
$A_2 = A_1 \otimes B^2$
$A_3 = A_2 \otimes B^3$
$A_4 = A_3 \otimes B^4$
$A_5 = A_4 \otimes B^5$
$A_6 = A_5 \otimes B^6$
$A_7 = A_6 \otimes B^7$ $(A_8 = A_7 \otimes B^8 = A_7)$
$A_9 = A_8 \otimes B^1$
$A_{12} = A_{11} \otimes B^4$
$(A_{11} = A_{10} = A_9)$
$A_{14} = A_{13} \otimes B^6$
No more changes after this.
A_{14} converted to m-connectivity.

ضخیم‌کردن

$$A \odot B = A \cup \left(A \circledast B \right)$$



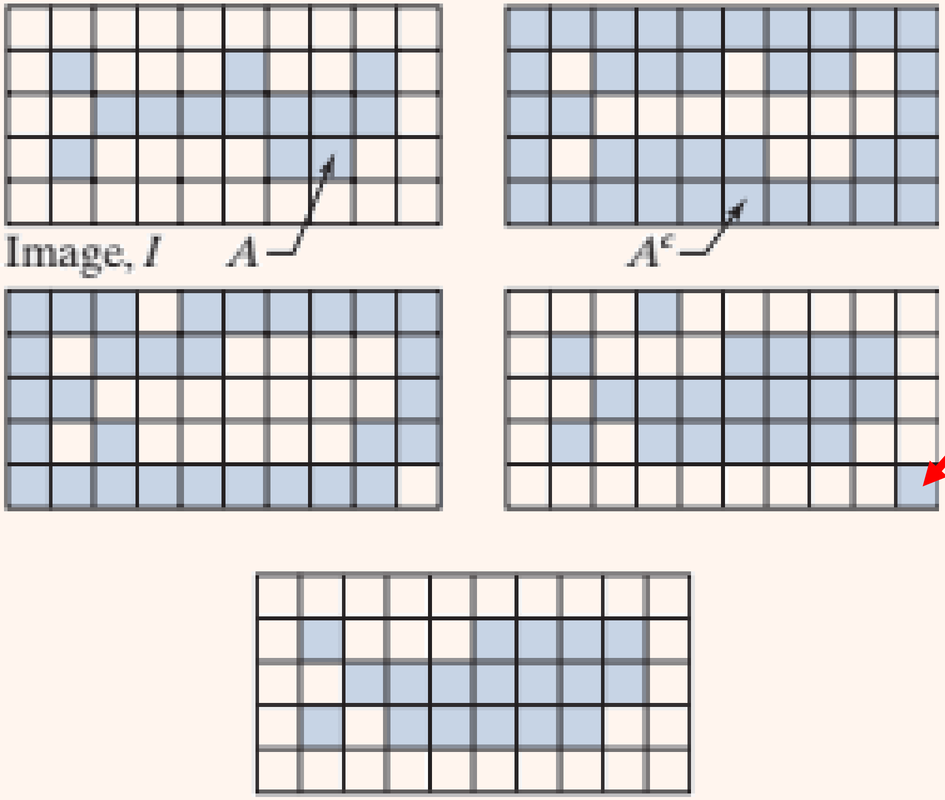
باز هم برای به دست آوردن نتیجه‌ای مناسب‌تر:

$$A \odot \{B\} = ((\ldots((A \odot B^1) \odot B^2)\ldots) \odot B^n)$$

THICKENING

ضخیم‌کردن

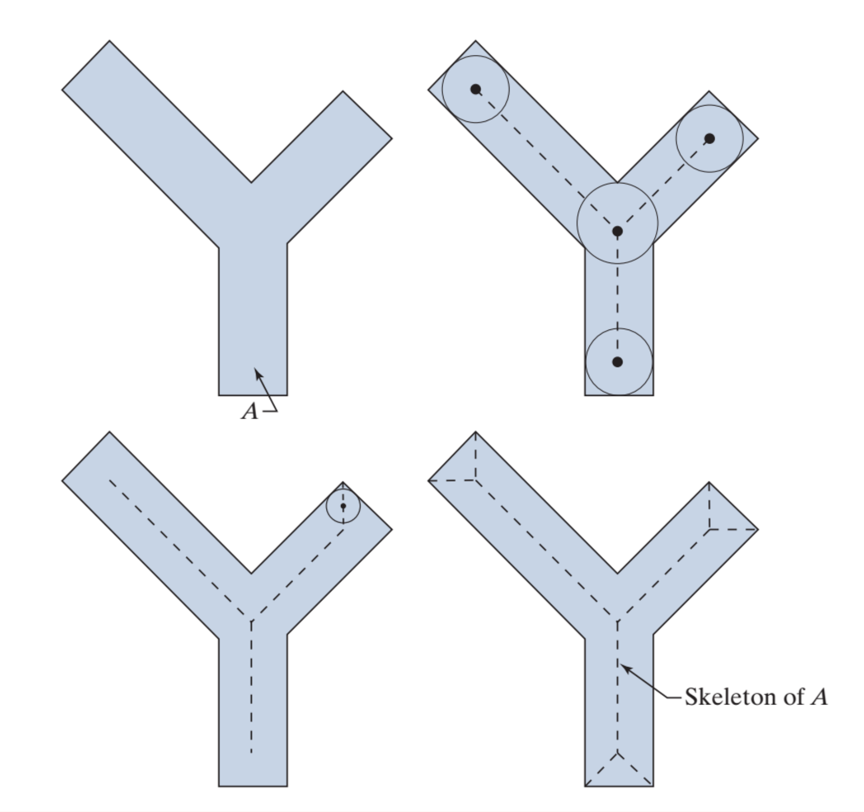
البته در عمل معمولا از نازک‌سازی پس‌زمینه استفاده می‌شود:



این کار ممکن است باعث ایجاد پیکسل‌های منفصل شود، که طی یک مرحله پس‌پردازش حذف می‌شوند

نمایش اسکلت

اسکلت یک شکل مثل A، که با $S(A)$ نمایش داده می‌شود.
اگر z یک نقطه از $S(A)$ باشد و $D(z)$ بزرگ‌ترین دیسکی به مرکز z
که در A بگنجد و مرزهای A را لمس کند.
در این صورت این مراکز اسکلت شی را نشان می‌دهند.



نمایش اسکلت

اسکلت را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$S(A) = \bigcup_{k=0}^{K} S_k(A)$$

که در آن

$$S_k(A) = (A - kB) - (A - kB) \circ B$$

$$K = \max\{k \mid A - kB \neq \phi\}$$

و

$$(A \ominus kB) = ((..((A \ominus B) \ominus B) \ominus \ldots) \ominus B)$$

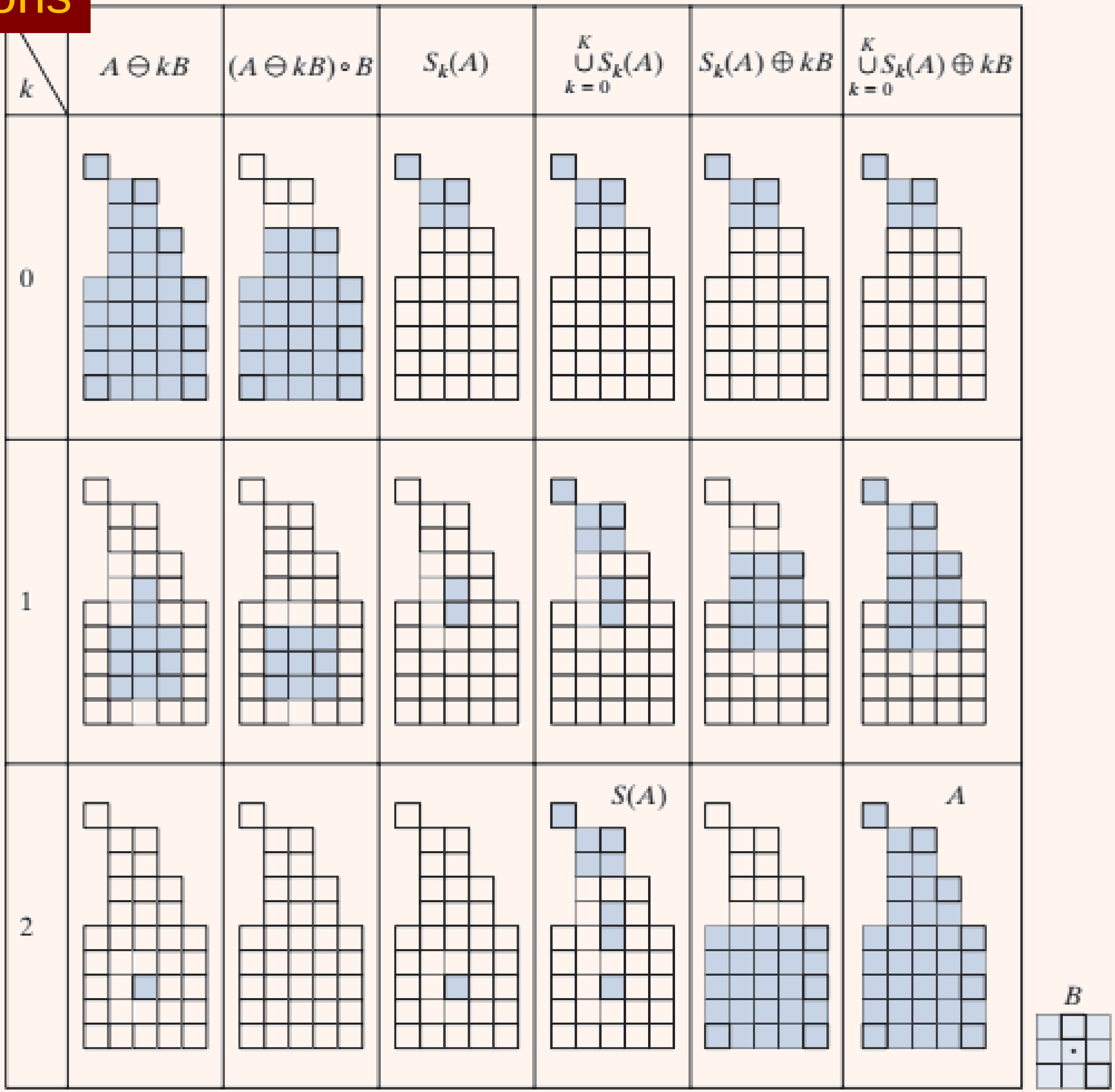
و بدین‌ترتیب شی اصلی قابل بازیابی است:

$$A = \bigcup_{k=0}^{K} (S_k(A) \oplus kB)$$

$$(S_k(A) \oplus kB) = ((\ldots((S_k(A) \oplus B) \oplus B)\ldots \oplus B)$$

Skeletons

۷



k
$A \ominus kB$
$(A \ominus kB) \circ B$
$S_k(A)$
$\bigcup_{k=0}^{K} S_k(A)$
$S_k(A) \oplus kB$
$\bigcup_{k=0}^{K} S_k(A) \oplus kB$
0
1
2
$S(A)$
A
B